Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di Algebra — 3 settembre 2002

matricola .... nome .... cognome ....

	1	4
Votazione:	2	5
	3	

Nuovo ordinamento

1) Si consideri il sottoinsieme del gruppo $\mathbf{Q} \setminus \{0\}$ dei numeri razionali non nulli rispetto alla moltiplicazione:

$$X = \left\{ \frac{m}{n} \;\middle|\; m \neq 0, \quad 3 \nmid n \right\}.$$

Si dimostri che X è un sottosemigruppo; è un sottogruppo?. In ogni caso si determini l'insieme $U(X)$ degli elementi invertibili di X.

2) Si consideri la seguente relazione ρ sull'insieme $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$:

$$(a, b)\ \rho\ (c, d) \quad \text{se e solo se} \quad a - b > c - d \text{ oppure } a - b = c - d \text{ e } a \geq c.$$

Si dimostri che ρ è una relazione d'ordine e si trovino gli eventuali elementi minimali e massimali. Si dica inoltre se ρ è un ordine totale.

3) Nel gruppo S_9 si considerino le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 2 & 8 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 3 & 2 & 8 & 4 & 1 & 9 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Si scrivano σ e τ come prodotti di cicli disgiunti e si dica se sono pari o dispari.

Si calcolino gli ordini di σ, τ e si calcoli $(\sigma \circ \tau)^{-49}$.

4) Si fissino $h, k \in \mathbf{R}$ e su $X = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ si definisca la seguente relazione:

$$a + bi \sim c + di \qquad \text{se e solo se} 2ad - kbc = h.$$

Si determinino h e k in modo che la relazione sia riflessiva e si dimostri che, in tal caso, è una relazione di equivalenza.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando la risposta:

(1) Ogni elemento diverso da 1 del gruppo dei reali non nulli rispetto alla moltiplicazione ha ordine infinito.

(2) Se $f : G \to G'$ è un omomorfismo di gruppi e ogni elemento di G ha ordine finito, allora ogni elemento di G' ha ordine finito.

Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di Algebra — 11 dicembre 2003

matricola .... nome .... cognome ....

	1	4
Votazione:	2	5
	3	

Nuovo ordinamento

1) Sia G un gruppo e sia H un sottogruppo. Si definisca

$$a \sim b \qquad \text{sta per} \qquad \text{esistono } x, y \in H \text{ tali che } ax = yb.$$

Si dimostri che $\sim$ è una relazione di equivalenza su G. Si determini la classe di equivalenza di 1.

Nel caso di $G = S_3$ e di $H = \{id, (12)\}$, si determinino tutte le classi di equivalenza.

2) Si consideri la seguente relazione ρ sull'insieme $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ (dove $\mathbf{Z}$ denota l'insieme dei numeri interi):

$$a \,\rho\, b \qquad \text{se e solo se} \qquad a \mid b \quad \text{e} \quad a \leq b.$$

Si dimostri che ρ è una relazione d'ordine e si trovino gli eventuali elementi minimali e massimali del sottoinsieme $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid |x| > 1\}$. Si dica inoltre se ρ è un ordine totale.

3) Nel gruppo S_9 si considerino le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 6 & 2 & 4 & 5 & 7 & 1 & 9 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 4 & 5 & 2 & 3 & 7 & 1 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Si scrivano σ e τ come prodotti di cicli disgiunti e si dica se sono pari o dispari.

Si calcolino $\sigma \circ \tau$, gli ordini di σ, τ, $\sigma \circ \tau$ e si dica se $(\sigma \circ \tau)^{-1005}$ ha ordine 10.

4) Si calcoli il numero di relazioni di equivalenza in un insieme con 6 elementi per le quali ogni classe di equivalenza ha meno di 4 elementi.

5) Si dica, motivando le risposte, se le seguenti affermazioni sono vere o false.
(a) Se G è un gruppo con $|G| < 6$, allora G è abeliano.
(b) Esiste un gruppo di ordine 7 non abeliano.

Università degli studi di Verona — 11 settembre 2006
Corso di laurea in Informatica — Algebra
Corso di laurea in Matematica Applicata — Elementi di Algebra

matricola .... nome .... cognome ....

	1	4
Votazione:	2	5
	3	

Nuovo ordinamento

1) Sia U l'insieme dei numeri complessi di modulo 1:

$$U = \{\, z \in \mathbf{C} : |z| = 1 \,\}.$$

Si dimostri che U è un sottogruppo di $\mathbf{C} \setminus \{0\}, \cdot$. Si consideri poi l'applicazione $f\colon \mathbf{R} \to U$ definita da

$$f(x) = \cos \pi x + i \sin \pi x$$

e si dica se è un omomorfismo di $\mathbf{R}, +$ in U. Nel caso lo sia si determinino immagine e nucleo di $\mathbf{R}$.

2) Sia $X = \mathbf{N} \setminus \{3\}$ e si definisca la seguente relazione su X:

$$a \mathrel{\rho} b \quad \text{sta per} \quad \begin{cases} a = 0 \\ \text{oppure} \\ a \mid b \text{ e } b \neq 0 \end{cases}$$

Si dica se ρ è una relazione d'ordine su X, se X, ρ è un reticolo e si determinino eventuali elementi massimali e minimali del sottoinsieme $A = X \setminus \{0, 1\}$.

3) Nel gruppo S_9 si considerino le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 9 & 4 & 7 & 6 & 1 & 2 & 8 & 5 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 3 & 9 & 1 & 5 & 8 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si scrivano σ e τ come prodotti di cicli disgiunti e si dica se sono pari o dispari.

Si calcolino $\sigma \circ \tau$, gli ordini di σ, τ, $\sigma \circ \tau$ e si dica se $(\sigma \circ \tau)^{-174389}$ ha ordine 12.

4) Calcolare il numero di relazioni di equivalenza $\sim$ nell'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ soddisfacenti a tutte le condizioni seguenti:
(a) $1 \sim 2$, $2 \sim 4$, $3 \sim 7$;
(b) tutte le classi di equivalenza hanno al massimo quattro elementi.

5) Si dica, motivando le risposte, se le seguenti affermazioni sono vere o false.
(a) Se G è un gruppo e g un fissato elemento di G, allora l'applicazione $f\colon G \to G$ definita da $f(x) = gxg^{-1}x^{-1}$ è un omomorfismo.
(b) Esiste un elemento di S_{13} di ordine 60.

Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di Algebra — 9 settembre 2003

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	1	4
	2	5
	3	

Nuovo ordinamento

1) Sia $n > 2$ e si consideri l'insieme

$$H = \{\, \sigma \in S_n \mid \sigma(1) = 1, \sigma(2) = 2 \,\}.$$

Si dimostri che H è un sottogruppo di S_n, se ne calcoli l'indice $[S_n : H]$ e si dica per quali valori di n il sottogruppo H è normale in S_n.

2) Si consideri la seguente relazione ρ sull'insieme $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ (dove $\mathbf{Z}$ denota l'insieme dei numeri interi):

$$a \;\rho\; b \qquad \text{se e solo se} \qquad a^4 > b^4 \quad \text{oppure} \quad a^4 = b^4 \text{ e } a \leq b.$$

Si dimostri che ρ è una relazione d'ordine e si trovino gli eventuali elementi minimali e massimali. Si dica inoltre se ρ è un ordine totale.

3) Nel gruppo S_9 si considerino le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & 3 & 9 & 1 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 2 & 7 & 5 & 6 & 1 & 9 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si scrivano σ e τ come prodotti di cicli disgiunti e si dica se sono pari o dispari.

Si calcolino gli ordini di σ, τ e senza eseguire calcoli si dica se $(\sigma \circ \tau)^{-1235}$ ha ordine 15.

4) Quante sono le relazioni di equivalenza in un insieme con cinque elementi, nelle quali esattamente una classe di equivalenza ha due elementi?

5) Si dica, fornendo un'adeguata giustificazione, se le seguenti asserzioni sono vere o false.

(a) Il gruppo S_9 ha elementi di ordine 18.

(b) Il gruppo S_5 ha un sottogruppo di ordine 60.

Università degli studi di Verona — 12 settembre 2007

Corso di laurea in Informatica — Algebra

Corso di laurea in Matematica Applicata — Elementi di Algebra

matricola .... nome .... cognome ....

	1	4
Votazione:	2	5
	3	

1) Si consideri l'insieme

$$G = \{ (a, b) \mid a, b \in \mathbf{C}, a \neq 0 \}.$$

Si definisca in G la seguente operazione:

$$(a, b)(c, d) = (ad + b, ac).$$

Si dimostri che, in tal modo, G diventa un gruppo. Si dimostri che

$$H = \{ (b, 1) \mid b \in \mathbf{C} \}$$

è un sottogruppo normale di G. Si determinino poi gli elementi di G di ordine 2.

2) Ogni numero naturale $n > 0$ ammette un'unica scrittura come

$$n = 2^a h, \text{ con } a \in \mathbf{N} \text{ e } h \in \mathbf{N} \text{ dispari.}$$

Si definisca una relazione ρ in $X = \mathbf{N} \setminus \{0\}$ nel modo seguente:

$$2^a h \, \rho \, 2^b k \qquad \text{se} \qquad a \geq b \text{ e } h \leq k$$

(dove si usa la scrittura unica di cui sopra). Si dimostri che ρ è una relazione d'ordine su X; è un ordine totale? Esistono il minimo o il massimo in X, ρ?

3) Nel gruppo S_9 si considerino le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 3 & 2 & 4 & 7 & 6 & 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Si scrivano σ e τ come prodotti di cicli disgiunti e si dica se sono pari o dispari.

Si calcolino gli ordini di σ, τ e $(\sigma \circ \tau)^{-13}$.

4) Si determini il numero delle relazioni di equivalenza $\sim$ sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ soddisfacenti a tutte le seguenti condizioni: (a) Ogni classe di equivalenza contiene almeno tre elementi; (b) $1 \sim 2$; (c) $3 \sim 4$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false, dando adeguata motivazione.

(a) Se G è un gruppo infinito, allora G contiene un sottogruppo H tale che $H \neq \{1\}$ e $H \neq G$.

(b) Se ρ è una relazione d'ordine sull'insieme infinito X, allora esiste in X almeno un elemento massimale oppure un elemento minimale.

Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di Algebra — 14 dicembre 2005

matricola .... nome .... cognome ....

	1	4
Votazione:	2	5
	3	

Nuovo ordinamento

1) Sia G l'insieme delle matrici 2×2 unitarie a coefficienti complessi:

$$G = \{ \mathbf{A} \in GL(2, \mathbf{C}) \mid \mathbf{A}^H = \mathbf{A}^{-1} \}.$$

Si dimostri che G è un sottogruppo di $GL(2, \mathbf{C})$ (gruppo delle matrici invertibili 2×2).

Si consideri l'applicazione $f \colon \mathbf{Z} \to G$ definita da

$$f(t) = \begin{bmatrix} \cos(\pi t/3) & \operatorname{sen}(\pi t/3) \\ -\operatorname{sen}(\pi t/3) & \cos(\pi t/3) \end{bmatrix}$$

e si dimostri che f è un omomorfismo del gruppo degli interi in G. Qual è il nucleo di f? Quanti elementi ha l'immagine di f?

2) Sia X l'insieme degli interi non nulli e si definisca la seguente relazione su X:

$$a \, \rho b \ \text{ se e solo se } \begin{cases} a < b < 0 \\ \text{oppure} \\ a < 0, b > 0 \\ \text{oppure} \\ a > 0, b > 0, b \mid a \end{cases}$$

Si dica se ρ è una relazione d'ordine su X e si trovino eventuali elementi massimali e minimali. Questo insieme ordinato è un reticolo?

3) Nel gruppo S_9 si considerino le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 9 & 3 & 5 & 6 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 1 & 2 & 9 & 3 & 6 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Si scrivano σ e τ come prodotti di cicli disgiunti e si dica se sono pari o dispari.

Si calcolino gli ordini di σ, τ e $(\sigma \circ \tau)^{-9355}$.

4) Si dica se esistono relazioni di equivalenza su $\mathbf{N}$ con la seguente proprietà: ci sono almeno otto classi di equivalenza e ciascuna di esse è infinita.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando la risposta:

(1) Su ogni insieme non vuoto esistono relazioni di equivalenza diverse dall'identità.

(2) Dato un insieme non vuoto X, esiste un'operazione su X che rende X un gruppo.

Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di Algebra — 16 settembre 2004

matricola .... nome .... cognome ....

	1	4
Votazione:	2	5
	3	

Nuovo ordinamento

1) Sia G un gruppo e sia H un sottogruppo di G. Si definisca

$$a \sim b \qquad \text{sta per} \qquad \text{esistono } h_1 \in H,\ h_2 \in H \text{ tali che } ah_1 = h_2 b.$$

Si dimostri che $\sim$ è una relazione di equivalenza su G. Si determini la classe di equivalenza di 1.

Dare una condizione necessaria e sufficiente su H affinché $\sim$ sia una congruenza.

2) Si consideri la seguente relazione ρ sull'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi:

$$a \mathrel{\rho} b \qquad \text{sta per} \qquad \begin{cases} a^2 = b^2 \\ \text{e} \\ b \le a. \end{cases}$$

Si dimostri che ρ è una relazione d'ordine e si trovino gli eventuali elementi minimali e massimali. Si dica inoltre se ρ è un ordine totale o un reticolo.

3) Nel gruppo S_9 si considerino le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 & 7 & 8 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 3 & 7 & 1 & 9 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Si scrivano σ e τ come prodotti di cicli disgiunti e si dica se sono pari o dispari.

Si calcolino $\sigma \circ \tau$, gli ordini di σ, τ, $\sigma \circ \tau$ e si dica se $(\sigma \circ \tau)^{-3205}$ ha ordine 8.

4) Si calcoli il numero di relazioni di equivalenza $\sim$ sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ per le quali esiste una classe di equivalenza con 4 elementi e $1 \sim 3$, $6 \sim 4$, $4 \sim 2$.

5) Si dica, motivando le risposte, se le seguenti affermazioni sono vere o false.
(a) Se $f\colon G \to G'$ è un omomorfismo di gruppi e, per ogni $a, b \in G$, $f(ab) = f(b)f(a)$, allora G è abeliano.
(b) Ogni gruppo G di ordine 6 ha un sottogruppo normale H tale che $1 < |H| < 12$.

Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di Algebra — 18 settembre 2002

matricola .... nome .... cognome ....

	1	4
Votazione:	2	5
	3	

Vecchio ordinamento

1) Sia $GL(2;\mathbf{C})$ il gruppo delle matrici non singolari 2×2 a coefficienti complessi. Si consideri la matrice
$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in GL(2;\mathbf{C}).$$
Si dimostri che
$$\mathcal{G} = \{A \in GL(2;\mathbf{C}) \mid AJ = JA\}$$
è un sottogruppo di $GL(2;\mathbf{C})$. È abeliano?

2) Si consideri la seguente relazione ρ sull'insieme $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$:
$$(a,b)\ \rho\ (c,d) \quad \text{se e solo se} \quad a+d > b+c \text{ oppure } a+d = b+c \text{ e } a \le c.$$
Si dimostri che ρ è una relazione d'ordine e si trovino gli eventuali elementi minimali e massimali. Si dica inoltre se ρ è un ordine totale.

3) Nel gruppo S_9 si considerino le permutazioni
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 1 & 6 & 7 & 2 & 8 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 3 & 8 & 4 & 1 & 9 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$
Si scrivano σ e τ come prodotti di cicli disgiunti e si dica se sono pari o dispari.

Si calcolino gli ordini di σ, τ e si calcoli $(\sigma\circ\tau)^{-772}$.

4) Quante sono le relazioni di equivalenza in un insieme con tre elementi? (Suggerimento: basta contare le partizioni?)

5) Si dica, fornendo un'adeguata giustificazione, se le seguenti asserzioni sono vere o false.
- (a) Se X e Y sono insiemi finiti, allora ogni applicazione suriettiva $f\colon X \to Y$ è iniettiva.
- (b) Se X è infinito, esiste un'applicazione $f\colon X \to X$ iniettiva ma non suriettiva.

Università degli studi di Verona — 21 giugno 2006
Corso di laurea in Informatica — Algebra
Corso di laurea in Matematica Applicata — Elementi di Algebra

matricola .... nome .... cognome ....

	1	4
Votazione:	2	5
	3	

Nuovo ordinamento

1) Sia G un gruppo e siano H e K suoi sottogruppi. Si definisca

$$a \sim b \qquad \text{sta per} \qquad \text{esistono } x \in H \text{ e } y \in K \text{ tali che } b = xay.$$

Si dimostri che $\sim$ è una relazione di equivalenza su G. Si determini la classe di equivalenza di 1, nel caso in cui $H \subseteq K$.

Si dimostri che la classe di equivalenza di 1 è un sottogruppo quando K è un sottogruppo normale di G.

Nel caso di $G = S_n$, $H = \{id, (12)\}$ e $K = A_n$, si calcoli la classe di equivalenza di id.

2) Dato $x \in \mathbf{Z}$ si indichi con $r(x)$ il resto della divisione di x per 5.
Si consideri la seguente relazione ρ sull'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi:

$$a \mathrel{\rho} b \qquad \text{sta per} \qquad r(a) < r(b) \quad \text{oppure} \quad r(a) = r(b) \text{ e } a \leq b.$$

Si dimostri che ρ è una relazione d'ordine e si trovino gli eventuali elementi minimali e massimali del sottoinsieme $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid |x| > 1\}$. Si dica inoltre se ρ è un ordine totale.

3) Nel gruppo S_9 si considerino le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 7 & 3 & 4 & 9 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si scrivano σ e τ come prodotti di cicli disgiunti e si dica se sono pari o dispari.

Si calcolino $\sigma \circ \tau$, gli ordini di σ, τ, $\sigma \circ \tau$ e si dica se $(\sigma \circ \tau)^{-5008}$ ha ordine 8.

4) Calcolare il numero di relazioni di equivalenza $\sim$ nell'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ soddisfacenti a tutte le condizioni seguenti:
(a) $1 \sim 2$, $2 \sim 4$, $3 \sim 5$;
(b) tutte le classi di equivalenza hanno tre elementi.

5) Si dica, motivando le risposte, se le seguenti affermazioni sono vere o false.
(a) Se X è un semigruppo con 1, G è un gruppo e $f\colon X \to G$ ha la proprietà che $f(xy) = f(x)f(y)$, per ogni $x, y \in X$, allora $f(1) = 1$.
(b) L'applicazione $f\colon G \to G$ definita da $f(x) = x^{-1}$, dove G è un gruppo, è un omomorfismo.

Università degli studi di Verona — 19 giugno 2007
Corso di laurea in Informatica — Algebra
Corso di laurea in Matematica Applicata — Elementi di Algebra

matricola .... nome .... cognome ....

	1	4
Votazione:	2	5
	3	

1) Si dimostri che l'insieme

$$H = \left\{ \frac{a}{5^n} : a \in \mathbf{Z}, \mathrm{mcd}(a,5) = 1, n \in \mathbf{N} \right\}$$

è un sottogruppo del gruppo $\mathbf{Q}$ dei razionali rispetto all'addizione. Si dimostri che ogni elemento di $\mathbf{Q}/H$ ha ordine finito. Indicando con $[x]$ la classe di equivalenza di $x \in \mathbf{Q}$ nell'insieme quoziente $\mathbf{Q}/H$, si calcoli l'ordine di $[a/5^n]$.

2) Si consideri la seguente relazione ρ sull'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi:

$$a\,\rho b \quad \text{se e solo se} \quad \begin{cases} a < 0,\ b < 0 \text{ e } a > b, \\ \text{oppure} \\ a < 0 \text{ e } b \geq 0, \\ \text{oppure} \\ a \geq 0,\ b \geq 0 \text{ e } b \mid a. \end{cases}$$

Si dimostri che ρ è una relazione d'ordine e si trovino gli eventuali elementi minimali e massimali. Si dica inoltre se ρ è un ordine totale.

3) Nel gruppo S_8 si considerino le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 6 & 1 & 7 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 5 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Si scrivano σ e τ come prodotti di cicli disgiunti e si dica se sono pari o dispari.

Si calcolino gli ordini di σ, τ e $(\sigma \circ \tau)^{-134555}$.

4) Si dica quante solo le relazioni di equivalenza sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ in cui le classi di equivalenza hanno tutte un numero dispari di elementi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando le risposte.

(a) Se G è un gruppo finito con $|G| = p^n$, dove p è un numero primo e $n > 0$, allora esiste un elemento $g \in G$ tale che il suo ordine è uguale a p.

(b) Se $f \colon G \to G'$ è un omomorfismo di gruppi finiti e $\mathrm{mcd}(|G|, |G'|) = 1$, allora $f(x) = 1$, per ogni $x \in G$.

Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di Algebra — 22 giugno 2005

matricola .... nome .... cognome ....

	1	4
Votazione:	2	5
	3	

Nuovo ordinamento

1) Sia G un gruppo e sia H un suo sottogruppo. Si consideri la relazione su G così definita:

$$a \sim b \qquad \text{sta per} \qquad \text{esistono } h_1, h_2 \in H \text{ tali che } ah_1 = bh_2.$$

Si dimostri che $\sim$ è una relazione di equivalenza e si calcoli la classe di equivalenza di 1.

Nel caso particolare di $G = S_6$ e $H = \{id, (12345), (13524), (14253), (15432)\}$ si calcoli il numero delle classi di equivalenza.

2) Si consideri la seguente relazione ρ sull'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi:

$$a \,\rho\, b \qquad \text{sta per} \qquad \begin{cases} a \geq 0 \text{ e } b < 0 \\ \text{oppure} \\ b \geq 0 \text{ e } a \geq b \\ \text{oppure} \\ a < 0,\, b < 0 \text{ e } a \mid b \end{cases}$$

Si dimostri che ρ è una relazione d'ordine e si trovino gli eventuali elementi minimali e massimali. Si dica inoltre se ρ è un ordine totale e se X, ρ è un reticolo.

3) Nel gruppo S_{12} si considerino le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 12 & 11 & 10 & 5 & 6 & 2 & 4 & 1 & 9 & 7 & 3 & 8 \end{pmatrix},$$
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 9 & 6 & 2 & 4 & 11 & 10 & 7 & 5 & 3 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Si scrivano σ e τ come prodotti di cicli disgiunti e si dica se sono pari o dispari.

Si calcolino $\sigma \circ \tau$, gli ordini di σ, τ, $\sigma \circ \tau$ e si dica se $(\sigma \circ \tau)^{-876}$ ha ordine 18.

4) Si calcoli il numero di relazioni di equivalenza $\sim$ sull'insieme $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ tali che (1) $1 \sim 2$, $3 \sim 2$ e $4 \sim 5$; (2) esiste una classe di equivalenza con esattamente 4 elementi.

5) Si dica, giustificando la risposta, se le affermazioni seguenti sono vere o false.

(a) Ogni sottoinsieme di un reticolo ha estremo superiore e estremo inferiore.

(b) Il gruppo (infinito) G delle applicazioni biiettive di $\mathbf{N}$ in $\mathbf{N}$ non è abeliano.

Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di Algebra — 22 settembre 2003

matricola .... nome .... cognome ....

	1	4
Votazione:	2	5
	3	

Nuovo ordinamento

1) Sia $n > 0$ e si consideri la seguente relazione su S_n:

$$\sigma \sim \tau \qquad \text{se e solo se} \sigma(n) = \tau(n).$$

Si dimostri che $\sim$ è una relazione di equivalenza e si calcoli il numero di classi di equivalenza. Si determinino inoltre i valori di n per i quali $\sim$ è una congruenza.

2) Si consideri la seguente relazione ρ sull'insieme $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ (dove $\mathbf{Z}$ denota l'insieme dei numeri interi):

$$a \, \rho \, b \qquad \text{se e solo se} \qquad a \mid b \quad \text{e} \quad b \leq a.$$

Si dimostri che ρ è una relazione d'ordine e si trovino gli eventuali elementi minimali e massimali del sottoinsieme $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid |x| > 1\}$. Si dica inoltre se ρ è un ordine totale.

3) Nel gruppo S_9 si considerino le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 6 & 1 & 4 & 5 & 7 & 2 & 9 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 4 & 5 & 1 & 3 & 7 & 2 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Si scrivano σ e τ come prodotti di cicli disgiunti e si dica se sono pari o dispari.

Si calcolino $\sigma \circ \tau$, gli ordini di σ, τ, $\sigma \circ \tau$ e si dica se $(\sigma \circ \tau)^{-1005}$ ha ordine 10.

4) Quante sono le relazioni di equivalenza in un insieme con sei elementi, nelle quali esattamente una classe di equivalenza ha tre elementi?

5) Si dica, fornendo un'adeguata giustificazione, se le seguenti asserzioni sono vere o false.

(a) Il gruppo S_{12} ha elementi di ordine 18.

(b) Il gruppo $\mathbf{Z}/120\mathbf{Z}$ ha un sottogruppo di ordine 60.

Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di Algebra — 23 marzo 2004

matricola .... nome .... cognome ....

	1	4
Votazione:	2	5
	3	

Nuovo ordinamento

1) Sia G un gruppo e sia H un suo sottogruppo. Si definisca, per $a, b \in G$,

$$a \,\rho b \qquad \text{se e solo se} \qquad \text{esiste } h \in H \text{ tale che } h^{-1}a = bh^{-1}.$$

Si dimostri che ρ è una relazione di equivalenza su G. Nel caso particolare di $G = S_4$ e $H = \{id, (123), (132)\}$, si determini la classe di equivalenza di (12).

2) Sia $\leq$ una relazione d'ordine sull'insieme X. Definiamo su $Y = X \times X$ la relazione ρ ponendo

$$(a, b)\ \rho\ (c, d) \qquad \text{se e solo se} \qquad c \leq a \text{ e } b = d.$$

Si verifichi che ρ è una relazione d'ordine su Y e si dica quando tale relazione è un reticolo o, in particolare, un ordine totale.

3) Si considerino le permutazioni in S_9:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 4 & 7 & 5 & 6 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 8 & 5 & 2 & 9 & 3 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si calcolino gli ordini di σ, τ e $\sigma \circ \tau$ e si dica se sono pari o dispari. Quanti elementi ha il sottogruppo di S_9 generato da $\sigma \circ \tau$?

4) Si calcoli il numero di relazioni di equivalenza in un insieme con sette elementi con la proprietà che una classe di equivalenza ha quattro elementi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando le risposte:
(a) ogni gruppo il cui ordine sia un numero primo è abeliano;
(b) per ogni intero positivo n esiste un gruppo abeliano di ordine n.

Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di Algebra — 24 giugno 2004

matricola .... nome .... cognome ....

	1	4
Votazione:	2	5
	3	

Nuovo ordinamento

1) Sia G un gruppo abeliano. Si definisca

$$a \sim b \qquad \text{sta per} \qquad \text{esiste } g \in G \text{ tale che } a = g^3 b.$$

Si dimostri che $\sim$ è una relazione di equivalenza su G. Si determini la classe di equivalenza di 1.

È possibile affermare che $\sim$ è una congruenza su G? Se sì, calcolare i possibili ordini degli elementi del gruppo quoziente $G/\sim$.

Dare un esempio di un gruppo non abeliano nel quale la relazione definita sopra non è una relazione di equivalenza.

2) Si consideri la seguente relazione ρ sull'insieme $X = (\mathbf{N} \setminus \{0\}) \times (\mathbf{N} \setminus \{0\})$ (cioè delle coppie ordinate di numeri naturali non nulli):

$$a\ \rho\ b \qquad \text{sta per} \qquad \begin{cases} ad < bc \\ \text{oppure} \\ ad = bc \text{ e } a \leq c. \end{cases}$$

Si dimostri che ρ è una relazione d'ordine e si trovino gli eventuali elementi minimali e massimali. Si dica inoltre se ρ è un ordine totale.

3) Nel gruppo S_9 si considerino le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 3 & 7 & 1 & 9 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 8 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Si scrivano σ e τ come prodotti di cicli disgiunti e si dica se sono pari o dispari.

Si calcolino $\sigma \circ \tau$, gli ordini di σ, τ, $\sigma \circ \tau$ e si dica se $(\sigma \circ \tau)^{-1005}$ ha ordine 12.

4) Si calcoli il numero di relazioni di equivalenza in un insieme con 6 elementi per le quali esiste una classe di equivalenza con 3 elementi.

5) Si dica, motivando le risposte, se le seguenti affermazioni sono vere o false.
(a) Se $f\colon X \to Y$ è un omomorfismo di semigruppi e $x \in X$ è invertibile, allora $f(x)$ è invertibile in Y.
(b) Esiste un gruppo di ordine 11 non abeliano.

Università degli studi di Verona — 12 dicembre 2006

Corso di laurea in Informatica — Algebra

Corso di laurea in Matematica Applicata — Elementi di Algebra

matricola .... nome .... cognome ....

	1	4
Votazione:	2	5
	3	

1) Si consideri il sottoinsieme del gruppo $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali rispetto all'addizione:

$$G = \left\{ \frac{a}{3^n} \;\middle|\; a \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \right\}.$$

Si dimostri che G è un sottogruppo di $\mathbf{Q}$ che contiene $\mathbf{Z}$. Si dimostri che G non è un gruppo ciclico e che, per ogni $m \in \mathbf{N}$,

$$G_m = \{ x \in G \mid mx \in \mathbf{Z} \}$$

è un sottogruppo di G. Per quali valori di m si ha $G_m = G$?

2) Si consideri la seguente relazione ρ sull'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri interi:

$$a \;\rho\; b \quad \text{se e solo se} \quad \begin{cases} a^2 < b^2 \\ \text{oppure} \\ a^2 = b^2 \text{ e } a \geq b. \end{cases}$$

Si dimostri che ρ è una relazione d'ordine e si trovino gli eventuali elementi minimali e massimali. Si dica inoltre se ρ è un ordine totale.

3) Nel gruppo S_9 si considerino le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 2 & 5 & 7 & 3 & 4 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 1 & 3 & 5 & 7 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si scrivano σ e τ come prodotti di cicli disgiunti e si dica se sono pari o dispari.

Si calcolino gli ordini di σ, τ e $(\tau^{-1} \circ \sigma \circ \tau)^{-1999}$.

4) Si dica quante solo le relazioni di equivalenza sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ in cui le classi di equivalenza hanno tutte un numero dispari di elementi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando le risposte.

(a) Se G è un gruppo finito e $g \in G$, allora l'ordine di g è finito e $|G|$.

(b) Esiste in S_n un elemento di ordine 70 se e solo se $n > 12$.

Università degli studi di Verona — 24 settembre 2007
Corso di laurea in Informatica — Algebra
Corso di laurea in Matematica Applicata — Elementi di Algebra

matricola .... nome .... cognome ....

	1	4
Votazione:	2	5
	3	

1) Si consideri l'insieme
$$G = \{ (a, b) \mid a, b \in \mathbf{C}, a \neq 0 \}.$$
Si definisca in G la seguente operazione:
$$(a, b)(c, d) = (ac, ad + bc).$$
Si dimostri che, in tal modo, G diventa un gruppo. Si dimostri che
$$H = \{ (b, 1) \mid b \in \mathbf{C} \}$$
è un sottogruppo normale di G. Si determinino poi gli elementi di G di ordine finito.

2) Si definisca sull'insieme $X = \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ dei numeri interi non nulli la seguente relazione:
$$a \,\rho b \quad \text{sta per} \quad \begin{cases} a < 0 \text{ e } b \leq a \\ \quad \text{oppure} \\ a > 0 \text{ e } b < 0 \\ \quad \text{oppure} \\ a > 0,\, b > 0 \text{ e } b \mid a \end{cases}$$
Si dimostri che ρ è una relazione d'ordine, verificando se è un ordine totale o un reticolo e determinando eventuali elementi massimali e minimali.

3) Nel gruppo S_9 si considerino le permutazioni
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 6 & 8 & 3 & 2 & 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 2 & 5 & 4 & 9 & 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$
Si scrivano σ e τ come prodotti di cicli disgiunti e si dica se sono pari o dispari.

Si calcolino gli ordini di σ, τ e $(\sigma \circ \tau)^{-131222}$.

4) Si determini il numero delle relazioni di equivalenza $\sim$ sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ soddisfacenti a tutte le seguenti condizioni: (a) Ogni classe di equivalenza contiene al più tre elementi; (b) $1 \sim 2$; (c) $3 \sim 4$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false, dando adeguata motivazione.

(a) Se G è un gruppo finito di ordine p^n con p primo e $n > 0$, allora G contiene un sottogruppo H tale che $H \neq \{1\}$ e $H \neq G$.

(b) Se ρ è una relazione d'ordine sull'insieme infinito X, allora esiste in X un sottoinsieme che non ha estremo superiore.

Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di Algebra — 27 settembre 2005

matricola .... nome .... cognome ....

	1	4
Votazione:	2	5
	3	

Nuovo ordinamento

1) Si consideri l'insieme X delle coppie ordinate di numeri reali e sia α un numero reale. Si consideri l'operazione
$$(a,b) * (c,d) = (ac + \alpha b, ad + bc)$$
e si dica per quali valori di α l'insieme $X, *$ è un semigruppo con 1.

Per almeno uno di tali valori, si determinino gli elementi invertibili.

2) Si consideri la seguente relazione ρ sull'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali:
$$a \mathrel{\rho} b \qquad \text{sta per} \qquad \begin{cases} a = 0 \\ \text{oppure} \\ a \neq 0 \text{ e } b \neq 2 \text{ e } a \mid b \end{cases}$$
Si dimostri che ρ è una relazione d'ordine e si trovino gli eventuali elementi minimali e massimali. Si dica inoltre se ρ è un ordine totale e se X, ρ è un reticolo.

3) Nel gruppo S_{12} si considerino le permutazioni
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 12 & 5 & 1 & 9 & 7 & 3 & 8 & 11 & 6 & 2 & 4 & 10 \end{pmatrix},$$
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 9 & 6 & 8 & 4 & 11 & 10 & 7 & 1 & 12 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$
Si scrivano σ e τ come prodotti di cicli disgiunti e si dica se sono pari o dispari.

Si calcolino $\sigma \circ \tau$, gli ordini di σ, τ, $\sigma \circ \tau$ e si dica se $(\sigma \circ \tau)^{-876}$ ha ordine 18.

4) Si calcoli il numero di relazioni di equivalenza $\sim$ sull'insieme $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ tali che
(1) $1 \sim 2$, $3 \sim 2$, $3 \sim 5$, $4 \sim 5$;
(2) non esistono classi di equivalenza con 3 elementi. (Nota: devono essere soddisfatte entrambe le condizioni.)

5) Si dica, giustificando la risposta, se le affermazioni seguenti sono vere o false.

(a) Ogni sottoinsieme finito di un reticolo ha estremo superiore e estremo inferiore.

(b) Il gruppo quoziente $\mathbf{Z}/300\mathbf{Z}$ ha elementi di ordine 24.

Università degli studi di Verona — 28 marzo 2008

Corso di laurea in Informatica — Algebra

Corso di laurea in Matematica Applicata — Elementi di Algebra

matricola .... nome .... cognome ....

	1	4
Votazione:	2	5
	3	

1) Si consideri il sottoinsieme del gruppo $\mathbf{Q} \setminus \{0\}$ dei numeri razionali non nulli rispetto alla moltiplicazione:

$$X = \left\{ \frac{m}{n} \;\middle|\; m > 0, \quad n > 0, \quad 7 \nmid n \right\}.$$

Si dimostri che X è un sottosemigruppo; è un sottogruppo? In ogni caso si determini l'insieme $U(X)$ degli elementi invertibili di X.

2) Si consideri la seguente relazione ρ sull'insieme $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$:

$$(a, b)\ \rho\ (c, d) \quad \text{se e solo se} \quad a^2 + b^2 < c^2 + d^2 \text{ oppure } a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \text{ e } a \geq c.$$

Si dimostri che ρ è una relazione d'ordine e si trovino gli eventuali elementi minimali e massimali. Si dica inoltre se ρ è un ordine totale.

3) Nel gruppo S_9 si considerino le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 8 & 4 & 3 & 1 & 9 & 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 8 & 5 & 4 & 1 & 6 & 7 & 9 \end{pmatrix},$$

Si scrivano σ e τ come prodotti di cicli disgiunti e si dica se sono pari o dispari.

Si calcolino gli ordini di σ, τ e si calcoli $(\sigma \circ \tau)^{-49}$.

4) Si fissino $h, k \in \mathbf{R}$ e su $X = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ si definisca la seguente relazione:

$$a + bi \sim c + di \qquad \text{se e solo se} \qquad (3i - 1)ad - 2h = kbc,$$

dove si intende che $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Si determinino h e k in modo che la relazione sia riflessiva e si dimostri che, in tal caso, è una relazione di equivalenza.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando la risposta:

(1) Ogni elemento diverso da 1 del gruppo dei razionali positivi (rispetto alla moltiplicazione) ha ordine infinito.

(2) Se $f : G \to G'$ è un omomorfismo suriettivo di gruppi e ogni elemento di G ha ordine finito, allora ogni elemento di G' ha ordine finito.

Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di Algebra — 3 settembre 2004

matricola .... nome .... cognome ....

	1	4
Votazione:	2	5
	3	

Nuovo ordinamento

1) Sia G un gruppo abeliano. Si definisca

$$H = \{\, g^4 \mid g \in G \,\}(= \{\, x \in G \mid \text{esiste } g \in G \text{ con } x = g^4 \,\})$$

e si dimostri che H è un sottogruppo di G.

Calcolare i possibili ordini degli elementi del gruppo quoziente G/H.

Dare un esempio di un gruppo non abeliano nel quale l'insieme definito sopra non è un sottogruppo.

2) Si consideri la seguente relazione ρ sull'insieme $X = (\mathbf{N} \setminus \{0\}) \times (\mathbf{N} \setminus \{0\})$ (cioè delle coppie ordinate di numeri naturali non nulli):

$$a \;\rho\; b \qquad \text{sta per} \qquad \begin{cases} ad > bc \\ \text{oppure} \\ ad = bc \text{ e } a \geq c. \end{cases}$$

Si dimostri che ρ è una relazione d'ordine e si trovino gli eventuali elementi minimali e massimali. Si dica inoltre se ρ è un ordine totale.

3) Nel gruppo S_9 si considerino le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 3 & 7 & 1 & 9 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 8 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Si scrivano σ e τ come prodotti di cicli disgiunti e si dica se sono pari o dispari.

Si calcolino $\sigma \circ \tau$, gli ordini di σ, τ, $\sigma \circ \tau$ e si dica se $(\sigma \circ \tau)^{-876}$ ha ordine 12.

4) Si determini sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ una relazione di equivalenza $\sim$ con le seguenti proprietà: (a) $1 \sim 2$; (b) $2 \sim 4$; (c) le classi di equivalenza hanno al più tre elementi.

Quante sono le relazioni di equivalenza con tali proprietà?

5) Si dica, motivando le risposte, se le seguenti affermazioni sono vere o false.

(a) Sia G un gruppo finito e sia X un sottoinsieme di G con la proprietà che, per ogni $x, y \in X$, allora $xy \in X$. Allora X è un sottogruppo di G.

(b) Esiste un gruppo di ordine 12 non abeliano.

Università degli studi di Verona — 29 settembre 2006
Corso di laurea in Informatica — Algebra
Corso di laurea in Matematica Applicata — Elementi di Algebra

matricola .... nome .... cognome ....

	1	4
Votazione:	2	5
	3	

Nuovo ordinamento

1) Sia H l'insieme dei numeri razionali che si possono scrivere nella forma

$$\frac{a}{b}, \text{ con } a, b \in \mathbf{Z},\ b > 0 \text{ e } b \text{ divisibile per } 6.$$

Si dimostri che H è un sottogruppo di $\mathbf{Q}, +$ e si dica quali sono gli elementi del gruppo quoziente $\mathbf{Q}/H$ che hanno ordine finito.

Il gruppo $H, +$ è ciclico?

2) Si consideri la seguente relazione sull'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi:

$$a\,\rho b \text{ sta per } a \mid b \text{ e } a \leq b.$$

Si dica se ρ è una relazione d'ordine e, in questo caso, si determinino gli elementi massimali e minimali e si dica se $\mathbf{Z}, \rho$ è un reticolo.

3) Nel gruppo S_9 si considerino le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 6 & 1 & 2 & 8 & 5 & 9 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 2 & 7 & 3 & 9 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si scrivano σ e τ come prodotti di cicli disgiunti e si dica se sono pari o dispari.

Si calcolino $\sigma \circ \tau$, gli ordini di σ, τ, $\sigma \circ \tau$ e si dica se $(\sigma \circ \tau)^{-174389}$ ha ordine 21.

4) Calcolare il numero di relazioni di equivalenza $\sim$ nell'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ soddisfacenti a tutte le condizioni seguenti:
(a) $1 \sim 2$, $2 \sim 4$, $3 \sim 7$;
(b) tutte le classi di equivalenza hanno almeno quattro elementi.

5) Si dica, motivando le risposte, se le seguenti affermazioni sono vere o false.
(a) Se G è un gruppo e g un fissato elemento di G, allora l'applicazione $f \colon G \to G$ definita da $f(x) = gxg^{-1}$ è un omomorfismo biiettivo.
(b) Esiste un elemento di S_{14} di ordine 60 e di segnatura dispari.

Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di Algebra — 8 luglio 2005

matricola .... nome .... cognome ....

	1	4
Votazione:	2	5
	3	

Nuovo ordinamento

1) Sia G un gruppo e sia H un suo sottogruppo. Si consideri la relazione su G così definita:

$$a \sim b \qquad \text{sta per} \qquad \text{esistono } h_1, h_2 \in H \text{ tali che } b^{-1}h_1 = a^{-1}h_2.$$

Si dimostri che $\sim$ è una relazione di equivalenza e si calcoli la classe di equivalenza di 1.

Nel caso particolare di $G = S_7$ e $H = \langle(1234567)\rangle$ si calcoli il numero delle classi di equivalenza.

2) Si consideri la seguente relazione ρ sull'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali:

$$a\ \rho\ b \qquad \text{sta per} \qquad \begin{cases} a = 0 \\ \text{oppure} \\ b > 0 \text{ e } a \mid b \end{cases}$$

Si dimostri che ρ è una relazione d'ordine e si trovino gli eventuali elementi minimali e massimali. Si dica inoltre se ρ è un ordine totale e se X, ρ è un reticolo.

3) Nel gruppo S_{12} si considerino le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 12 & 11 & 10 & 5 & 6 & 2 & 4 & 1 & 9 & 7 & 3 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 11 & 10 & 7 & 1 & 9 & 6 & 2 & 5 & 3 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Si scrivano σ e τ come prodotti di cicli disgiunti e si dica se sono pari o dispari.

Si calcolino $\sigma \circ \tau$, gli ordini di σ, τ, $\sigma \circ \tau$ e si dica se $(\sigma \circ \tau)^{-876}$ ha ordine 18.

4) Si calcoli il numero di relazioni di equivalenza $\sim$ sull'insieme $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ tali che
(1) $1 \sim 2$, $3 \sim 2$, $3 \sim 3$, $4 \sim 5$; e inoltre
(2) esiste una classe di equivalenza con almeno 4 elementi. (Nota: vanno considerate entrambe le condizioni.)

5) Si dica, giustificando la risposta, se le affermazioni seguenti sono vere o false.

(a) Ogni sottoinsieme finito di un reticolo ha estremo superiore e estremo inferiore.

(b) Il gruppo quoziente $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ è infinito. (Nota: $\mathbf{Q}$ è un gruppo rispetto all'addizione.)

Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di Algebra — 30 marzo 2006

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	1	4
	2	5
	3	

1) Si consideri il sottoinsieme del gruppo $\mathbf{Q} \setminus \{0\}$ dei numeri razionali non nulli rispetto alla moltiplicazione:

$$X = \left\{ \frac{m}{n} \;\middle|\; m > 0, \quad n > 0, \quad 5 \nmid n \right\}.$$

Si dimostri che X è un sottosemigruppo; è un sottogruppo?. In ogni caso si determini l'insieme $U(X)$ degli elementi invertibili di X.

2) Si consideri la seguente relazione ρ sull'insieme $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$:

$$(a,b)\ \rho\ (c,d) \quad \text{se e solo se} \quad a^2 + b^2 > c^2 + d^2 \text{ oppure } a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \text{ e } a \geq c.$$

Si dimostri che ρ è una relazione d'ordine e si trovino gli eventuali elementi minimali e massimali. Si dica inoltre se ρ è un ordine totale.

3) Nel gruppo S_9 si considerino le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 8 & 5 & 4 & 1 & 6 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 8 & 4 & 3 & 1 & 9 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Si scrivano σ e τ come prodotti di cicli disgiunti e si dica se sono pari o dispari.

Si calcolino gli ordini di σ, τ e si calcoli $(\sigma \circ \tau)^{-49}$.

4) Si fissino $h, k \in \mathbf{R}$ e su $X = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ si definisca la seguente relazione:

$$a + bi \sim c + di \qquad \text{se e solo se} \qquad (3i - 1)ad - kbc = h.$$

Si determinino h e k in modo che la relazione sia riflessiva e si dimostri che, in tal caso, è una relazione di equivalenza.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando la risposta:

(1) Ogni elemento diverso da 1 del gruppo dei razionali non nulli (rispetto alla moltiplicazione) ha ordine infinito.

(2) Se $f\colon G \to G'$ è un omomorfismo iniettivo di gruppi e ogni elemento di G ha ordine finito, allora ogni elemento di G' ha ordine finito.

Università degli studi di Verona — 4 luglio 2007
Corso di laurea in Informatica — Algebra
Corso di laurea in Matematica Applicata — Elementi di Algebra

matricola .... nome .... cognome ....

	1	4
Votazione:	2	5
	3	

1) Si dimostri che l'insieme

$$G = \{x \in \mathbf{C} : x^n = 1, \text{ per qualche } n \in \mathbf{N},\ n > 0\}$$

è un sottogruppo del gruppo moltiplicativo $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ dei numeri complessi non nulli. Si verifichi che

$$H = \{x \in G : x^4 = 1\}$$

è un sottogruppo (normale) di G e, per ogni $x \in G$, si calcoli l'ordine dell'elemento $[x] \in G/H$.

2) Si consideri la seguente relazione ρ sull'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi:

$$a\,\rho b \quad \text{se e solo se} \quad \begin{cases} a \le 0 \text{ e } b = a, \\ \text{oppure} \\ a > 0 \text{ e } b = ka, \text{ per un } k > 0. \end{cases}$$

Si dimostri che ρ è una relazione d'ordine e si trovino gli eventuali elementi minimali e massimali. Si dica inoltre se ρ è un ordine totale o un reticolo.

3) Nel gruppo S_8 si considerino le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 3 & 5 & 6 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 5 & 4 & 8 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Si scrivano σ e τ come prodotti di cicli disgiunti e si dica se sono pari o dispari.

Si calcolino gli ordini di σ, τ e $(\sigma \circ \tau)^{-134555}$.

4) Si dica quante solo le relazioni di equivalenza sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ in cui le classi di equivalenza hanno tutte un numero pari di elementi.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando le risposte.

(a) Se G è un gruppo finito con $|G| = p^n$, dove p è un numero primo e $n > 1$, allora esiste un elemento $g \in G$ tale che il suo ordine è uguale a p^2.

(b) Se G è un gruppo finito, H è un suo sottogruppo e $[G : H] = p$ è primo, allora H è normale in G.

Università degli studi di Verona — 6 luglio 2006
Corso di laurea in Informatica — Algebra
Corso di laurea in Matematica Applicata — Elementi di Algebra

matricola .... nome .... cognome ....

	1	4
Votazione:	2	5
	3	

Nuovo ordinamento

1) Sia p un numero primo e si ponga

$$H = \left\{ \frac{m}{p^n} : m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \right\}.$$

Si dimostri che H è un sottogruppo di $\mathbf{Q}, +$. Si dica se H è un gruppo ciclico e si trovino gli elementi di ordine finito in $\mathbf{Q}/H$. È vero che $\mathbf{Q}/H$ è finito?

2) Sia $X = \mathbf{N} \setminus \{2\}$ e si definisca la seguente relazione su X:

$$a \; \rho \; b \quad \text{sta per} \quad \begin{cases} a = 0 \\ \text{oppure} \\ a \mid b \text{ e } b \neq 0 \end{cases}$$

Si dica se ρ è una relazione d'ordine su X, se X, ρ è un reticolo e si determinino eventuali elementi massimali e minimale del sottoinsieme $A = X \setminus \{0, 1\}$.

3) Nel gruppo S_9 si considerino le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 3 & 4 & 7 & 6 & 1 & 2 & 8 & 5 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 3 & 1 & 5 & 8 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si scrivano σ e τ come prodotti di cicli disgiunti e si dica se sono pari o dispari.

Si calcolino $\sigma \circ \tau$, gli ordini di σ, τ, $\sigma \circ \tau$ e si dica se $(\sigma \circ \tau)^{-5008}$ ha ordine 8.

4) Calcolare il numero di relazioni di equivalenza $\sim$ nell'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ soddisfacenti a tutte le condizioni seguenti:
(a) $1 \sim 2$, $2 \sim 4$, $3 \sim 5$;
(b) tutte le classi di equivalenza hanno al massimo tre elementi.

5) Si dica, motivando le risposte, se le seguenti affermazioni sono vere o false.
(a) Se X e Y sono semigruppi con 1 e $f \colon X \to Y$ è un'applicazione suriettiva con la proprietà che $f(xy) = f(x)f(y)$, per ogni $x, y \in X$, allora $f(1) = 1$.
(b) Esiste un elemento di S_{12} di ordine 40.

Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di Algebra — 8 luglio 2004

matricola .... nome .... cognome ....

	1	4
Votazione:	2	5
	3	

Nuovo ordinamento

1) Sia G un gruppo e sia H un sottogruppo di G. Si definisca

$$a \sim b \qquad \text{sta per} \qquad \text{esistono } h_1 \in H,\ h_2 \in H \text{ tali che } ah_1 = bh_2.$$

Si dimostri che $\sim$ è una relazione di equivalenza su G. Si determini la classe di equivalenza di 1.

Dare una condizione necessaria e sufficiente su H affinché $\sim$ sia una congruenza.

2) Si consideri la seguente relazione ρ sull'insieme $X = (\mathbf{N} \setminus \{0\}) \times (\mathbf{N} \setminus \{0\})$ (cioè delle coppie ordinate di numeri naturali non nulli):

$$(a, b)\ \rho\ (c, d) \qquad \text{sta per} \qquad \begin{cases} ad \leq bc \\ \text{e} \\ a \leq c. \end{cases}$$

Si dimostri che ρ è una relazione d'ordine e si trovino gli eventuali elementi minimali e massimali. Si dica inoltre se ρ è un ordine totale o un reticolo.

3) Nel gruppo S_9 si considerino le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 3 & 7 & 1 & 9 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 & 7 & 8 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Si scrivano σ e τ come prodotti di cicli disgiunti e si dica se sono pari o dispari.

Si calcolino $\sigma \circ \tau$, gli ordini di σ, τ, $\sigma \circ \tau$ e si dica se $(\sigma \circ \tau)^{-1005}$ ha ordine 8.

4) Si calcoli il numero di relazioni di equivalenza in un insieme con 7 elementi per le quali esiste una classe di equivalenza con 4 elementi.

5) Si dica, motivando le risposte, se le seguenti affermazioni sono vere o false.
(a) Se $f\colon X \to Y$ è un omomorfismo di semigruppi, $x \in X$ e $f(x)$ non è invertibile in Y, allora x non è invertibile in X.
(b) Esiste un gruppo di ordine 8 non abeliano.

Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di Algebra — 7 dicembre 2004

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	1	4
	2	5
	3	

Nuovo ordinamento

1) Sia G un gruppo e sia H un sottogruppo. Si definisca

$$a \sim b \qquad \text{sta per} \qquad \text{esistono } x, y \in H \text{ tali che } a = xby.$$

Si dimostri che $\sim$ è una relazione di equivalenza su G. Si determini la classe di equivalenza di 1.

Nel caso di $G = S_3$ e di $H = \{id, (13)\}$, si determinino tutte le classi di equivalenza.

2) Si consideri la seguente relazione ρ sull'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi:

$$a \,\rho\, b \qquad \text{se e solo se} \qquad a^2 \mid b^2 \quad \text{e} \quad a \geq b.$$

Si dimostri che ρ è una relazione d'ordine e si trovino gli eventuali elementi minimali e massimali del sottoinsieme $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid |x| > 1\}$. Si dica inoltre se ρ è un ordine totale.

3) Nel gruppo S_9 si considerino le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 8 & 2 & 4 & 9 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 4 & 9 & 2 & 3 & 7 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si scrivano σ e τ come prodotti di cicli disgiunti e si dica se sono pari o dispari.

Si calcolino $\sigma \circ \tau$, gli ordini di σ, τ, $\sigma \circ \tau$ e si dica se $(\sigma \circ \tau)^{-5008}$ ha ordine 10.

4) Si calcoli il numero di relazioni di equivalenza in un insieme con 9 elementi per le quali ogni classe di equivalenza ha almeno 4 elementi.

5) Si dica, motivando le risposte, se le seguenti affermazioni sono vere o false.
(a) Se X è un semigruppo con 1, G è un gruppo e $f\colon X \to G$ ha la proprietà che $f(xy) = f(x)f(y)$, per ogni $x, y \in X$, allora $f(1) = 1$.
(b) Esiste un gruppo di ordine 8 non abeliano.

Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di Algebra — 8 luglio 2003

matricola .... nome .... cognome ....

	1	4
Votazione:	2	5
	3	

Nuovo ordinamento

1) Sia $GL(3;\mathbf{C})$ il gruppo delle matrici non singolari 3×3 a coefficienti complessi. Si dimostri che

$$\mathcal{G} = \{A \in GL(2;\mathbf{C}) \mid A^H = A^{-1}\}$$

è un sottogruppo di $GL(3;\mathbf{C})$. È abeliano? È normale in $GL(3;\mathbf{C})$?

2) Si consideri la seguente relazione ρ sull'insieme $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (dove $\mathbf{R}$ denota l'insieme dei numeri reali):

$$(a,b)\ \rho\ (c,d) \quad \text{se e solo se} \quad a+d > b+c \text{ oppure } a+d = b+c \text{ e } a \leq c.$$

Si dimostri che ρ è una relazione d'ordine e si trovino gli eventuali elementi minimali e massimali. Si dica inoltre se ρ è un ordine totale.

3) Nel gruppo S_9 si considerino le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 8 & 9 & 5 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & 9 & 7 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si scrivano σ e τ come prodotti di cicli disgiunti e si dica se sono pari o dispari.

Si calcolino gli ordini di σ, τ e senza eseguire calcoli si dica se $(\sigma \circ \tau)^{-856}$ ha ordine 15.

4) Quante sono le relazioni di equivalenza in un insieme con quattro elementi, nelle quali non più di una classe di equivalenza ha un solo elemento?

5) Si dica, fornendo un'adeguata giustificazione, se le seguenti asserzioni sono vere o false.

(a) Il gruppo S_{12} ha elementi di ordine 12!.

(b) Il gruppo S_4 ha un sottogruppo normale di ordine 4.

Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di Algebra — 7 aprile 2005

matricola .... nome .... cognome ....

	1	4
Votazione:	2	5
	3	

Nuovo ordinamento

1) Sia G un gruppo abeliano. Si definisca

$$H = \{ g \in G \mid g^4 = 1 \}, \qquad K = \{ g \in G \mid g^3 = 1 \}.$$

Si dimostri che H e K sono sottogruppi di G e si calcoli $H \cap K$.

Più in generale, si definisca $G[n] = \{ g \in G \mid g^n = 1 \}$ e si dimostri che $G[n]$ è un sottogruppo di G. Si trovino condizioni necessarie e sufficienti sui numeri naturali m e n in modo che $G[m] \cap G[n] = \{1\}$.

La condizione che G sia abeliano è essenziale?

2) Si consideri la seguente relazione ρ sull'insieme $X = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$:

$$(a, b)\ \rho\ (c, d) \qquad \text{sta per} \qquad \begin{cases} a \mid c \text{ e } a \neq c \\ \text{oppure} \\ a = c \text{ e } b \mid d. \end{cases}$$

Si dimostri che ρ è una relazione d'ordine e si trovino gli eventuali elementi minimali e massimali. Si dica inoltre se ρ è un ordine totale e se X, ρ è un reticolo.

3) Nel gruppo S_9 si considerino le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 2 & 4 & 1 & 9 & 7 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 2 & 7 & 9 & 6 & 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Si scrivano σ e τ come prodotti di cicli disgiunti e si dica se sono pari o dispari.

Si calcolino $\sigma \circ \tau$, gli ordini di σ, τ, $\sigma \circ \tau$ e si dica se $(\sigma \circ \tau)^{-876}$ ha ordine 8.

4) Si calcoli il numero di relazioni d'ordine in un insieme con tre elementi.

5) Si dica, giustificando la risposta, se le affermazioni seguenti sono vere o false.
(a) In ogni insieme parzialmente ordinato esiste almeno un elemento minimale o massimale.
(b) In ogni gruppo finito G esiste un elemento $g \neq 1$ tale che $g^2 = 1$.
(c) In ogni gruppo finito G, con $|G|$ pari, esiste un elemento $g \neq 1$ tale che $g^2 = 1$.

Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di Algebra — 12 dicembre 2002

matricola .... nome .... cognome ....

	1	4
Votazione:	2	5
	3	

Nuovo ordinamento

1) Siano G un gruppo e H un sottogruppo. Si definisca la relazione ρ su G tramite

$$x\,\rho\,y \text{ se e solo se esistono } h_1, h_2 \in H \text{ con } h_1 y = x h_2.$$

Si provi che ρ è una relazione di equivalenza e si determini la classe di equivalenza di 1. Nel caso in cui $G = S_5$ e $H = \{id, (123), (132)\}$, si determini la classe di equivalenza di (13).

2) Si consideri $X = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Su X si consideri la relazione ρ:

$$(a, b)\,\rho\,(c, d) \quad \text{se e solo se} \quad a \mid c \text{ e } d \mid b.$$

Si dimostri che ρ è una relazione d'ordine e si trovino eventuali elementi minimali e massimali. L'insieme X è un reticolo?

3) Nel gruppo S_9 si considerino le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 2 & 9 & 7 & 1 & 5 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}. \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

Si scrivano σ e τ come prodotti di cicli disgiunti e si dica se sono pari o dispari. Si calcolino $(\sigma \circ \tau)^{65537}$ e gli ordini di σ e τ.

4) Sia $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ l'insieme delle parti di $\mathbf{N}$ e su di esso si definisca che

$$A \sim B \qquad \text{sta per} \qquad A \cup P = B \cup P,$$

dove P è l'insieme dei naturali pari. Si dimostri che $\sim$ è una relazione di equivalenza e si determini la classe di equivalenza di $\{0, 1\}$.

5) Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false, fornendo adeguata giustificazione.
(a) Ogni sottogruppo di S_4 è normale.
(b) Ogni sottesemigruppo di S_4 è un sottogruppo.

Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di Algebra — 13 settembre 2005

matricola .... nome .... cognome ....

	1	4
Votazione:	2	5
	3	

Nuovo ordinamento

1) Si consideri l'insieme X delle coppie ordinate di numeri reali e sia α un numero reale. Si consideri l'operazione
$$(a,b)*(c,d) = (ac+\alpha bd, ad+bc)$$
e si dica per quali valori di α l'insieme $X,*$ è un semigruppo con 1.

Per almeno uno di tali valori, si determinino gli elementi invertibili.

2) Si consideri la seguente relazione ρ sull'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali:
$$a\ \rho\ b \qquad \text{sta per} \qquad \begin{cases} a=1 \\ \text{oppure} \\ b\neq 1 \text{ e } a \mid b \end{cases}$$
Si dimostri che ρ è una relazione d'ordine e si trovino gli eventuali elementi minimali e massimali. Si dica inoltre se ρ è un ordine totale e se X,ρ è un reticolo.

3) Nel gruppo S_{12} si considerino le permutazioni
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 12 & 5 & 6 & 2 & 4 & 1 & 9 & 7 & 3 & 8 & 11 & 10 \end{pmatrix},$$
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 11 & 10 & 7 & 1 & 9 & 6 & 8 & 12 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$
Si scrivano σ e τ come prodotti di cicli disgiunti e si dica se sono pari o dispari.

Si calcolino $\sigma\circ\tau$, gli ordini di σ, τ, $\sigma\circ\tau$ e si dica se $(\sigma\circ\tau)^{-876}$ ha ordine 18.

4) Si calcoli il numero di relazioni di equivalenza $\sim$ sull'insieme $X=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ tali che
(1) $1\sim 2$, $3\sim 2$, $3\sim 3$, $4\sim 5$;
(2) non esistono classi di equivalenza con 4 elementi. (Nota: devono essere soddisfatte entrambe le condizioni.)

5) Si dica, giustificando la risposta, se le affermazioni seguenti sono vere o false.

(a) Ogni sottoinsieme finito di un insieme ordinato ha estremo superiore e estremo inferiore.

(b) Il gruppo quoziente $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ è infinito. (Nota: $\mathbf{R}$, insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'addizione.)

Università degli studi di Verona — Corso di laurea in Informatica
Prova scritta di Algebra — 14 dicembre 2005

matricola .... nome .... cognome ....

	1	4
Votazione:	2	5
	3	

1) Sia G l'insieme delle matrici 2×2 unitarie a coefficienti complessi:

$$G = \{ \mathbf{A} \in GL(2, \mathbf{C}) \mid \mathbf{A}^H = \mathbf{A}^{-1} \}.$$

Si dimostri che G è un sottogruppo di $GL(2, \mathbf{C})$ (gruppo delle matrici invertibili 2×2).

Si consideri l'applicazione $f \colon \mathbf{Z} \to G$ definita da

$$f(t) = \begin{bmatrix} \cos(\pi t/3) & \operatorname{sen}(\pi t/3) \\ -\operatorname{sen}(\pi t/3) & \cos(\pi t/3) \end{bmatrix}$$

e si dimostri che f è un omomorfismo del gruppo degli interi in G. Qual è il nucleo di f? Quanti elementi ha l'immagine di f?

2) Sia X l'insieme degli interi non nulli e si definisca la seguente relazione su X:

$$a \,\rho b \ \text{ se e solo se } \begin{cases} a < b < 0 \\ \text{oppure} \\ a < 0, b > 0 \\ \text{oppure} \\ a > 0, b > 0, b \mid a \end{cases}$$

Si dica se ρ è una relazione d'ordine su X e si trovino eventuali elementi massimali e minimali. Questo insieme ordinato è un reticolo?

3) Nel gruppo S_9 si considerino le permutazioni

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 9 & 3 & 5 & 6 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 1 & 2 & 9 & 3 & 6 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Si scrivano σ e τ come prodotti di cicli disgiunti e si dica se sono pari o dispari.

Si calcolino gli ordini di σ, τ e $(\sigma \circ \tau)^{-9355}$.

4) Si consideri l'insieme

$$A = \{ (a, b) \mid a, b \in \mathbf{Z} \}$$

dotato delle operazioni

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$
$$(a, b)(c, d) = (ad + bc, bd).$$

Si dimostri che:

(a) A è un anello;

(b) l'insieme M degli elementi di A non invertibili non è un ideale di A.

Trovare i divisori di zero in A e gli elementi invertibili.

5) Si considerino i polinomi $f = x^4 + 2x^3 + x^2 + 3 \in K[x]$ e $g = x^3 - 3x^2 + 3x - 2 \in K[x]$. Si fattorizzino f e g in prodotti di polinomi irriducibili e se ne calcoli il minimo comune multiplo ed il massimo comun divisore nei seguenti casi: (a) $K = \mathbf{Q}$, (b) $K = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, (c) $K = \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$.