ESERCIZI PER IL CORSO DI ALGEBRA
LAUREA IN MATEMATICA APPLICATA

1

Sia A un anello commutativo e sia $a \in A$. Si definisca

$$\operatorname{Ann}(a) = \{\, x \in A : ax = 0 \,\}.$$

Si provi che $\operatorname{Ann}(a)$ è un ideale di A.

Siano $f = X^4+X^3-3X-3$, $A = \mathbb{Q}[X]/f\mathbb{Q}[X]$, $a = [X^3+1] \in A$, $b = [X+3] \in A$. Si determini $\operatorname{Ann}(a)$, si provi che b è invertibile in A e se ne calcoli l'inverso.

2

Sia $b = \sqrt{5} + i\sqrt{7} \in \mathbb{C}$. Si calcoli il polinomio minimo f_b di b su $\mathbb{Q}$ e si provi che $\mathbb{Q}[b]$ è un campo di riducibilità completa per f_b su $\mathbb{Q}$. Si provi che $\mathbb{Q}[\sqrt{5}] \subseteq \mathbb{Q}[b]$ e si calcoli $[\mathbb{Q}[b] : \mathbb{Q}[\sqrt{5}]]$.

3

Si ponga

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

e si provi che A è un sottoanello commutativo dell'anello delle matrici $M_2(\mathbb{C})$. Si determinino gli elementi invertibili di A. Si provi che

$$I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{Q} \right\}$$

è un ideale di A e che $A/I \cong \mathbb{Z}$.

4

Sia $b = \sqrt[4]{3} + \sqrt{3}$. Si calcoli il polinomio minimo f_b di b su $\mathbb{Q}$ (suggerimento: si calcoli $(b - \sqrt{3})^2$).

Si dimostri che $\mathbb{Q}[b] = \mathbb{Q}[\sqrt[4]{3}]$. Si dimostri che, se $\zeta \in \mathbb{C}$ è una radice quarta di 1, allora f_b è il polinomio minimo di $\zeta\sqrt[4]{3} + \zeta^2\sqrt{3}$ su $\mathbb{Q}$.

Si scrivano le radici di f_b e si provi che $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{3}, i]$ è il campo di riducibilità completa di f_b su $\mathbb{Q}$.

5

Si verifichi che $c = 2 + \sqrt[3]{3}$ non è un quadrato in $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{3}]$. Sia $b = \sqrt{c}$; si determini il polinomio minimo f_b di b su $\mathbb{Q}$. È vero che $\mathbb{Q}[b]$ è il campo di riducibilità completa per f_b su $\mathbb{Q}$?

6

Siano $f = X^3 - 3X^2 + 2X - 6$ e $g = X^4 + X^3 + 3X^2 + 2X + 2$ in $\mathbb{Q}[X]$. Se ne determini il massimo comun divisore monico $d \in \mathbb{Q}[X]$ e si trovino $r, s \in \mathbb{Q}[X]$ tali che $d = rf + sg$.

Sia $I = f\mathbb{Q}[X]$ e sia A l'anello quoziente $A = \mathbb{Q}[X]/I$. È vero che $[g]$ è invertibile in A? È vero che $[g]$ è un divisore dello zero in A?

7

Si fattorizzi 5 come prodotto di irriducibili in $\mathbb{Z}[i]$. Si ponga $A = \mathbb{Z}[i]/5\mathbb{Z}[i]$ e si determinino i divisori di zero e gli elementi nilpotenti di A (un elemento $x \in A$ è un divisore di zero se $x \neq 0$ ed esiste $y \in A$ tale che $y \neq 0$ e $xy = 0$; un elemento $x \in A$ è nilpotente se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $x^n = 0$).

Si determinino gli ideali di A e si dica quali sono massimali.

8

Sia $b = \sqrt[3]{1 + \sqrt{3}}$. Si determini il polinomio minimo f_b di b su $\mathbb{Q}$. Si provi che $\mathbb{Q}[\sqrt{3}] \subseteq \mathbb{Q}[b]$ e si calcoli $[\mathbb{Q}[b] : \mathbb{Q}[\sqrt{3}]]$. È vero che $\mathbb{Q}[b]$ è un campo di riducibilità completa per f_b su $\mathbb{Q}$? (Suggerimento: si verifichi che, se $\omega^3 = 1$, allora $b\omega$ è una radice di f_b.)

9

Sia $I = X^2\mathbb{R}[X]$, ideale di $\mathbb{R}[X]$. Si verifichi che in $A = \mathbb{R}[X]/I$ esiste uno e un solo ideale proprio e non nullo e che ogni elemento di questo ideale è nilpotente.

Si verifichi che un elemento $[a + bX] \in A$ è invertibile se e solo se $a \neq 0$. Si trovino tutti gli elementi invertibili di A.

10

Sia A un anello commutativo e siano I e J ideali di A. Si definisca

$$(I : J) = \{\, a \in A : ax \in I, \text{ per ogni } x \in J \,\}.$$

Si provi che $(I : J)$ è un ideale di A.

Sia $A = \mathbb{Q}[X]$ e si decompongano $f = X^3 + X^2 - 2X - 2$ e $g = X^2 - 2X - 3$ in prodotto di fattori irriducibili. Si determini un polinomio h tale che

$$hA = (fA : gA).$$

11

Si dimostri che, se A è un dominio, allora $A[X]$ è un dominio a ideali principali se e solo se A è un campo.

12

Sia $F = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ e poniamo $f = X^2 + X + 2 \in F[X]$, $I = fF[X]$ e $K = F[X]/I$. Si dimostri che K è un campo; quanti elementi ha K? Sia $b = [X] \in K$; è vero che b è un quadrato in K?

13

Sia $f \in \mathbb{R}[X]$ un qualunque polinomio irriducibile di grado 2. Si dimostri che $\mathbb{R}[X]/f\mathbb{R}[X] \cong \mathbb{C}$. (Suggerimento: f ha una radice $u \in \mathbb{C}$; si studi $\mathbb{R}[u]$.)

14

Sia $A = \{\, f \in \mathbb{Q}[X] : f(0) \in \mathbb{Z} \,\}$. Si dimostri che A è un sottoanello di $\mathbb{Q}[X]$ che contiene l'anello degli interi e che $X \in A$.

Si verifichi che ogni primo $p \in \mathbb{N}$ è irriducibile in A.

Sia $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, $n \neq 1$, $n \neq -1$. Si provi che l'ideale principale generato da $X \in A$ è contenuto propriamente nell'ideale generato da $\frac{1}{n}X$.