Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale
Prova scritta di Matematica di Base — 12 settembre 2006

matricola .... nome .... cognome ....

Corso di laurea: Matematica Applicata ☐ Informatica ☐ Informatica Multimediale ☐

Scrivere subito nome, cognome e numero di matricola, indicando il corso di laurea. Le soluzioni vanno trascritte solo su questi fogli, negli spazi appositamente riservati. Si può anche usare il retro dei fogli, facendo chiari riferimenti.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Tot

1) Si consideri la seguente relazione sull'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi:

$$R = \{\,(a, b) \mid a, b \in \mathbf{Z},\ a + 5b \text{ è multiplo di } 6\,\}.$$

Dimostrare che R è una relazione d'equivalenza. Trovare le seguenti classi d'equivalenza: $[0]_R$ e $[6]_R$. Quante sono le classi d'equivalenza individuate da R?

2) Mostrare che $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (3, 4), (3, 6), (3, 5), (4, 5), (4, 6), \}$ è una relazione d'ordine stretto sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Determinare gli elementi massimali, minimali, eventuali massimo, minimo, maggioranti, minoranti, estremo superiore e estremo inferiore del sottoinsieme $\{2, 3, 4\}$.

3) Dimostrare per induzione la seguente formula:

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

4) Si dica, giustificando la risposta, se gli insiemi $3\mathbf{N} \cup \{\pi, \frac{1}{7}, 5\}$ e $2\mathbf{N} \setminus \{2, 6\}$ hanno la stessa cardinalità. (Nota: con $\mathbf{N}$ denotiamo l'insieme dei numeri naturali e con $3\mathbf{N}$ e $2\mathbf{N}$ l'insieme dei numeri naturali multipli di 3 e di 2, rispettivamente.)

5) Si risponda alla seguenti domande:

(1) Quando un insieme si dice numerabile?
(2) L'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è numerabile? Perché?
(3) L'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è numerabile? Perché

6) Si consideri la struttura $\mathfrak{N}$, che ha come insieme universo l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali, come relazioni l'uguaglianza e il minore, come funzioni la somma, la moltiplicazione e il successore, come costanti i numeri zero e uno. Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio adatto alla struttura i cui simboli propri siano i predicati $\mathbf{=}$, $\mathbf{<}$, i simboli per funzione $\mathbf{+}$, $\mathbf{\times}$, e s, i simboli per costante $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$.

Nel linguaggio $\mathcal{L}$ si scriva una formula $\varphi(\mathsf{v}_0, \mathsf{v}_1)$ con le sole variabili libere indicate tale che $\mathfrak{N} \models \varphi(\mathsf{v}_0, \mathsf{v}_1)[a, b]$ se e solo se il prodotto di a e b è multiplo di 4, e $a - b$ è multiplo di 3 e maggiore di 2.

7) Dire che cosa significa che una formula φ è soddisfacibile. Dire che cosa significa che una formula φ è conseguenza logica di un insieme di formule Φ. Dimostrare che, per ogni scelta delle formule γ e β,

$$\models \rightarrow \bigwedge \gamma \beta \beta$$

8) In un linguaggio in cui c'è un simbolo di relazione binaria $\mathbf{Q}$, e un simbolo di funzione unaria $\mathbf{f}$, dire quali delle seguenti successioni di simboli sono formule (F), quali termini (T) e quali nulla (N); in quest'ultimo caso scrivere nell'ultima colonna una breve giustificazione.

	F	T	N	
$\mathbf{f}\,\mathbf{f}\,\mathbf{f}\,\mathbf{v}_0\,\mathbf{v}_3$				
$\neg\,\mathbf{Q}\,\mathbf{f}\,\mathbf{f}\,\mathbf{f}\,\mathbf{v}_0\,\mathbf{v}_3$				
$\neg\,\mathbf{Q}\,\mathbf{f}\,\mathbf{v}_0\,\mathbf{f}\,\mathbf{f}\,\mathbf{v}_1\,\mathbf{Q}\,\mathbf{v}_2\,\mathbf{v}_1$				
$\bigwedge\,\mathbf{Q}\,\mathbf{v}_0\,\mathbf{f}\,\mathbf{v}_1\,\forall\mathbf{v}_0\,\mathbf{f}\,\mathbf{v}_1$				
$\bigwedge\,\mathbf{Q}\,\mathbf{f}\,\mathbf{v}_0\,\mathbf{f}\,\mathbf{v}_1\,\neg\forall\mathbf{v}_2\,\mathbf{Q}\,\mathbf{v}_1\,\mathbf{f}\,\mathbf{f}\,\mathbf{f}\,\mathbf{v}_1$				
$\mathbf{Q}\,\mathbf{Q}\,\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2\,\mathbf{v}_3$				
$\rightarrow\bigwedge\forall\mathbf{v}_3\,\mathbf{Q}\,\mathbf{f}\,\mathbf{v}_3\,\mathbf{v}_2\,\neg\,\mathbf{Q}\,\mathbf{f}\,\mathbf{f}\,\mathbf{v}_0\,\mathbf{v}_1\,\mathbf{Q}\,\mathbf{v}_0\,\mathbf{v}_1$				
$\neg\rightarrow\bigwedge\mathbf{Q}\,\mathbf{v}_0\,\mathbf{f}\,\mathbf{v}_1\,\forall\mathbf{v}_1\,\mathbf{Q}\,\mathbf{v}_1\,\mathbf{f}\,\mathbf{v}_0$				
$\bigwedge\rightarrow\neg\forall\mathbf{v}_2\,\mathbf{Q}\,\mathbf{v}_2\,\mathbf{v}_0\,\neg\,\mathbf{Q}\,\mathbf{f}\,\mathbf{v}_0\,\mathbf{v}_1\,\forall\mathbf{v}_1\,\mathbf{Q}\,\mathbf{f}\,\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2$				

9) Dato l'insieme di coppie ordinate

$$\begin{aligned} f = \{(x, x^2+1) &: x \in \mathbf{N}, x^2 - 2 < 7\} \cup \\ \cup \{(x,5) &: x \in \mathbf{N}, 1 < x \leq 3\} \cup \\ \cup \{(x, x-1) &: x \in \mathbf{N}, x \geq 4\} \cup \{(3,5),(7,6)\}, \end{aligned}$$

motivare perché f è una funzione da $\mathbf{N}$ in $\mathbf{N}$, precisando se è totale, suriettiva, iniettiva o biiettiva, giustificando le risposte.

Data poi la funzione $g = \{(1,0),(3,2),(5,1)\}$, scrivere le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$. Le funzioni $f \circ g$ e $g \circ f$ sono iniettive?

10) Sia $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0, \\ \dfrac{-x^2}{4} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Dire se f è una funzione di $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, e in caso positivo, dire se f è totale, iniettiva o suriettiva. Esiste la funzione inversa di f? In caso affermativo, trovare f^{-1}.