Università degli studi di Verona

Corsi di laurea in Matematica Applicata,

Informatica e Informatica Multimediale

# Prova scritta di Matematica di Base — 24 marzo 2006

matricola ...................... nome .......................... cognome .......................

Corso di laurea: Matematica Applicata ☐ Informatica ☐ Informatica Multimediale ☐

Scrivere subito nome, cognome e numero di matricola, indicando il corso di laurea. Le soluzioni vanno trascritte solo su questi fogli, negli spazi appositamente riservati. Si può anche usare il retro dei fogli, facendo chiari riferimenti.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Tot |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |

1) Si consideri la seguente relazione sull'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi:

$$R = \{ (a,b) \mid a,b \in \mathbf{Z}, a - 4b \text{ è multiplo di } 3 \}.$$

Dimostrare che $R$ è una relazione d'equivalenza. Trovare le seguenti classi d'equivalenza: $[0]_R$ e $[1]_R$. Quante sono le classi d'equivalenza individuate da $R$?

2) Mostrare che $R = \{(a,c),(a,d),(a,e),(a,f),(a,g),(b,d),(b,e),(b,f),(b,g),(c,d),(c,e),(c,f),$ $(c,g),(d,f),(d,g),(e,f),(e,g),(f,g)\}$ è una relazione d'ordine stretto sull'insieme $\{a,b,c,d,e,f,g\}$. Determinare gli elementi massimali, minimali, eventuali massimo, minimo, maggioranti, minoranti, estremo superiore e estremo inferiore del sottoinsieme $\{c,d,e\}$.

3) Dimostrare per induzione la seguente formula:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = \frac{2^{n+1}-1}{2^n}$$

4) Si dica, giustificando la risposta, se gli insiemi $3\mathbf{N} \cup \{\pi, \sqrt{2}\}$ e $2\mathbf{N} \setminus \{2,6\}$ hanno la stessa cardinalità. (Nota: con $\mathbf{N}$ denotiamo l'insieme dei numeri naturali e con $3\mathbf{N}$ e $2\mathbf{N}$ l'insieme dei numeri naturali multipli di 3 e di 2, rispettivamente.)

5) Si definisca quando due insiemi $A$ e $B$ hanno la stessa cardinalità.

Sia $\mathbf{N}$ l'insieme dei numeri naturali, $P(\mathbf{N})$ l'insieme delle parti di $\mathbf{N}$ e $\mathbf{R}$ l'insieme dei numeri reali. Cosa si puó dire della cardinalità di $\mathbf{N}$ e di $P(\mathbf{N})$? E della cardinalità di $\mathbf{R}$ e $P(\mathbf{N})$?

Si giustifichino le risposte.

6) Si consideri la struttura $\mathfrak{N}$, che ha come insieme universo l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali, come relazioni l'uguaglianza e il minore, come funzioni la somma, la moltiplicazione e il successore, come costanti i numeri zero e uno. Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio adatto alla struttura i cui simboli propri siano i predicati $=$, $<$, i simboli per funzione $+$, $\times$, e $\boldsymbol{s}$, i simboli per costante $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$.

Nel linguaggio $\mathcal{L}$ si scriva una formula $[\mathbf{v}_{\bigwedge} r\mathbf{h}\rightarrow](\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)$ con le sole variabili libere indicate tale che $\mathfrak{N} \models [\mathbf{v}_{\bigwedge} r\mathbf{h}\rightarrow](\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)[a, b]$ se e solo se $a - 2b$ è multiplo di 5 oppure il prodotto di $a$ e $b$ è divisibile per 3. .

7) In un linguaggio in cui c'è un simbolo di relazione binaria $P$, un simbolo di funzione binaria $g$ e un simbolo di funzione binaria $f$, dire quali delle seguenti successioni di simboli sono formule (F), quali termini (T) e quali nulla (N); in quest'ultimo caso scrivere nell'ultima colonna una breve giustificazione.

| | F | T | N | |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{f}\,\mathbf{g}\,\mathbf{f}\,\mathbf{g}\,\mathbf{v}_1\,\mathbf{f}\,\mathbf{v}_0$ | | | | |
| $\neg\rightarrow\mathbf{P}\,\mathbf{g}\,\mathbf{f}\,\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_0\,\mathbf{v}_1$ | | | | |
| $\bigwedge\mathbf{P}\,\mathbf{g}\,\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2\,\mathbf{f}\,\mathbf{P}\,\mathbf{v}_0\,\mathbf{v}_1$ | | | | |
| $\mathbf{g}\,\mathbf{f}\,\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_3$ | | | | |
| $\rightarrow\mathbf{P}\,\mathbf{f}\,\mathbf{g}\,\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_0\,\mathbf{P}\,\mathbf{g}\,\mathbf{v}_1\,\mathbf{f}\,\mathbf{v}_0$ | | | | |
| $\bigwedge\bigwedge\mathbf{P}\,\mathbf{f}\,\mathbf{v}_1\,\mathbf{g}\,\mathbf{v}_0\,\mathbf{v}_1\,\mathbf{P}\,\mathbf{g}\,\mathbf{f}\,\mathbf{v}_0\,\mathbf{f}\,\mathbf{v}_4$ | | | | |
| $\bigwedge\bigwedge\mathbf{P}\,\mathbf{f}\,\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2\,\neg\mathbf{P}\,\mathbf{g}\,\mathbf{f}\,\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2\,\forall\mathbf{v}_3\,\mathbf{P}\,\mathbf{f}\,\mathbf{v}_3\,\mathbf{v}_1$ | | | | |
| $\neg\forall\mathbf{v}_2\,\mathbf{g}\,\mathbf{v}_0\,\mathbf{v}_1$ | | | | |
| $\rightarrow\bigwedge\mathbf{P}\,\mathbf{g}\,\mathbf{v}_1\,\mathbf{f}\,\mathbf{v}_1\,\mathbf{P}\,\mathbf{g}\,\mathbf{v}_0\,\mathbf{g}\,\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2\,\mathbf{P}\,\mathbf{v}_0\,\mathbf{f}\,\mathbf{v}_1$ | | | | |

8) Dire che cosa significa che una formula $\varphi$ è valida. Dire che cosa significa che una formula $\alpha$ è conseguenza logica di una formula $\beta$. Dimostrare che, per ogni scelta delle formule $\alpha$ e $\beta$,

$$\{\alpha\} \models \rightarrow[\bigwedge]\bigwedge[\bigwedge l\mathbf{h}\bigwedge][\bigwedge]$$

9) Sia $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ e^x - 1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Dire se $f$ è una funzione di $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, e in caso positivo, dire se $f$ è totale, iniettiva o suriettiva. Esiste la funzione inversa di $f$? In caso affermativo, trovare $f^{-1}$.

10) Dato l'insieme di coppie ordinate

$$f = \{(x, -x+5) : x \in \mathbf{N}, 0 \leq x^2 - 3 < 15\} \cup$$
$$\cup \{(x, x^2 - 15) : x \in \mathbf{N}, 4 \leq x < 6\} \cup$$
$$\cup \{(x, 2x) : x \in \mathbf{N}, x \geq 5\} \cup \{(0, 7)\},$$

motivare perché $f$ ? una funzione da $\mathbf{N}$ in $\mathbf{N}$, precisando se è totale, suriettiva, iniettiva o biiettiva, giustificando le risposte.

Data poi la funzione $g = \{(1, 0), (3, 2), (5, 1)\}$, scrivere le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$. Le funzioni $f \circ g$ e $g \circ f$ sono iniettive?