Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale
Prova scritta di Matematica di Base — 19 marzo 2007

matricola .... nome .... cognome ....

Corso di laurea: Matematica Applicata ☐

Scrivere subito nome, cognome e numero di matricola, indicando il corso di laurea. Le soluzioni vanno trascritte solo su questi fogli, negli spazi appositamente riservati. Si può anche usare il retro dei fogli, facendo chiari riferimenti.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Tot

1) Si consideri la seguente relazione sull'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi

$$R = \{\, (a,b) \mid a,b \in \mathbf{Z},\ 5 \text{ divide } a-b \,\}.$$

Dimostrare che R è una relazione d'equivalenza. Trovare le seguenti classi d'equivalenza: $[6]_R$ e $[11]_R$. Quante sono le classi d'equivalenza individuate da R?

2) Mostrare che $R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),(3,6),(3,5),(3,7),(4,5),(6,7),(4,6),(4,7),(5,7),\}$ è una relazione d'ordine stretto sull'insieme $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Determinare gli elementi massimali, minimali, eventuali massimo, minimo, maggioranti, minoranti, estremo superiore e estremo inferiore del sottoinsieme $\{2,3,4\}$.

3) Dimostrare per induzione che, per $n \geq 1$, $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

4) Si risponda alle seguenti domande, motivando le risposte:

(1) Quando un insieme è numerabile?
(2) L'insieme dei numeri interi dispari è numerabile? Perché?
(3) L'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è numerabile? Perché?

4)

(1) Dare le definizione di funzione iniettiva
(2) Dimostrare che se $f\colon A \to B$ è iniettiva, allora $f \circ f^{-1} = id_{Im(f)}$

5) Si consideri la struttura $\mathfrak{N} = (\mathbf{N}, \{\equiv, \prec\}, \{\oplus, \otimes\}, \{\mathit{0}, \mathit{1}\})$, dove **N** denota l'insieme dei numeri naturali, $\equiv$ la relazione binaria di essere lo stesso numero, $\prec$, $\oplus$ e $\otimes$ rispettivamente l'ordine, l'addizione e la moltiplicazione tra numeri naturali, *0* e *1* i numeri zero e uno.

Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio adatto alla struttura i cui simboli propri siano i predicati $=, <$; i simboli per funzione $+$, $\times$ e s; i simboli per costante **0** e **1**.

Nel linguaggio $\mathcal{L}$ si scriva una formula $\varphi(v_0, v_1)$ con le sole variabili libere indicate tale che $\mathfrak{N} \models \varphi(v_0, v_1)[a, b]$ se e solo se $a - 2b$ non è multiplo di 4 e il prodotto di a e b è divisibile per 3.

6) Dire che cosa significa che una formula φ è valida. Dire cosa significa che la formula φ ? conseguenza logica di una formula β. Dimostrare che, per ogni scelta delle formule α e β,

$$\models \to \wedge \alpha\beta \vee \beta\alpha$$

7) In un linguaggio in cui c'? un simbolo di relazione binaria Q e un simbolo di funzione unaria f, dire quali delle seguenti successioni di simboli sono formule (F), quali termini (T) e quali nulla (N); in quest'ultimo caso scrivere nell'ultima colonna una breve giustificazione.

	F	T	N	
$\neg Qffv_1fv_2v_3$				
$\rightarrow \wedge Qv_0fv_1\forall v_1Qv_1v_2$				
$Qv_1v_2Qv_0v_1$				
$\wedge\forall v_0fv_1Qv_0v_1$				
$fffv_3$				
$\neg\vee\forall v_0Qv_0fv_1Qv_0v_1$				
$\wedge \rightarrow \neg\forall v_1Qv_0v_1Qfv_0fv_1\neg Qv_3fv_4$				
$\wedge fv_1fv_0$				
$\wedge\wedge\forall Qv_0fv_1\neg Qv_0v_1Qfv_1fv_2$				

8) Sia $f\colon \mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ definita da:

$$f(x)=\begin{cases} -(x-1)^2 & x\leq 1\\ \ln x & x\geq 1\end{cases}$$

Dire se f è una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ e, in caso positivo, dire se f è totale, iniettiva, suriettiva.
Esiste l'inversa di f? In caso affermativo, trovare f^{-1}.

9) Siano $f, g \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite da

$$f(x) = \ln \frac{x-1}{x} \qquad g(x) = \sqrt{e^x - 1}$$

(1) Trovare l'insieme di definizione di f e l'insieme di definizione di g.
(2) Determinare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$, specificandone gli insiemi di definizione.