

Università degli studi di Verona  
Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale  
Prova scritta di Matematica di Base — 9 ottobre 2007

matricola ..... nome ..... cognome .....

Corso di Laurea in

Scrivere subito nome, cognome e numero di matricola, indicando la sezione di corso seguita.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Tot

Compito A

- 1) Si consideri la seguente relazione sull'insieme  $\mathbf{Z}$  dei numeri interi

$$R = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbf{Z}, (x - y)(x + y) \text{ è divisibile per } 3 \}.$$

Dimostrare che  $R$  è una relazione d'equivalenza. Trovare le seguenti classi d'equivalenza:  $[0]_R$  e  $[1]_R$  e  $[3]_R$ .  
Quante sono le classi d'equivalenza individuate da  $R$ ?

2) Mostrare che  $R = \{(7,5), (7,4), (7,3), (7,2), (7,1), (6,5), (6,4), (6,3), (6,2), (6,1), (5,3), (5,2), (5,1), (4,2), (4,1), (3,2), (3,1), (2,1)\}$  è una relazione d'ordine stretto sull'insieme  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . Determinare gli elementi massimali, minimali, eventuali massimo, minimo, maggioranti, minoranti, estremo superiore e estremo inferiore del sottoinsieme  $\{3, 4, 5\}$ .

3) Dimostrare per induzione che, per  $n \geq 1$ ,  $\sum_{i=2}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1} - \frac{1}{2}$

4) Si risponda alle seguenti domande, motivando le risposte:

(1) Quando un insieme è numerabile?

(2) L'insieme  $2\mathbf{N} \cup \{\pi, \sqrt{2}, -3\}$  è numerabile? Perché?

(3) L'insieme  $\mathbf{R}$  dei numeri reali è numerabile? Perché?

(4) Gli insiemi  $\{x|x \in \mathbf{R}, 0 < x < 1\}$  e  $\{x|x \in \mathbf{R}, 0 < x < 5\}$  hanno la stessa cardinalità? Perché?

5) Si consideri la struttura  $\mathfrak{N}$  dei numeri naturali, con le usuali relazioni e funzioni e l'usuale linguaggio  $\mathcal{L}$ . Nel linguaggio  $\mathcal{L}$  si scriva una formula  $\varphi(v_0, v_1)$  con le sole variabili libere indicate tale che  $\mathfrak{N} \models \varphi(v_0, v_1)[a, b]$  se e solo se  $ab > 4$ ,  $a$  è divisibile per 3 e  $b$  non è divisibile per 5.

6) Dire che cosa significa che una formula  $\gamma$  è valida. Dire cosa significa che la formula  $\gamma$  è conseguenza logica di un insieme di formule  $\Phi$ . Dimostrare che, per ogni scelta delle formule  $\alpha$  e  $\beta$ ,

$$\{\neg\alpha\} \models \rightarrow \forall\alpha\beta\beta$$

7) Sia  $\mathfrak{N}$  la struttura dei numeri naturali e  $\mathfrak{R}$  quella dei numeri reali, con le usuali relazioni e funzioni e l'usuale linguaggio.

(1) Il seguente enunciato è vero o falso in  $\mathfrak{N}$ ? E in  $\mathfrak{R}$ ? (Motivare le risposte)

$$\forall v_0 \rightarrow < 0v_0 \exists v_1 \wedge < 0v_1 = v_0 \times v_1 v_1$$

(2) Si consideri la formula  $\varphi : \neg \exists v_2 \wedge < v_0 v_2 < v_2 v_1$  e la realizzazione  $\sigma = (\mathfrak{N}, a)$ , dove  $a : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ ,  $n \rightarrow n + 2$ . Si trovi  $\varphi^\sigma$ .

8) Sia  $\lambda \in \mathbf{R}$  e  $f_\lambda: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definita da:

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \ln(x^2) & x \leq 0 \\ \lambda x - \lambda & x \geq 0 \end{cases}$$

Dire per quali valori di  $\lambda \in \mathbf{R}$   $f_\lambda$  è una funzione da  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{R}$ . Per tali valori dire se  $f_\lambda$  è totale, iniettiva, suriettiva.

Esiste l'inversa di  $f_\lambda$ ? In caso affermativo, trovare  $f_\lambda^{-1}$ .

9) Siano  $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definite da

$$f(x) = \ln(x^2 - 4x + 3) \quad g(x) = \frac{1}{e^x}$$

- (1) Trovare l'insieme di definizione di  $f$  e l'insieme di definizione di  $g$ .
- (2) Determinare le funzioni composte  $f \circ g$  e  $g \circ f$ , specificandone gli insiemi di definizione.