

Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale
Prova scritta di Matematica di Base — 9 ottobre 2007

matricola nome cognome

Corso di Laurea in Informatica Informatica Mult. Matematica Appl.

Scrivere subito nome, cognome e numero di matricola, indicando la sezione di corso seguita.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Tot

Compito B

- 1) Si consideri la seguente relazione sull'insieme \mathbf{Z} dei numeri interi

$$R = \{ (a, b) \mid a, b \in \mathbf{Z}, (a + b)(a - b) \text{ è divisibile per } 3 \}.$$

Dimostrare che R è una relazione d'equivalenza. Trovare le seguenti classi d'equivalenza: $[0]_R$ e $[1]_R$ e $[3]_R$.
Quante sono le classi d'equivalenza individuate da R ?

2) Mostrare che $R = \{(7,5), (7,4), (7,3), (7,2), (7,1), (6,5), (6,4), (6,3), (6,2), (6,1), (5,2), (5,1), (4,3), (4,2), (4,1), (3,2), (3,1), (2,1)\}$ è una relazione d'ordine stretto sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Determinare gli elementi massimali, minimali, eventuali massimo, minimo, maggioranti, minoranti, estremo superiore e estremo inferiore del sottoinsieme $\{3, 4, 5\}$.

3) Dimostrare per induzione che, per $n \geq 1$, $\sum_{i=3}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1} - \frac{2}{3}$

4) Si risponda alle seguenti domande, motivando le risposte:

- (1) Quando un insieme è numerabile?
- (2) L'insieme $3\mathbf{N} \cup \{\pi, \sqrt{3}, -1\}$ è numerabile? Perché?
- (3) L'insieme \mathbf{R} dei numeri reali è numerabile? Perché?
- (4) Gli insiemi $\{x|x \in \mathbf{R}, 0 < x < 2\}$ e $\{x|x \in \mathbf{R}, 0 < x < 3\}$ hanno la stessa cardinalità? Perché?

5) Si consideri la struttura \mathfrak{N} dei numeri naturali, con le usuali relazioni e funzioni e l'usuale linguaggio \mathcal{L} . Nel linguaggio \mathcal{L} si scriva una formula $\varphi(v_0, v_1)$ con le sole variabili libere indicate tale che $\mathfrak{N} \models \varphi(v_0, v_1)[a, b]$ se e solo se $a + b > 3$, a è divisibile per 3 e b non è divisibile per 4.

6) Dire che cosa significa che una formula γ è valida. Dire cosa significa che la formula γ è conseguenza logica di un insieme di formule Φ . Dimostrare che, per ogni scelta delle formule ϕ e ψ ,

$$\{\neg\phi\} \models \rightarrow \forall\phi\psi\wedge\psi$$

7) Sia \mathfrak{N} la struttura dei numeri naturali e \mathfrak{R} quella dei numeri reali, con le usuali relazioni e funzioni e l'usuale linguaggio.

(1) Il seguente enunciato è vero o falso in \mathfrak{R} ? E in \mathfrak{N} ? (Motivare le risposte)

$$\forall v_1 \rightarrow < 0v_1 \exists v_2 \wedge < 0v_2 = v_1 \times v_2v_2$$

(2) Si consideri la formula $\varphi : \neg\exists v_2 \wedge < v_0v_2 < v_2v_1$ e la realizzazione $\sigma = (\mathfrak{N}, a)$, dove $a : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, $n \rightarrow n + 3$. Si trovi φ^σ .

8) Sia $\gamma \in \mathbf{R}$ e $f_\gamma: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da:

$$f_\gamma(x) = \begin{cases} \ln(x^2) & x \leq 0 \\ \gamma x - \gamma & x \geq 0 \end{cases}$$

Dire per quali valori di $\gamma \in \mathbf{R}$ f_γ è una funzione da \mathbf{R} in \mathbf{R} . Per tali valori dire se f_γ è totale, iniettiva, suriettiva. Esiste l'inversa di f_γ ? In caso affermativo, trovare f_γ^{-1} .

9) Siano $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definite da

$$f(x) = \frac{1}{e^x} \quad g(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$$

- (1) Trovare l'insieme di definizione di f e l'insieme di definizione di g .
- (2) Determinare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$, specificandone gli insiemi di definizione.