Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale
Prova scritta di Matematica di Base — 9 ottobre 2007

matricola .... nome .... cognome ....

Corso di laurea: Matematica Applicata ☐ Informatica ☐ Informatica Multimediale ☐

Scrivere subito nome, cognome e numero di matricola, indicando il corso di laurea. Le soluzioni vanno trascritte solo su questi fogli, negli spazi appositamente riservati. Si può anche usare il retro dei fogli, facendo chiari riferimenti.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Tot

Compito A

1) Si consideri la seguente relazione sull'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi

$$R = \{\,(x,y) \mid x,y \in \mathbf{Z},\ (x-y)(x+y) \text{ è divisibile per } 3\,\}.$$

Dimostrare che R è una relazione d'equivalenza. Trovare le seguenti classi d'equivalenza: $[0]_R$ e $[1]_R$ e $[3]_R$. Quante sono le classi d'equivalenza individuate da R?

Soluzione.
• **Pr. riflessiva.** Sia $x \in \mathbf{Z}$. Allora $x^2 - x^2 = 0$ che è multiplo di 3 e quindi $(x,x) \in R$.
• **Pr. Simmetrica.** Sia $(x,y) \in R$, cioè esista $m \in \mathbf{Z}$ tale che $x^2 - y^2 = 3m$. Allora $y^2 - x^2 = -(x^2 - y^2) = -(3m) = 3(-m)$ e quindi $y^2 - x^2$ è divisibile per 3, cioè per ogni $(x,y) \in R$ $(y,x) \in R$.
• **Pr. Transitiva.** Siano (x,y) e $(y,z) \in R$, esistano cioè $m,n \in \mathbf{Z}$ tali che $x^2 - y^2 = 3m$ e $y^2 - z^2 = 3n$. Ora sommiamo membro a membro le due relazioni precedenti, ottenendo $x^2 - y^2 + y^2 - z^2 = 3n + 3m$, cioè $x^2 - z^2 = 3(m+n)$ e quindi per ogni $(x,y),\ (y,z) \in R$ allora $(x,z) \in R$.

• $[0]_R = \{y \in \mathbf{Z} | -y^2$ è divisibile per $3\}$ i multipli di $3 = [3]_R$. $[1]_R = \{y \in \mathbf{Z} | \, y^2$ è divisbile per -2$\}$. Le classi sono due, la classe dei multipli di 3 e gli altri.

2) Mostrare che $R = \{(7,5),(7,4),(7,3),(7,2),(7,1),(6,5),(6,4),(6,3),(6,2),(6,1),(5,3),(5,2),(5,1),(4,2),(4,1),(3,2),(3,1),(2,1)\}$? una relazione d'ordine stretto sull'insieme $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Determinare gli elementi massimali, minimali, eventuali massimo, minimo, maggioranti, minoranti, estremo superiore e estremo inferiore del sottoinsieme $\{3,4,5\}$.

Soluzione.
La relazione R è di ordine stretto (ad esempio si disegni il grafo), infatti non ci sono elementi in relazione con se stessi (pr. antiriflessiva) e per ogni coppia (x,y) e (y,z) in R sia ha che $(x,z) \in R$ (pr. transitiva).

massimali	{3,4}		minimali	{5,4}
maggioranti	{2,1}		minoranti	{7,6}
sup	{2}		inf	{}
max	{}		min	{}

3) Dimostrare per induzione che, per $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1} - \frac{1}{2}$

Soluzione.
• **Passo base.** Sia $n = 2$, allora $\sum_{i=2}^{2} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{6}$. D'altro canto $\frac{2}{2+1} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}$.

• **Passo induttivo**. Assumiamo che per ogni $n \geq 2$ $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1} - \frac{1}{2}$. Ora $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{(n+2)} - \frac{1}{2}$.

4) Si risponda alle seguenti domande, motivando le risposte:
(1) Quando un insieme è numerabile?
(2) L'insieme $2\mathbf{N} \cup \{\pi, \sqrt{2}, -3\}$ è numerabile? Perchè?
(3) L'insieme $\mathbf{R}$ dei numeri reali è numerabile? Perché?
(4) Gli insiemi $\{x \mid x \in \mathbf{R},\ 0 < x < 1\}$ e $\{x \mid x \in \mathbf{R},\ 0 < x < 5\}$ hanno la stessa cardinalità? Perché?

Soluzione.

(1) Un insieme si dice numerabile se ha la stessa cardinalità dei naturali, cioè se esiste una biezione da tale insieme ai naturali.
(2) L'insieme è numerabile, infatti $2\mathbf{N}$, che denota l'insieme dei numeri pari è numerabile. Inoltre se ad un insieme numerabile si aggiunge (unisce) un insieme finito, l'unione è ancora numerabile e quindi $2\mathbf{N} \cup \{\pi, \sqrt{2}, -3\}$ è numerabile.
(3) I due insiemi hanno la stessa cardinalità, infatti la funzione $f(x) = 5x$ è una biezione tra i due insiemi.

5) Si consideri la struttura $\mathfrak{N}$ dei numeri naturali, con le usuali relazioni e funzioni e l'usuale linguaggio $\mathscr{L}$. Nel linguaggio $\mathscr{L}$ si scriva una formula $\varphi(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)$ con le sole variabili libere indicate tale che $\mathfrak{N} \models \varphi(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)[a, b]$ se e solo se $ab > 4$, a è divisibile per 3 e b non è divisibile per 5.

Soluzione.

$$\wedge \wedge < 4 \times v_0 v_1 \exists v_3 = v_0 \times v_3 + +111 \forall v_4 \neg = v_2 \times v_4 + + + + 11111$$

6) Dire che cosa significa che una formula γ è valida. Dire cosa significa che la formula γ ? conseguenza logica di un insieme di formule Φ. Dimostrare che, per ogni scelta delle formule α e β,

$$\{\neg \alpha\} \models \rightarrow \bigvee \alpha \beta \beta$$

Soluzione.
Per il teorema di deduzione semantica $\{\neg\alpha\} \models \rightarrow \vee\alpha\beta\beta$ se e solo se $\{\neg\alpha\} \cup \vee\alpha\beta \models \beta$. Sia σ una realizzazione che rende vere tutte le formule a primo membro della precedente scrittura, quindi si avrà $(\neg\alpha)^\sigma = V$ e $(\vee\alpha\beta)^\sigma = \vee(\alpha^\sigma, \beta^\sigma) = V$. Ora, poichè $(\neg\alpha)^\sigma = V$, $(\alpha)^\sigma = F$ e quindi, essendo $\vee(F, \beta^\sigma) = V$, deve essere $(\beta)^\sigma = V$. Da cui l'asserto.

7) Sia $\mathfrak{N}$ la struttura dei numeri naturali e $\mathfrak{R}$ quella dei numeri reali, con le usuali relazioni e funzioni e l'usuale linguaggio.
(1) Il seguente enunciato è vero o falso in $\mathfrak{N}$? E in $\mathfrak{R}$? (Motivare le risposte)

$$\forall \mathbf{v}_0 \rightarrow < \mathbf{0}\, \mathbf{v}_0 \exists \mathbf{v}_1 \bigwedge < 0 \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1$$

(2) Si consideri la formula φ: $\neg \exists \mathbf{v}_2 \bigwedge < \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_2 < \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_1$ e la realizzazione $\sigma = (\mathfrak{N}, \underline{a})$, dove $\underline{a} : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, $n \rightarrow n+2$. Si trovi φ^σ

Soluzione.

(1) L'enunciato è falso nei naturali, ad esempio 2 non è il quadrato di alcun numero naturale. L'enunciato, invece, è vero nei reali strettamente positivi, infatti ogni numero reale positivo è il di un numero reale.
(2) In primo luogo poniamo $\varphi = \neg\psi$, in cui $\psi = \exists \mathbf{v}_2 \bigwedge < \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_2 < \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_1$. Ora $\psi^\sigma = F$ poichè non esiste b nei naturali tale che $\wedge(< v_0 v_2, < v_2 v_2)^{\sigma[v_2/b]} = V$. Infatti $(v_0)^\sigma = 2$ e $(v_1)^\sigma = 3$. Da cui emerge che $\varphi^\sigma = V$.

8) Sia $\lambda \in \mathbf{R}$ e $f_\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da:

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \ln x^2 & x \leq 0 \\ \lambda - \lambda x & x \geq 0 \end{cases}$$

Dire per quali valori di $\lambda \in \mathbf{R}$ f_λ è una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$. Per tali valori dire se f_λ è totale, iniettiva, suriettiva.

Esiste l'inversa di f_λ? In caso affermativo, trovare f_λ^{-1}.

Soluzione.
Poniamo $f_{1,\lambda}(x) = \ln x^2$ e $f_{2,\lambda}(x) = \lambda - \lambda x$, quindi possiamo riscrivere

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} f_{1,\lambda}(x) & x \leq 0 \\ f_{2,\lambda}(x) & x \geq 0 \end{cases}$$

In primo luogo notiamo che $f_{1,\lambda}$ e $f_{2,\lambda}$ sono funzioni di $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$. Poi osserviamo che $Def(f_{1,\lambda}) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$e quindi in particolare la restrizione di $f_{1,\lambda}$ ai reali non positivi ha come insieme di definizione i reali strettamente negativi. Quindi f_λ è una funzione (l'univocità era da controllare solamente in $x = 0$) sempre totale e suriettiva. La surirttività è dovuta al fatto che la funzione $f_{1,\lambda}$ è suriettiva anche se ristretta ai reali strettamente negativi. Inoltre nonè mai iniettiva e ciò proprio perché $f_{1,\lambda}$ è sempre suriettiva sui reali strettamente negativi. Di conseguenza f_λ non ammette inversa.

9) Siano $f, g \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite da

$$f(x) = \ln(x^2 - 4x + 3) \qquad g(x) = \frac{1}{e^x}$$

(1) Trovare l'insieme di definizione di f e l'insieme di definizione di g.
(2) Determinare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$, specificandone gli insiemi di definizione.

Soluzione.

(1) $Def(f) = \{x \in \mathbf{R} |\, x^2 - 4x + 3 > 0\} = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.
$Def(g) = \{x \in \mathbf{R} |\, e^x \neq 0\} = \mathbf{R}$.
(2) $h(x) := (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln(e^{-2x} - 4e^{-x} + 3)$ e $Def(h) = \{x \in \mathbf{R} |\, e^{-2x} - 4e^{-x} + 3 > 0\} \cap Def(g) = (-\infty, -\ln 3) \cup (0, +\infty)$.
$k(x) := (g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{\ln \frac{1}{x^2-4x+3}}$ e $Def(k) = \{x \in \mathbf{R} |\, x^2 - 4x + 3 > 0\} \cup Def(f) = Def(f)$.