

Università degli studi di Verona

Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale

Prova scritta di Matematica di Base — 7 luglio 2008

matricola nome cognome

Corso di Laurea in

Scrivere subito nome, cognome e numero di matricola, indicando la sezione di corso seguita.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Tot

1) Si consideri la seguente relazione sull'insieme \mathbf{Z} dei numeri interi

$$R = \{ (x,y) \mid x,y \in \mathbf{Z}, x - 3y \text{ è multiplo di } 2 \}.$$

Dimostrare che R è una relazione d'equivalenza. È vero che $[1]_R = [7]_R$? È vero che $[3]_R = [8]_R$? Quante sono le classi d'equivalenza individuate da R ?

2) Mostrare che $R = \{ (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (2,3), (2,5), (2,4), (2,6), (2,7), (3,7), (4,5), (4,6), (4,7), (5,6), (5,7) \}$ è una relazione d'ordine stretto sull'insieme $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Determinare gli elementi massimali, minimali, eventuali massimo, minimo, maggioranti, minoranti, estremo superiore e estremo inferiore del sottoinsieme $\{2,3,4,5\}$.

3) Dimostrare per induzione che, per $n \geq 4$, $n! \geq 2^n$.

4) Si risponda alle seguenti domande, motivando le risposte:

- (1) Quando due insiemi hanno la stessa cardinalità?
- (2) L'insieme \mathbf{Q}_+ dei numeri razionali positivi e l'insieme \mathbf{Z}_- dei numeri interi negativi hanno la stessa cardinalità? Perché?
- (3) L'insieme $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ dei numeri reali non razionali è numerabile? Perché?
- (4) Gli insiemi $\{x \mid x \in \mathbf{R}, 0 < x < \sqrt{3} \text{ oppure } x = 3\}$ e $\{x \mid x \in \mathbf{R}, 0 < x < 4\}$ hanno la stessa cardinalità? Perché?

5) Sia \mathfrak{N} la struttura dei numeri naturali e \mathfrak{R} quella dei numeri reali, con le usuali relazioni e funzioni e l'usuale linguaggio.

(1) Il seguente enunciato

$$\forall v_0 \rightarrow < v_0 0 \exists v_1 \wedge < v_1 0 = v_0 \times \times v_1 v_1 v_1$$

è vero o falso in \mathfrak{N} ? E in \mathfrak{R} ? Motivare le risposte.

(2) Si consideri la formula $\varphi : \neg \exists v_2 \wedge < v_0 v_2 < v_2 v_1$ e la realizzazione $\sigma = (\mathfrak{N}, \underline{a})$, dove $\underline{a} : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, $n \rightarrow n + 2$. Si calcoli esplicitamente (passaggio per passaggio) φ^σ .

6) Dire che cosa significa che una formula α è soddisfacibile. Dire cosa significa che la formula α è conseguenza logica dell'insieme di formule $\{\beta, \gamma\}$. Dimostrare che, per ogni scelta delle formule α e β ,

$$\{\alpha \vee \beta\} \models \rightarrow \neg\alpha\beta$$

7) Si consideri la struttura $\mathfrak{N} = (\mathbf{N}, \{\equiv, <\}, \{\oplus, \otimes\}, \{0, 1\})$, dove \mathbf{N} denota l'insieme dei numeri naturali, \equiv la relazione binaria di essere lo stesso numero, $<$, \oplus e \otimes rispettivamente l'ordine, l'addizione e la moltiplicazione tra numeri naturali, 0 e 1 i numeri zero e uno.

Sia \mathcal{L} un linguaggio adatto alla struttura i cui simboli propri siano i predicati $=, <$; i simboli per funzione $+, \times$ e s ; i simboli per costante $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$.

Nel linguaggio \mathcal{L} si scriva una formula $\varphi(v_0, v_1)$ con le sole variabili libere indicate tale che $\mathfrak{N} \models \varphi(v_0, v_1)[a, b]$ se e solo se $a - b$ è un numero dispari non divisibile per 3.

8) Per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$, sia $f_\lambda: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da:

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda x^2 + \lambda^2 - 1 & x \leq 0 \\ \ln(x+1) & x \geq 0 \end{cases}$$

Per quali valori di λ f_λ è una funzione da \mathbf{R} in \mathbf{R} ? Per quali valori di λ f_λ è una funzione da \mathbf{R} in \mathbf{R} f_λ totale, iniettiva, suriettiva? Per quali valori di λ esiste l'inversa di f_λ ? Per tali valori, trovare f_λ^{-1} .

9) Siano $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definite da

$$f(x) = \sqrt{e^x - 1} \quad g(x) = 2\ln(x)$$

- (1) Trovare l'insieme di definizione di f e l'insieme di definizione di g .
- (2) Determinare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$, specificandone gli insiemi di definizione.