Diario del corso di Analisi Matematica 2

Modulo Avanzato

a.a. 2008-09

Vengono qui di seguito elencati gli argomenti trattati a lezione. Il diario servirà anche per definire il programma d'esame.

Lezione del 26/1/09 (1 ora). Introduzione al corso. Serie di potenze. Proprietà di convergenza delle serie di potenze. Intervallo di convergenza, raggio di convergenza.

Lezione del 27/1/09 (2 ore). Convergenza uniforme delle serie di potenze e conseguenze: le serie di potenze definiscono, nel loro intervallo di convergenza, una funzione C^∞, che si puìntegrare e derivare termine a termine. Lo spazio delle serie di potenze, altrimenti dette **funzioni analitiche** convergenti nell'intervallo $(-R, R)$ si indica con $C^\omega(-R, R)$. Esempio di una funzione C^∞ che non è analitica. Esponenziale complesso e formule di Eulero. Serie di potenze ed equazioni differenziali. Esempio dell'equazione di Bessel. Serie di potenze complesse. Il teorema fondamentale dell'analisi complessa: una funzione derivabile in senso complesso è analitica.

Lezione del 28/1/09 (2 ore). Richiami sulle serie di Fourier: interpretazione dello sviluppo in serie di Fourier di una funzione $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ come decomposizione ortogonale di f rispetto al sistema $\{1, \quad \cos mx\,, \quad \sin mx\,\}_{m\in\mathbb{N}}$, rispetto al prodotto scalare L^2.
Definizione del prodotto scalare L^2: per $g, h : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ continue a tratti, si pone

$$\langle g\,,\, h\,\rangle_{L^2([-\pi.\pi])} = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)h(x)dx\,.$$

Si tratta effettivamente di una forma bilineare simmetrica, definita positiva.
(NB: quando si identifichino le funzioni che differiscono su insiemi trascurabili rispetto all'operazione di integrazione, ovvero i cosiddetti insiemi di misura nulla). Il prodotto scalare L^2 induce la norma L^2 (o della media quadratica):

$$||g||_{L^2([-\pi.\pi])} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} [g(x)]^2 dx\right)^{1/2}\,.$$

Richiamo sulla formula di decomposizione di un vettore rispetto ad una base ortogonale di uno spazio euclideo (finito-dimensionale). Detta $\{\epsilon_1, ..., \epsilon_N\}$ una base ortogonale dello spazio euclideo V, e $v \in V$, si ha

$$v = \sum_{i=1}^{N} \frac{\langle v,\, \epsilon_i \rangle}{\langle \epsilon_i,\, \epsilon_i \rangle} \epsilon_i \,.$$

Per come sono definiti i coefficienti di Fourier, la somma parziale N-esima della serie di Fourier di f rappresenta la proiezione ortogonale (rispetto al prodotto scalare L^2) di f sullo spazio P_N dei polinomi trigonometrici di grado N, ossia la migliore approssimazione in norma quadratica di f mediante elementi di P_N. Alcune conseguenze: diseguaglianza di Bessel, lemma di Riemann-Lebesgue. Teorema di convergenza in media quadratica delle serie di Fourier, identità di Bessel-Parseval.

Lezione del 2/2/09 (1 ora). Serie di Fourier per funzioni 2π-periodiche, continue a tratti, regolarizzate, regolari a tratti. Proprietà di convergenza delle serie di Fourier di una funzione regolare a tratti: nei punti di discontinuità di f la serie converge alla media dei limiti destro e sinistro, mentre negli intervalli dove la funzione f è continua la serie di Fourier converge uniformemente ad f. Fenomeno di Gibbs attorno ai punti di discontinuità di f. Dimostrazione della convergenza uniforme delle serie di Fourier nel caso di una funzione continua con derivata continua a tratti.

Lezione del 3/2/09 (2 ore). Applicazione delle serie di Fourier per la risoluzione di equazioni a derivate parziali. Caso dell'equazione di Laplace: il problema di Dirichlet nel cerchio. Rappresentazione in serie della soluzione, regolarità, proprietà della media.

Lezione del 4/2/09 (2 ore). Metodo di separazione di variabili per la risoluzione dell'equazione del calore su un segmento. Rappresentazione in serie della soluzione, proprietà di regolarizzazione istantanea dell'equazione del calore. Equazione della corda vibrante a estremi fissi.

Lezione del 9/2/09 (1 ora). Risoluzione dell'equazione della corda vibrante a estremi fissi mediante separazione di variabili. Discussione sulla regolarità dei dati iniziali.

Lezione del 10/2/09 (2 ore). Trasformata di Fourier. Definizione e prime proprietà.

Lezione dell' 11/2/09 (2 ore). Proprietà della trasformata di Fourier, applicazione alla risoluzione dell'equazione del calore. Si vedano le dispense allegate.

Lezione del 16/2/09 (1 ora). Sistemi di equazioni differenziali lineari. Esponenziale di matrice. Rappresentazione canonica della soluzione generale di un sistema lineare. Wronskiano.

Lezione del 17/2/09 (2 ore). Discussione qualitativa nel piano delle fasi dei sistemi lineari omogenei (caso a coefficienti costanti), e sulla stabilità dei punti di equilibrio:

nodi, nodi impropri, punti a stella, fuochi. Ruolo del segno della parte reale degli autovalori. Sistemi conservativi: l'esempio dell'oscillatore armonico.

Lezione del 18/2/09 (2 ore). Il Teorema di Linearizzazione per sistemi differenziali. Applicazione allo studio degli equilibri e allo studio qualitativo delle orbite di un sistema nonlineare autonomo nel piano delle fasi. Esercizi sui sistemi lineari non omogenei a coefficienti costanti.

Lezione del 23/2/09 (1 ora). Campi scalari e campi vettoriali. Esempi: densità di massa, pressione, temperatura (campi scalari), velocità di rotazione attorno ad un asse, campo gravitazionale/elettrostatico (campi vettoriali). Versori in coordinate polari. Gradienti e potenziali, superfici equipotenziali, linee di flusso. L'algoritmo di discesa gradiente (o flusso gradiente) per la determinazione dei minimi locali di una funzione di più variabili.

Lezione del 24/2/09 (2 ore). Integrali curvilinei di campi scalari (o di prima specie). definizione tramite parametrizzazione della curva. Proprietà: additività rispetto all'intervallo di integrazione, linearità, indipendenza dalla parametrizzazione della curva. Formula per la lunghezza di una curva. Esercizi.

Lezione del 2/3/09 (1 ora). Parametrizzazioni regolari, curve semplici, curve chiuse. Formule per il cambiamento di variabili negli integrali curvilinei di campi scalari, e regola di trasformazione dei vettori tangenti a curve parametrizzate via differenziale (matrice Jacobiana) della trasformazione di coordinate. Differenziale delle trasformazioni in coordinate polari, cilindriche, sferiche.

Lezione del 3/3/09 (2 ore). Integrali curvilinei di seconda specie. Proprietà di linearità, additività, dipendenza dall'orientazione del cammino. Significato fisico: lavoro di un campo di vettori lungo una curva. Campi conservativi: il lavoro è indipendente dal cammino che collega due punti dati, ovvero vale la condizione di circuitazione (integrale lungo cammini chiusi) nulla. Conservatività dei campi vettoriali che sono gradienti di una funzione (potenziale) scalare. Vale anche il viceversa: se un campo è conservativo, allora è un gradiente. Condizione necessaria dell' uguaglianza delle derivate incrociate (ovvero, in $\mathbb{R}^3$, condizione di rotore nullo, $\nabla \times F = 0$) affinchè un campo vettoriale sia il gradiente di un campo scalare (in altre parole: $F = \nabla\varphi \Rightarrow \nabla \times F = 0$.

Lezione del 4/3/09 (2 ore). La condizione $\nabla \times F = 0$ non è sufficiente: l'esempio canonico nel piano è dato dal "gradiente" della funzione angolare $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$ su una corona circolare centrata nell'origine (o su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Teorema di Gauss-Green nel piano. Domini semplicemente connessi. In tali domini la condizione $\operatorname{rot} F = 0$ è equivalente alla condizione di circuitazione nulla per F. Equivalentemente, in domini semplicemente connessi $\nabla \times F = 0 \Leftrightarrow F = \nabla\varphi$.

Applicazioni della formula di Gauss-Green: calcolo di aree di figure piane mediante integrazione sul loro contorno, calcolo di circuitazioni mediante integrali doppi.

Lezione del 9/3/09 (1 ora). Dimostrazione della formula di Gauss-Green nel caso di un dominio semplice rispetto agli assi coordinati. Scrittura della formula in forma invariante per trasformazioni ortogonali: $\oint_{\partial D} F \cdot \tau \, ds = \int_D \nabla \times F \cdot n \, d\sigma$, ed estensione a superfici poliedrali in $\mathbb{R}^3$. Per passaggio al limite si ottiene il **Teorema di Stokes**: la formula precedente (circuitazione sul bordo uguale flusso del rotore) vale anche per una superficie regolare fino al bordo in $\mathbb{R}^3$, orientata mediante la scelta di un campo di vettori normali unitari, e con bordo orientato da un campo di vettori tangenti unitari secondo la regola della mano destra.

Lezione del 10/3/09 (2 ore). Cambio di variabile negli integrali curvilinei. Esercizio: calcolo di area di una figura piana in coordinate polari sfruttando il teorema di Gauss-Green. Formalismo delle forme differenziali per gli integrali curvilinei (vedi dispense schematiche).

Lezione del 16/3/09 (1 ora). Richiami sul Teorema della Funzione Implicita e Inversa. Campi vettoriali e campi scalari, operazioni algebriche tra campi, cambiamenti di coordinate, pull-back e push-forward. Definizione di gradiente, divergenza, rotore.

Lezione del 18/3/09 (2 ore). Interpretazione fisica di gradiente, divergenza e rotore. Coordinate curvilinee, coordinate curvilinee ortogonali, espressione di gradiente e divergenza in coordinate polari piane, sferiche e cilindiche, espressione del rotore in coordinate sferiche e cilindriche. Superfici parametriche, parametriche cartesiane e definite implicitamente, spazio tangente e definizione di normale.