Esercizio 2 (appello del 8/9/2009)

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, dove $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si verifichi che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{C}^3$. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tale che $f(v_1) = v_2$, $f(v_2) = v_3$, $f(v_3) = v_2 + v_3$.

1. Si trovi la matrice B associata a f rispetto alla base canonica sul dominio e sul codominio.

2. Il vettore $w = v_1 + v_3$ appartiene all'immagine di f? Se si, si trovi un vettore $v \in \mathbb{C}^3$ tale che $f(v) = w$.

Soluzione:

Innanzitutto ricordiamo: la matrice B associata a f rispetto a una certa base $\mathcal{B}_1$ sul dominio e una certa base $\mathcal{B}_2$ sul codominio si trova esprimendo le immagini dei vettori della base $\mathcal{B}_1$ come combinazioni lineari dei vettori della base $\mathcal{B}_2$ e mettendo nelle varie colonne i coefficienti così ottenuti (nella prima colonna i coefficienti del primo vettore di $\mathcal{B}_1$ e così via).

Nel caso specifico conveniva calcolare prima la matrice A associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$ che si trova facilmente mettendo nella prima colonna i coefficienti di $f(v_1)$ rispetto a $\mathcal{B}$, quindi $0, 1, 0$, nella seconda colonna i coefficienti di $f(v_2)$ rispetto a $\mathcal{B}$, quindi $0, 0, 1$ e nella terza colonna i coefficienti di $f(v_3)$ rispetto a $\mathcal{B}_1$, quindi $0, 1, 1$. Sulla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

così ottenuta va adesso applicato il cambio di base:

$$B = M\, A\, M^{-1}$$

dove M è la matrice del cambio di base da $\mathcal{B}$ alla base canonica, quindi la matrice le cui colonne contengono i coefficienti ottenuti esprimendo i vettori di $\mathcal{B}$ come combinazioni lineari della base canonica, in altre parole: le colonne di M sono i tre vettori v_1, v_2, v_3. Resta quindi da calcolare la matrice inversa M^{-1} e moltiplicare le tre matrici. Si ottiene

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

C'è anche un modo semplice di controllare il risultato: se si calcola $B\, v_i$, il risultato dev'essere $f(v_i)$ per ogni i.

(Nota: Se invece f fosse stata data attraverso le immagini $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ della base canonica, la matrice associata a f rispetto alla base canonica su dominio e codominio si sarebbe determinata subito prendendo come colonne i tre vettori $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$.)

Per la domanda "Il vettore $w = v_1 + v_3$ appartiene all'immagine di f? " si considera il sistema lineare $Bx = w$. Infatti le colonne di B generano l'immagine di f, quindi decidere se un vettore appartiene all'immagine equivale a decidere se lo si può scrivere come combinazione lineare delle colonne di B, ovvero se il sistema ha soluzione. Si considera quindi la matrice completa $(B \mid w)$ e si applica il Teorema di Rouché - Capelli.
In questo caso c'era anche un modo più semplice di rispondere: l'immagine di f è anche generata dai vettori $f(v_1) = v_2$, $f(v_2) = v_3$, $f(v_3) = v_2 + v_3$, quindi si trattava di dire se $w = v_1 + v_3 \in < v_2, v_3 >$, e la risposta è sicuramente no, perché altrimenti v_1 sarebbe combinazione lineare di v_2, v_3 e $\mathcal{B}$ non sarebbe una base.

Esercizi simili: vedi Foglio 6, Esercizio n. 18,
oppure Esercizi addizionali, n. 44 .