Forme differenziali in $\mathbb{R}^3$...

...ed in $\mathbb{R}^n$, in estrema sintesi!

Ogni applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ può essere scritta in modo unico come $L = L_1 dx^1 + L_2 dx^2 + L_3 dx^3$, dove la base canonica $\{dx^i\}$, $i = 1, 2, 3$, è costituita dalle proiezioni ortogonali $x \mapsto x^i$, per $x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ (ovvero dai rispettivi differenziali, dato che coincidono!).

In quanto segue A designa un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^3$.

Definizione 1 *Una 1-forma differenziale Ω di classe $\mathbf{C}^\infty$ su A è un'applicazione $P \mapsto \Omega(P) = \Omega_1(P)dx^1 + \Omega_2(P)dx^2 + \Omega_3(P)dx^3$ definita per $P \in A$ e con i coefficienti $\Omega_i : A \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$ di classe $\mathbf{C}^\infty$.*

Un esempio familiare di 1-forma è la mappa

$$P \mapsto df(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(P)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(P)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(P)dz,$$

che associa ad ogni punto $P \in A$ il differenziale in P di una funzione regolare $f : A \to \mathbb{R}$.

Ad ogni 1-forma $\Omega = \Omega_1 dx^1 + \Omega_2 dx^2 + \Omega_3 dx^3$ su A è associato in modo biunivoco il campo di vettori $\hat{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ su A.

È definito un prodotto esterno $\wedge$ (wedge) associativo ed anticommutativo sugli elementi dx^i che si estende per linearità alle applicazioni lineari. Valgono in particolare le relazioni $dx^i \wedge dx^i = 0$ per $i = 1, 2, 3$, e $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$ se $i \neq j$.

Siano $L, M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ applicazioni lineari. Allora vale

$$\begin{aligned} L \wedge M &= (L_1 dx^1 + L_2 dx^2 + L_3 dx^3) \wedge (M_1 dx^1 + M_2 dx^2 + M_3 dx^3) \\ &= (L_1 M_2 - L_2 M_1) dx^1 \wedge dx^2 + (L_1 M_3 - L_3 M_1) dx^1 \wedge dx^3 + \\ &+ (L_2 M_3 - L_3 M_2) dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned}$$

In altri termini,

$$L \wedge M = \begin{vmatrix} L_1 & M_1 \\ L_2 & M_2 \end{vmatrix} dx^1 \wedge dx^2 + \begin{vmatrix} L_1 & M_1 \\ L_3 & M_3 \end{vmatrix} dx^1 \wedge dx^3 + \begin{vmatrix} L_2 & M_2 \\ L_3 & M_3 \end{vmatrix} dx^2 \wedge dx^3.$$

Un elemento F dello spazio vettoriale generato da $dx^1 \wedge dx^2$, $dx^2 \wedge dx^3$, $dx^1 \wedge dx^3$ si scriverà in modo unico come $F = F_3 dx^1 \wedge dx^2 - F_2 dx^1 \wedge dx^3 + F_1 dx^2 \wedge dx^3$.

Definizione 2 *Una 2-forma di classe $\mathbf{C}^\infty$ su A è un'applicazione $P \mapsto F(P) = F_3(P)dx^1 \wedge dx^2 - F_2(P)dx^1 \wedge dx^3 + F_1(P)dx^2 \wedge dx^3$ per $P \in A$ e con i coefficienti $F_i : A \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, di classe $\mathbf{C}^\infty$.*

Anche ad ogni 2-forma F è associato in modo biunivoco il campo di vettori $\hat{F} = (F_1, F_2, F_3)$. *NB: questa è una peculiarità di* $\mathbb{R}^3$ *!!*

Per completare la "tavola pitagorica" del prodotto esterno, non mancano all'appello che le relazioni

$$\begin{aligned} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 &= -dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^2 = -dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^3 = \\ = dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 &= \quad dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 = -dx^3 \wedge dx^2 \wedge dx^1, \end{aligned}$$

dato che associatività e anticommutatività di $\wedge$ rendono nullo ogni altro immaginabile prodotto tra dx^1, dx^2 e dx^3.

Se $L, M, N : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sono applicazioni lineari, effettuando un po' di calcoli si scopre che

$$L \wedge M \wedge N = \begin{vmatrix} L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \\ L_3 & M_3 & N_3 \end{vmatrix} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Definizione 3 *Una* 3*-forma differenziale* g *di classe* $\mathbf{C}^\infty$ *su* A *è un'applicazione* $P \mapsto g(P) = \hat{g}(P) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$*, con* $P \in A$ *e* $\hat{g} : A \to \mathbb{R}$ *di classe* $\mathbf{C}^\infty$*.*

Ovviamente le 3-forme vengono identificate alle funzioni reali.

In modo del tutto analogo a quanto visto si possono definire in tutta generalità le k-forme differenziali in $\mathbb{R}^n$.

Le proprietà del prodotto $\wedge$ fanno sì che le forme differenziali siano gli integrandi "naturali" su curve, superfici e volumi di $\mathbb{R}^3$ o più in generale su superfici k-dimensionali in $\mathbb{R}^n$, quando si vuol tener conto dell'orientazione di queste.

In quanto segue ci si può limitare a immaginare i casi $n = 3$ e $k = 1, 2, 3$, sebbene le definizioni abbiano carattere generale.

Sia $\psi : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $\psi(u^1, \ldots, u^k) = (x^1(u^1, \ldots, u^k), \ldots, x^n(u^1, \ldots, u^k))$ di classe $\mathbf{C}^\infty$, con D un dominio regolare in $\mathbb{R}^k$ (ad esempio un k-rettangolo).

Sia Ω una k-forma in $\mathbb{R}^n$. Per quanto sopra definito, Ω avrà dei coefficienti $\Omega_j(x^1, \ldots, x^n)$ a fattore di certi prodotti wedge dei dx^i.

Utilizzando la mappa ψ costruiamo una k-forma su D operando le seguenti sostituzioni su Ω:

1. $\Omega_j(x^1 \ldots, x^n) \longrightarrow \Omega_j(x^1(u^1, \ldots, u^k) \ldots, x^n(u^1, \ldots, u^k))$;
2. $dx^i \longrightarrow dx^i(u^1, \ldots, u^k) = \dfrac{\partial x^i}{\partial u^1} du^1 + \ldots + \dfrac{\partial x^i}{\partial u^k} du^k$.

Distribuendo il prodotto wedge sui vari addendi si otterrà una forma del tipo $\alpha(u^1, \ldots, u^k) du^1 \wedge \ldots \wedge du^k$, che si indica di solito con $\psi^* \Omega$, e che viene detta forma *pull-back* di Ω tramite ψ.

Ci interesseremo qui al caso in cui ψ sia iniettiva tranne al più sul bordo ∂D, e $D\psi$ abbia rango massimo tranne al più su ∂D, poiché in tal caso ψ parametrizza un pezzo di (o tutta quanta) una k-superficie regolare.

L'integrale (orientato) di una n-forma $\Omega = g(x^1, \ldots, x^n) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ su un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ viene definito mediante l'integrale multiplo

$$\int_D g(x^1,\dots,x^n)dx^1\wedge\dots\wedge dx^n := \int_D g(x^1,\dots,x^n)dx^1dx^2\dots dx^n.$$

Siamo finalmente in grado di dare la seguente

Definizione 4 *Date S una k-superficie regolare in $\mathbb{R}^n$ ed Ω una k-forma in $\mathbb{R}^n$, si pone*

$$\int_S \Omega := \int_D \psi^*\Omega,$$

dove $\psi : D \to S$ è una parametrizzazione regolare di S.

Si tratta di una buona definizione di integrale orientato su S, in quanto *non dipende* dalla parametrizzazione ψ, tranne che per l'orientazione di S indotta dalla parametrizzazione stessa (la verifica di ciò è un esercizio istruttivo sul calcolo del differenziale di applicazioni composte e sulla formula di cambiamento di variabili negli integrali multipli).

In $\mathbb{R}^3$, grazie all'identificazione tra forme differenziali e campi di vettori si recuperano in tal modo le nozioni di integrale curvilineo e di superficie (facile ed utile esercizio!).

Introduciamo ora sulle forme differenziali un operatore d, detto *differenziale esterno*, che generalizza la nozione abituale di differenziale di una funzione.

Per semplicità di notazione considereremo solo i casi $n=3$, $k=1,2,3$. Data una k-forma Ω su A si definisce la $(k+1)$-forma $d\Omega$ su A, detta *differenziale esterno* di Ω, nel modo seguente: per $k=1$,

$$\begin{aligned} d\Omega &= d\Omega_1\wedge dx^1 + d\Omega_2\wedge dx^2 + d\Omega_3\wedge dx^3 = (\frac{\partial\Omega_2}{\partial x^1} - \frac{\partial\Omega_1}{\partial x^2})dx^1\wedge dx^2 + \\ &+ (\frac{\partial\Omega_3}{\partial x^1} - \frac{\partial\Omega_1}{\partial x^3})dx^1\wedge dx^3 + (\frac{\partial\Omega_3}{\partial x^2} - \frac{\partial\Omega_2}{\partial x^3})dx^2\wedge dx^3; \end{aligned}$$

mentre nel caso $k=2$,

$$\begin{aligned} d\Omega &= d\Omega_3\wedge dx^1\wedge dx^2 - d\Omega_2\wedge dx^1\wedge dx^3 + d\Omega_1\wedge dx^2\wedge dx^3 \\ &= (\frac{\partial\Omega_1}{\partial x^1} + \frac{\partial\Omega_2}{\partial x^2} + \frac{\partial\Omega_3}{\partial x^3})dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3. \end{aligned}$$

Per $k=3$, posto $\Omega = g(x^1,x^2,x^3)dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$, si verifica che $d\Omega = dg\wedge dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3 = 0$ (perchè?).

Si recuperano in tal modo in $\mathbb{R}^3$ le nozioni di divergenza e rotore di un campo vettoriale: se alla k-forma differenziale Ω associamo il campo vettoriale $\hat\Omega$, alla forma $d\Omega$ si associa, per $k=1$, $\widehat{d\Omega} = \nabla\times\hat\Omega = \mathrm{rot}\hat\Omega$, mentre se $k=2$ vale $\widehat{d\Omega} = \nabla\cdot\hat\Omega = \mathrm{div}\hat\Omega$.

Definizione 5 *Sia Ψ una k-forma differenziale in $\mathbb{R}^n$. La $(k+1)$-forma $\Omega = d\Psi$ si dice* esatta.

NOTA: la definizione precedente ha significato anche nel caso $k=0$ se consideriamo come 0-forme le funzioni di classe $\mathbf{C}^\infty$ (e in tal caso d è il differenziale abituale della funzione in questione).

In tal caso si ha che $\Omega = df \iff \hat{\Omega} = \nabla f$, ossia una 1-forma Ω è esatta se e solo se il campo di vettori $\hat{\Omega}$ è un gradiente.

A quale categoria di campi di vettori saranno associate le 2-forme esatte?

Che proprietà hanno le funzioni associate alle 3-forme esatte?

Definizione 6 *Sia Ω una k-forma differenziale in $\mathbb{R}^n$. Se vale $d\Omega = 0$, allora Ω si dice* chiusa.

In $\mathbb{R}^3$ si avrà in particolare che una 1-forma Ω è chiusa se e solo se il campo di vettori $\hat{\Omega}$ è irrotazionale, mentre una 2-forma Ω sarà chiusa se e solo se il campo di vettori $\hat{\Omega}$ è solenoidale.

Il teorema di Schwartz sull'uguaglianza delle derivate parziali miste di una funzione regolare permette di dedurre che $d(d\Omega) = 0$ qualunque sia la forma Ω, ovvero una forma esatta è necessariamente chiusa (in $\mathbb{R}^3$ ciò è coerente con il fatto che un gradiente sia irrotazionale ed un rotore abbia divergenza nulla).

Per quanto riguarda l'implicazione inversa, vale il seguente

Teorema 1 (Lemma di Poincaré) *Sia Ω una k-forma differenziale chiusa definita su un aperto convesso di $\mathbb{R}^n$. Allora Ω è esatta.*

NOTA: la convessità del dominio non è l'ipotesi ottimale, ha però il pregio di rendere vero il risultato enunciato $\forall k, n$.

Va rimarcato in margine al lemma di Poincarè il fatto notevole che l'ostruzione riguardo all'esattezza di una forma chiusa dipenda esclusivamente dalla geometria del dominio su cui è definita: in altre parole l'esistenza su di un dato insieme di forme chiuse che non sono esatte dà una certa misura della complessità geometrica dell'insieme (ad esempio, la presenza di buchi).

Concludiamo questo breve periplo tra le forme differenziali con la versione generale del teorema di Stokes, che include i teoremi di Gauß-Green nel piano, della divergenza e di Stokes in $\mathbb{R}^3$ come casi particolari.

Data una superficie S orientata da una parametrizzazione $\psi : D \to S$ che sia $1-1$ e con $D\psi$ di rango massimo anche sul bordo ∂D, il bordo ∂S verrà orientato in modo naturale dalla mappa $\psi|_{\partial D} : \partial D \to \partial S$, ossia dalla restrizione di ψ al bordo ∂D. Vale il seguente

Teorema 2 (Teorema di Stokes) *Siano S una k-superficie regolare, Ω una $(k-1)$-forma in $\mathbb{R}^n$. Allora*

$$\int_{\partial S} \Omega = \int_S d\Omega,$$

dove S e ∂S si intendono orientate da una medesima, arbitraria parametrizzazione regolare ψ.

Rapido sketch della dimostrazione: considerata una qualunque parametrizzazione regolare fino al bordo $\psi : D \to S$, si ha da una parte $\int_{\partial S} \Omega = \int_{\partial D} \psi^* \Omega$, dall'altra $\int_S d\Omega = \int_D \psi^* d\Omega$.

Si verifica facilmente che in generale vale $\psi^* d\Omega = d\psi^* \Omega$. Resta pertanto da dimostrare il teorema per una k-forma sul dominio D, che possiamo supporre senza perdita di generalità trattarsi di un k-rettangolo di $\mathbb{R}^k$. Ma a questo punto l'unico ingrediente da usare ripetutamente è il Teorema fondamentale del Calcolo per funzioni reali di una variabile reale...