

# Esercitzazione di Analisi Matematica I

Stefano Zambon

10 Febbraio 2008

- Determinare le seguenti primitive:

1.  $\int 3x^2 - x^5 + \frac{4}{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

2.  $\int \arcsin x dx$

3.  $\int x^2 e^x dx$

4.  $\int x^2 \sin x \cos x dx$

5.  $\int \cos(\log x) dx$

6.  $\int e^x \cos 2x dx$

7.  $\int x \sin^2 x dx$

8.  $\int \cos^2 x dx$

9.  $\int \sin^3 x dx$

- Prendendo spunto dagli ultimi due esercizi del punto precedente, dimostrare la seguente formula ricorsiva:

$$\int \cos^n x dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

- Calcolare le seguenti primitive ricorrendo ad opportune sostituzioni:

1.  $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$

2.  $\int \frac{x \log \sqrt{1+x^2}}{1+x^2} dx$

3.  $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} dx$

4.  $\int \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}} dx$

5.  $\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}} dx$

6.  $\int \frac{\tan x}{\cos^3 x} e^{\frac{1}{\cos x}} dx$

$$7. \int \frac{1}{\cos x} dx$$

- Calcolare le seguenti primitive di funzioni razionali:

$$1. \int \frac{1}{x(x-3)} dx$$

$$2. \int \frac{x^4}{x^2(x^2-1)} dx$$

$$3. \int \frac{4x+1}{2x^2+x+1} dx$$

$$4. \int \frac{4x+1}{x^2+x+1} dx$$

$$5. \int \frac{x^3-2x+3}{x^3(x-1)} dx$$

$$6. \int \frac{x^2+1}{x^3-4x^2+5x-2} dx$$

$$7. \int \frac{1}{x^3+1} dx$$

$$8. \int \frac{1}{x^2(1+x^2)^2} dx$$

- Calcolare le seguenti primitive riconducendole a funzioni razionali tramite un'opportuna sostituzione:

$$1. \int \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}-1} dx$$

$$2. \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} dx$$

$$3. \int \frac{1}{4\sin x + \cos x + 1} dx$$

$$4. \int \frac{\sin x \cos x}{2 - \sin^2 x} dx$$

- Calcolare le seguenti primitive utilizzando la sostituzione suggerita a lato:

$$1. \int \sqrt{4-x^2} dx \quad (x = 2 \cos t, \text{ oppure per parti})$$

$$2. \int \sqrt{9+x^2} dx \quad (\sqrt{9+x} = y - x, \text{ oppure } x = 3 \sinh t)$$

$$3. \int \sqrt{x^2-1} dx \quad (x = \cosh t)$$

- Calcolare i seguenti integrali:

$$1. \int_0^1 x^2 \arctan x dx$$

$$2. \int_1^e \frac{\sqrt{|1 - \log^2 x|}}{x} dx$$

$$3. \int_0^{\pi/2} \sin x \cos x e^{\sin x} dx$$

4.  $\int_0^2 x \sqrt{|x-1|} dx$
5.  $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\tan x} + 1}{(1 + 3 \tan x) \cos^2 x} dx$
6.  $\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$
7.  $\int_{\log 3}^{\log 4} \frac{e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2} dx$
8.  $\int_{-\pi}^0 \left| \frac{\pi}{2} + x \right| \cos^2 x dx$

- Dedurre il valore dei seguenti integrali senza ricorrere al calcolo di primitive:

1.  $\int_{-1}^1 \sin(x^5 - 3x^3 + x) dx$
2.  $\int_{-\pi}^{\pi} x \cos x dx$
3.  $\int_{-1}^5 1 + (x-2)^3 dx$

- Calcolare l'area della regione di piano compresa tra il cerchio avente centro nell'origine e raggio  $r = 2$  e il semipiano  $x \geq 1$ .

- Calcolare l'area della regione di piano  $D = A \cap B \cap C$ , dove

$$\begin{aligned}
 A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x|x|\}, \\
 B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 1\}, \\
 C &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \frac{x-1}{2} \right\}
 \end{aligned}$$

- Usando la formula di Taylor con resto di Lagrange, calcolare un'approssimazione di

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \text{ a meno di } 10^{-2}.$$