Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 25 settembre 2008

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Domande iniziali

☐ (1) Sia $\mathbf{A}$ una matrice 3×3 con $\det A \neq 0$. Si dica se 0 è un autovalore di $\mathbf{A}$.

☐ (2) Esistono applicazioni lineari biiettive $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$?

☐ (3) Sia $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ un insieme linearmente indipendente nello spazio vettoriale V. Esiste uno scalare α in modo che l'insieme $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \alpha\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\}$ sia linearmente indipendente?

T1) Data la definizione di molteplicità algebrica m e geometrica d per l'autovalore λ della matrice quadrata $\mathbf{A}$, si dimostri che $1 \leq d \leq m$.

T2) Dati due sottospazi X e Y dello spazio vettoriale finitamente generato V, si definisca il sottospazio somma $X + Y$ e si dia una condizione necessaria e sufficiente affinché $\dim(X + Y) = \dim X + \dim Y$.

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 2\alpha & \alpha^2 & \alpha \\ 2 & 4-\alpha & 2\alpha-1 & 2 \\ 1 & 2+\alpha & 3\alpha+1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = 0$ si trovi una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_0)$. Per $\alpha = 0$ si trovi una base ortogonale di $N(\mathbf{A}_0)$.

Interpretando $\mathbf{A}_\alpha$ come la matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α il sistema ha soluzione?

E2) Sia $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base ordinata $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4; \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1\}$ su dominio e codominio ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f.
(c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.
(d) Si calcoli una base dello spazio nullo dell'applicazione lineare f.

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 \\ -1 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Per $\beta = -1$ si trovi una base di $\mathbb{C}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_{-1}$.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 11 settembre 2008

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Domande iniziali

☐ (1) Sia $\mathbf{A}$ una matrice 3×3 con $\det A = 0$. Si dica se 0 è un autovalore di $\mathbf{A}$.

☐ (2) Esiste un'applicazione lineare suriettiva $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4$?

☐ (3) Sia $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ una base dello spazio vettoriale V. Esiste un vettore $\mathbf{v}_4$ tale che $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4\}$ sia linearmente indipendente?

T1) Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata tale che $\mathbf{A} - \mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$. Si dica se una tale matrice può avere autovalori reali. Si scriva una matrice 3×3 con questa proprietà.

T2) Si dia la definizione di spazio vettoriale con prodotto scalare e se ne indichi un esempio importante. Si dimostri poi che ogni spazio vettoriale con prodotto scalare ammette una base ortogonale.

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & -\alpha & -2 \\ \alpha/2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -\alpha/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = -4$ si trovi una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_{-4})$. Per $\alpha = 0$ si trovi una base ortogonale di $N(\mathbf{A}_0)$.

Interpretando $\mathbf{A}_\alpha$ come la matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α il sistema ha soluzione?

E2) Sia $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base ordinata $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_4; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3; \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4\}$ su dominio e codominio ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f.
(c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.
(d) Si calcoli una base dello spazio nullo dell'applicazione lineare f.

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & -1 \\ 0 & \beta & \beta \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Per $\beta = 1$ si trovi una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_1$.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 14 luglio 2008

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Domande iniziali

☐ (1) Sia $\mathbf{A}$ una matrice 3×3 di rango 1. Si dica se 0 è un autovalore di $\mathbf{A}$.

☐ (2) Sia $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ un insieme di generatori di V. Esiste un vettore $\mathbf{v}_4$ tale che $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4\}$ sia linearmente indipendente?

☐ (3) Esiste un'applicazione lineare iniettiva $f \colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^2$?

T1) Si dia la definizione di rango di una matrice. Si dimostri che il rango di una matrice è uguale al rango della matrice trasposta.

T2) Dopo aver dato la definizione di similitudine fra matrici, si enuncino e si dimostrino condizioni necessarie e sufficienti affinché una matrice sia simile a una matrice diagonalizzabile.

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -\alpha & -1 \\ \alpha & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -\alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = -2$ si trovi una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_{-2})$. Per $\alpha = 0$ si trovi una base ortogonale di $N(\mathbf{A}_0)$.

Interpretando $\mathbf{A}_\alpha$ come la matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α il sistema ha soluzione?

E2) Sia $f \colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base ordinata $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_3; \mathbf{e}_4; \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\}$ su dominio e codominio ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f.
(c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.
(d) Si calcoli una base dello spazio nullo dell'applicazione lineare f.

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta & 1 & 0 & 0 \\ \beta^2 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Per $\beta = 2$ si trovi una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_2$.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 26 giugno 2008

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1	E1	
	T2	E2	
		E3	

Domande iniziali

☐ (1) Sia $\mathbf{A}$ una matrice 3×3 di rango 3. Si dica se 0 è un autovalore di $\mathbf{A}$.

☐ (2) Sia $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base di V. Esiste un vettore $\mathbf{v}_4$ tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ sia linearmente indipendente?

☐ (3) Esiste un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^2$ di rango 3?

T1) Si diano le definizioni di rango, di inversa e di inversa destra e sinistra di una matrice. Si discuta l'esistenza e l'unicità di soluzioni di sistemi lineari la cui matrice dei coefficienti abbia inversa destra o sinistra.

T2) Dopo aver dato la definizione di autovalore e autovettore, si enuncino e si dimostrino condizioni necessarie e sufficienti affinché una matrice sia diagonalizzabile.

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & -\alpha & 1 \\ -\alpha & 1 & -1 & 1 \\ -1 & \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = 2$ si trovi una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_2)$. Per $\alpha = 0$ si trovi una base ortogonale di $N(\mathbf{A}_0)$.

Interpretando $\mathbf{A}_\alpha$ come la matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α il sistema ha soluzione?

E2) Sia $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base ordinata $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_3; \mathbf{e}_4; \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\}$ su dominio e codominio ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f.
(c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.
(d) Si calcoli una base dello spazio nullo dell'applicazione lineare f.

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta^2 & \beta \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Per $\beta = 2$ si trovi una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_2$.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 27 settembre 2007

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

T1) Si diano le definizioni di rango, di inversa e di inversa destra e sinistra di una matrice. Si discuta l'esistenza e l'unicità di soluzioni di sistemi lineari la cui matrice dei coefficienti abbia inversa destra o sinistra.

T2) Dopo aver dato la definizione di autovalore e autovettore, si enuncino e si dimostrino condizioni necessarie e sufficienti affinché una matrice sia diagonalizzabile.

E1) Si consideri il sottospazio U_α di $\mathbb{C}^5$ generato dai vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si determini per quale valore di $\alpha \in \mathbb{C}$ il sottospazio U_α ha dimensione 3. Per $\alpha = 0$,

(a) si calcoli una base ortogonale di U_0;
(b) si completi questa base a una base ortogonale di $\mathbb{C}^5$;
(c) si trovi la proiezione ortogonale del vettore $[2i\ i\ 3\ 0\ 1]^T$ su U_0.

E2) Sia $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base ordinata $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_3; \mathbf{e}_4; \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\}$ su dominio e codominio ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f.
(c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.
(d) Si calcoli una base dello spazio nullo dell'applicazione lineare f.

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\beta & -b \\ 2 & -1 & \beta & 0 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Si dica per quali valori del parametro β esiste una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$ e la si determini.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 11 settembre 2007

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

T1) Si diano le definizioni di rango, di inversa e di inversa destra e sinistra di una matrice. Si enunci e si dimostri una condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice $\mathbf{A}$ di forma $m \times n$ abbia inversa.

T2) Dopo aver dato la definizione di autovalore e autovettore, si enuncino e si dimostrino condizioni necessarie e sufficienti affinché, data la matrice $\mathbf{A}$ di forma $n \times n$, esista una base di $\mathbb{C}^n$ formata da autovettori di $\mathbf{A}$.

E1) Si consideri il sottospazio U_α di $\mathbb{C}^5$ generato dai vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ i \\ -1 \\ \alpha - 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1-\alpha \\ i \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ \alpha - 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} \alpha - 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si determini per quale valore di $\alpha \in \mathbb{C}$ il sottospazio U_α ha dimensione 3 e, per questo valore,
(a) si calcoli una base ortogonale di U_α;
(b) si completi questa base a una base ortogonale di $\mathbb{C}^4$;
(c) si trovi la proiezione ortogonale del vettore $[2i\ i\ 3\ 0]^T$ su U_α.

E2) Sia $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base ordinata $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_3; \mathbf{e}_4; \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3\}$ su dominio e codominio ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f.
(c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.
(d) Si calcoli una base dello spazio nullo dell'applicazione lineare f.

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & \beta^2 & -2+2\beta & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2\beta - 3 & -\beta + 1 & 1 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Si dica per quali valori del parametro β esiste una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$ e la si determini.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 5 luglio 2007

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

T1) Si diano le definizioni di rango, di inversa e di inversa destra e sinistra di una matrice. Si enunci e si dimostri una condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice $\mathbf{A}$ di forma $m \times n$ abbia inversa.

T2) Dopo aver dato la definizione di autovalore e autovettore, si enuncino e si dimostrino condizioni necessarie e sufficienti affinché, data la matrice $\mathbf{A}$ di forma $n \times n$, esista una base di $\mathbb{C}^n$ formata da autovettori di $\mathbf{A}$.

E1) Si consideri il sottospazio U_α di $\mathbb{C}^5$ generato dai vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ i \\ -1 \\ \alpha - 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1-\alpha \\ i \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \alpha - 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ \alpha - 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si determini per quale valore di $\alpha \in \mathbb{C}$ il sottospazio U_α ha dimensione 3 e, per questo valore,

(a) si calcoli una base ortogonale di U_α;
(b) si completi questa base a una base ortogonale di $\mathbb{C}^4$;
(c) si trovi la proiezione ortogonale del vettore $[2i\ i\ 3\ 0^T$ su U_α.

E2) Sia $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base ordinata $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_3; \mathbf{e}_4; \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3\}$ su dominio e codominio ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f.
(c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.
(d) Si calcoli una base dello spazio nullo dell'applicazione lineare f.

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & \beta^2 & -2+2\beta & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2\beta-3 & -\beta+1 & 1 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Si dica per quali valori del parametro β esiste una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$ e la si determini.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 19 giugno 2007

matricola .... nome .... cognome ....

corso di laurea .... anno accademico di immatricolazione ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3	

T1) Si diano le definizioni di rango e di inversa destra e sinistra di una matrice. Si enunci e si dimostri una condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice $\mathbf{A}$ di forma $m \times n$ abbia inversa destra.

T2) Si dimostrino condizioni necessarie e sufficienti affinché, data la matrice $\mathbf{A}$ di forma $n \times n$, esista una base di $\mathbb{C}^n$ formata da autovettori di $\mathbf{A}$.

E1) Si consideri il sottospazio U_α di $\mathbb{C}^5$ generato dai vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} i \\ \alpha \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ -1 \\ -\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2i \\ -1 \\ -5 \\ -1 \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -\alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} i \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si determini per quale valore di $\alpha \in \mathbb{C}$ il sottospazio U_α ha dimensione 3 e, per questo valore,
(a) si calcoli una base ortogonale di U_α;
(b) si completi questa base a una base ortogonale di $\mathbb{C}^5$.

E2) Sia $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base ordinata $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_4; \mathbf{e}_3; \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3\}$ su dominio e codominio ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f.
(c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.
(d) Si calcoli una base dello spazio nullo dell'applicazione lineare f.

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & \beta^2 & -2-2\beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2\beta-3 & \beta+1 & 1 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Si dica per quali valori del parametro β esiste una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$ e la si determini.