ELEMENTI DI GEOMETRIA — Lezione III

Prof. M. Spera a.a. 2007/2008

Avevamo già dato le nozioni di incidenza, parallelismo per sottospazi affini.

È facile vedere (*) che tali nozioni, non che (l'essere sghembi) sono invarianti per affinità (pertanto sono effettivamente nozioni affini)

Inoltre, il rapporto tra volumi (in dim. n) è un invariante affine:

Sia P un parallelepipedo e sia $f(P)$ il suo trasformato tramite un'affinità. Detti v_P e $v_{f(P)}$ i loro parvolumi orientati, si ha:

$$v_{f(P)} = \underbrace{\det \varphi}_{\text{costante di affinità}} \cdot v_P \qquad \left(\text{cf. teorema di Binet}\right)$$

(le traslazioni non alterano i volumi...)

Si ha pertanto, dati i parallelepipedi P_1 e P_2,

$$\frac{v_{f(P_1)}}{v_{f(P_2)}} = \frac{v_{P_1}}{v_{P_2}}$$

Nota: il linguaggio generale atto ad inquadrare il problema dell'invarianza è quello delle Categorie, ma vi rinunciamo sia per il carattere elementare del presente corso che per il formalismo pesante che dovremmo utilizzare, che ne nasconderebbe il significato intuitivo.

[È facile tener conto anche dei casi degeneri..]

(*) $S = x_0 + W = \{x_0 + w\}$

$A(x_0+w) + b = \underbrace{Ax_0 + b}_{y_0} + A\cdot w$

$f_{(A,b)}(S) = y_0 + AW$

Effettivamente l'immagine di un s. spazio affine tramite un'affinità è un sottospazio affine

Per gli spazi euclidei, il gruppo corrispondente è $M(E)$, gruppo delle isometrie, o movimenti (o movimenti rigidi) (è un sottogruppo di $Aff(E)$)

$$M(E) = \{ f_{O,c} \mid O \in \underbrace{O(V)}_{\text{gruppo ortogonale}},\ c \in V \}$$

in questo caso (lavoriamo in $\mathbb{R}^n$..) i volumi (orientati) sono conservati a meno del segno

$$v_{f_{(O,c)}(P)} = \pm v_P$$

(+ se $\det O = 1$, ovvero $O \in \underbrace{SO(V)}_{\text{gruppo ortogonale speciale}}$)

Inoltre, sono conservate le distanze (+)

$$\| \overrightarrow{f_{(O,c)}(\underset{x}{P})\, f_{O,c}(\underset{y}{Q})} \| = \| \overrightarrow{\underbrace{\varphi(P)}_{Ox}\, \underbrace{\varphi(Q)}_{Oy}} \|$$

$$= \| Ox - Oy \| = \| O(x-y) \| = \| x - y \| = \| \overrightarrow{PQ} \|$$

(+) è questa la proprietà caratterizzante

Le proprietà invarianti per movimenti rigidi sono dette <u>metriche</u>.

☆ Per <u>geometria euclidea</u> si intende lo studio delle <u>proprietà metriche</u> delle figure

Geometria affine	proprietà Aff - invariante
Geometria euclidea	proprietà M - invariante

$$Aff \supseteq M$$

(*) Proprietà Aff-invarianti → Proprietà M-invarianti

- incidenza →
- parallelismo →
- l'essere sghembi →
- rapporto tra volumi →

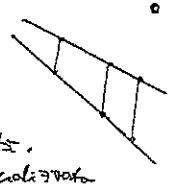
[• volumi (a meno del segno)]

• distanze

• angoli

Nota

(*) In geometria affine ha senso il confronto di "lunghezze" su una stessa retta, e i rapporti tra queste si conservano per affinità. (questa è una forma generalizzata del teorema di Talete)

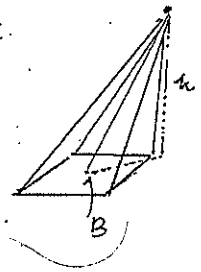


Esempio:

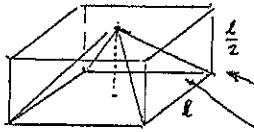
☆☆ Determiniamo il volume di una piramide a base rettangolare B e altezza h (dobbiamo trovare (formula di Democrito☆))

$$V_{pir} = \frac{1}{3} B \cdot h$$

V_{pri} ≡ volume prisma di uguale base e altezza



Sol. Poiché $\frac{V_{pir}}{V_{pri}}$ è invariante per trasformazioni affini, possiamo ricondurci alla situazione seguente: $B = \ell^2$, $h = \frac{\ell}{2}$, piramide e prisma retti



Ma tale prisma è la metà di un cubo di lato ℓ, in cui si possono disporre 6 piramidi.

Pertanto $\frac{V_{pir}}{V_{pri}} = \frac{1}{3}$ Q.E.D.

Affinità : esempi

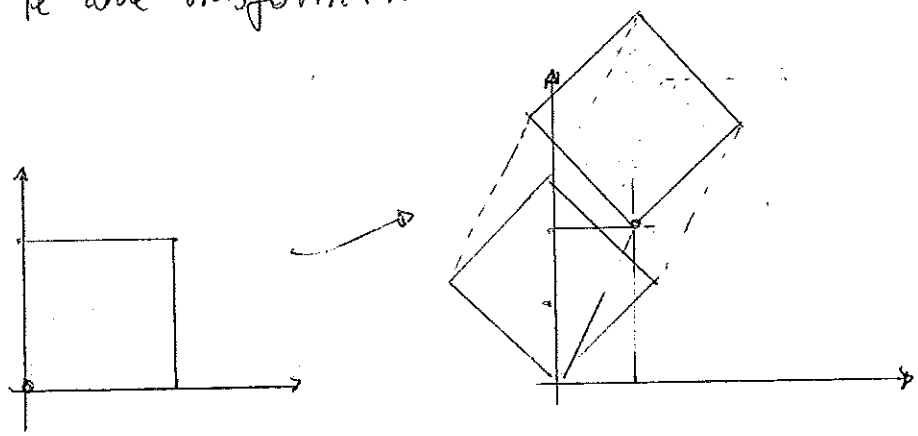
Rotazione :

$$x \xmapsto{f_{(A,0)}} Ax \xmapsto[\text{traslazione}]{f_{(I,b)}} Ax + b \qquad f_{(I,b)} \circ f_{(A,0)} = f_{(A,b)}$$

lascia fissa l'origine $\underline{0}$

$$x \xmapsto[\text{traslazione}]{f_{(I,b)}} x + b \xmapsto{f_{(A,0)}} A(x+b) = Ax + Ab \qquad f_{(A,0)} \circ f_{(I,b)} = f_{(A,Ab)}$$

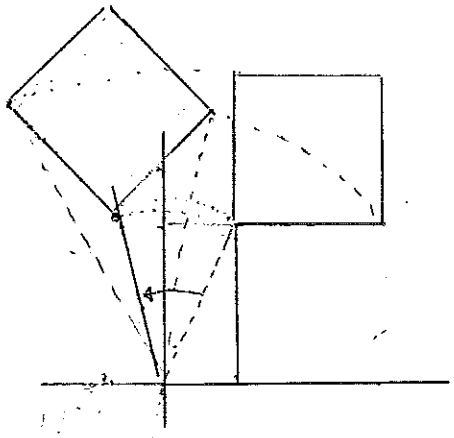
le due trasformazioni sono diverse!



prima ruoto, poi traslo

$$b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = R_{\frac{\pi}{4}}$$



prima traslo, poi ruoto: equivale a ruotare e poi trasferire di Ab

$$Ab = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ +\frac{3}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{3\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

Formalismo unificato

$$x \longmapsto Ax + b \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad A \in M_n$$

(non singolare, se vogliamo un'affinità)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \longmapsto \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ Ax + b \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & A \end{array}\right)$$

congloba anche le traslazioni in una sola matrice

passo importantissimo verso la geometria proiettiva

(e le sue applicazioni, per ex. disegno e visione computazionali)

Digressione sul concetto di gruppo

INCISO

gruppo: $(G, \cdot)$

$\cdot : G \times G \longrightarrow G$

$(g_1, g_2) \longmapsto g_1 \cdot g_2$

G: insieme non vuoto munito di

$\cdot$: operazione binaria ("moltiplicazione", "prodotto")

che soddisfa le proprietà →

1) associativa:

$$g_1(g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$$

(esistenza dell'elemento neutro)

2) possiede un elemento (di fatto unico) neutro, e, i.e.

$$g \cdot e = e \cdot g = g \quad \forall g \in G$$

(esistenza dell'inverso)

3) ogni g ammette un inverso, denotato con g^{-1}, e di fatto unico, i.e.

$$g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e \quad \forall g \in G$$

☆ Se $\forall g_1, g_2$ vale $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$ (proprietà commutativa) il gruppo si dice commutativo, o abeliano

Esempi
- $(K, +)$ — K: campo; $+$: somma o addizione
- $((V, K), +)$ — somma di vettori
- $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ — K: campo; $\cdot$: moltiplicazione
- $GL(n, K)$ (matrici $n \times n$ a coeff. in K, non singolari) — prodotto $\equiv$ molt. di matrici [NON È ABELIANO per $n > 1$]

◈ Aff , M

★ $\emptyset \neq H \subset G$ è detto sottogruppo di G
(lieve abuso di linguaggio) se $(H, \circ)$
stessa operazione di G

è un gruppo.
Affinché ciò accadda, è necessario e sufficiente che
$\forall h_1, h_2 \in H, \quad h_1 \circ h_2^{-1} \in H$
(si noti: $e \in H$, $h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$)

In altre parole, H è sott. di G se e solo se è chiuso rispetto al prodotto ($h_1 \cdot h_2 \in H$ se $h_1, h_2 \in H$) e all'inversione ($h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$)

Esempi: $\{e\}$ è sottogruppo di G, detto sott. banale, e così G stesso.

★ Le traslazioni $T = \{ x \longmapsto x + b \}_{b \in K^n} \equiv \{ f_{(I,b)} \}$
formano un sottogruppo di Aff (e di M)
la verifica è facile...

☆ omomorfismo di gruppi.

$$\varphi : G \to H$$

prod. in G — prod. in H

$$\varphi(g_1 \cdot g_2) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2) \qquad \forall\, g_1, g_2 \in G$$

si vede subito che $\varphi(e_G) = e_H$ (el. neutri) e $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$

Se φ ammette inversa (†) si parla di isomorfismo di gruppi e si scrive

$$G \cong H$$

☆ Es: $(\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}^+, \cdot)$

$+$: somma; $\mathbb{R}^+ = \{x > 0\}$; $\cdot$: prodotto

$$\varphi : x \longmapsto e^x$$

$$e^{x_1 + x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}$$

$$\varphi^{-1} : \underset{\substack{\vee \\ 0}}{x} \longmapsto \log x$$

$$x_1 \cdot x_2 \longmapsto \log(x_1 \cdot x_2) = \log x_1 + \log x_2$$

(†) in tal caso $\varphi^{-1} : H \to G$ è pure un omomorfismo

$$S^1 \equiv \{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1 \}$$

$\parallel$

circonf. unitaria

$$z = e^{i\varphi} := \cos\varphi + i \sin\varphi$$

si dimostra con la teoria delle serie

si ha: $$\boxed{e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2}}$$

ricordare $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \dots$

$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \dots$

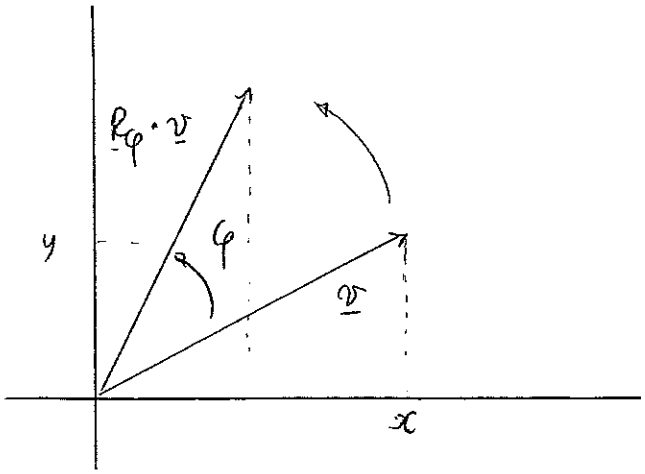
Notare

$$\boxed{e^{i\pi} = -1}$$

Eulero

$R_\varphi \rightsquigarrow e^{i\varphi}$

matrici di rotazione $\quad R_{\varphi_1} R_{\varphi_2} = R_{\varphi_1 + \varphi_2}$

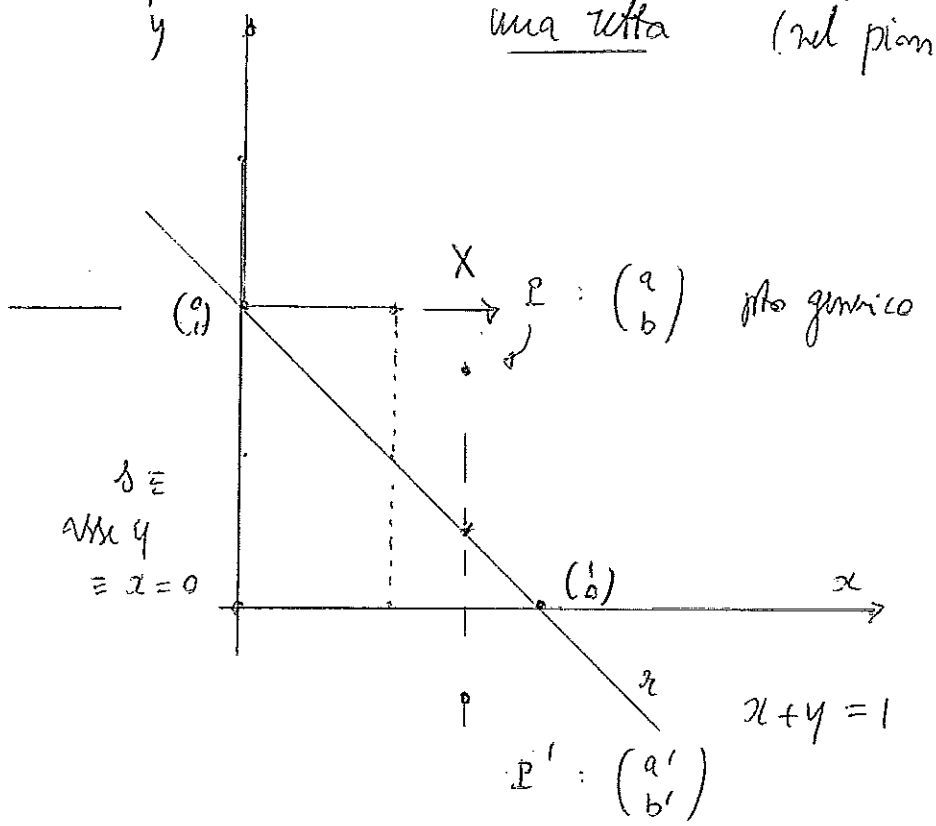


$\underline{v} \mapsto z = x + iy$

$\underline{R}_\varphi \cdot v \mapsto e^{i\varphi} \cdot z$

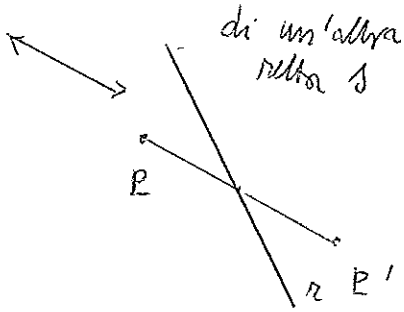
Un esempio di studio di affinità.

simmetria obliqua rispetto ad una retta (nel piano)



descrivere la trasformazione analiticamente:

P': simmetrico di P rispetto a r lungo la direzione di un'altra retta s



1ª sol (geometrica) Sia r_P la retta per P parallela a s:

$$r_P : \begin{cases} x = a \\ y = b + t \end{cases}$$

determiniamo $r_P \cap r$: $\quad a + (b+t) = 1$

$$\tilde{t} = 1 - (a+b)$$

☆ ora, P' si avrà in corrispondenza di $2\tilde{t}$

$$\Rightarrow \quad a' = a$$
$$b' = b + 2(1-a-b) = 2 - 2a - b$$

$$\begin{cases} a' = a \\ b' = 2 - 2a - b \end{cases}$$

ossia

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

se si vuole, possiamo cambiare variabili

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ecc.

2ª sol (matriciale + geometrica)

Osserviamo che $\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\in r$

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y - 2 \end{cases}$$

assumiamola come nuova origine

ora $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

nuove coordinate! (è lo stesso ragionamento di prima)

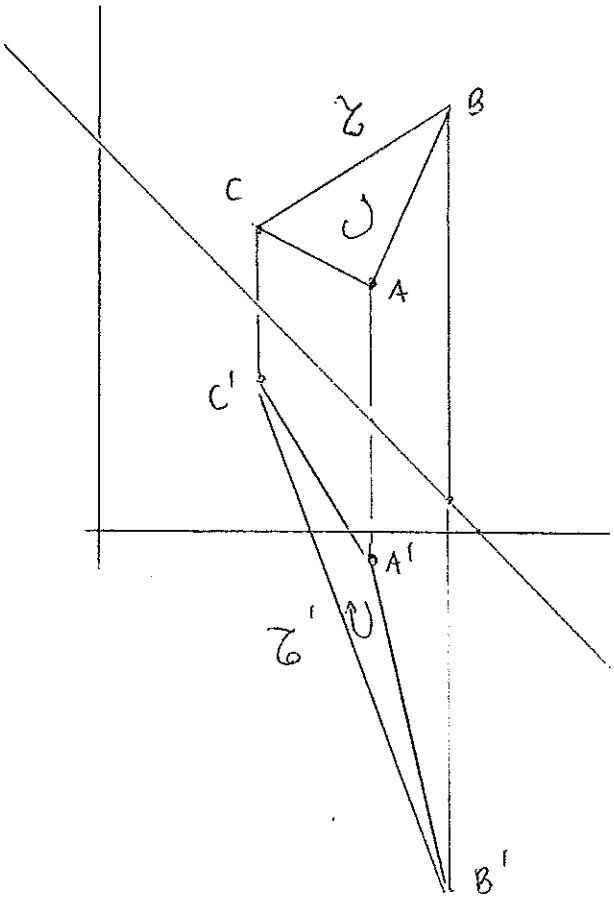
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$y = Y + 2$

$Y = y - 2$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Notare che

$$\frac{\mathcal{A}(\tau)}{\mathcal{A}(\tau')} = \det A = -1$$

(aree orientate)

le lunghezze sono modificate, e così gli angoli.

Si osservi che f è involutoria, i.e. $f \circ f = id$

* Il concetto di combinazione affine di punti è... affine

Nota: se $\alpha_i \geq 0$, $\sum \alpha_i = 1$, si parla di combinazioni convesse

Sia $\mathbb{A}^n$, ossia $\mathbb{R}^n$ visto come spazio affine.
[la discussione ha senso in astratto]

Siano dati P_i, $i = 1 \dots m$, punti di $\mathbb{A}^n$

considerviamo il pto: $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i P_i$, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$ — come vettore ha certamente senso
(combinazione affine dei P_i con coefficienti α_i)

ciò ha senso?

Si ha, data la trasf. affine $f: x \longmapsto Ax + b$

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i P_i\right) = A\left(\sum \alpha_i P_i\right) + b =$$

$$= \sum \alpha_i A \cdot P_i + b = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A P_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i}_{1} \cdot b$$

crucial

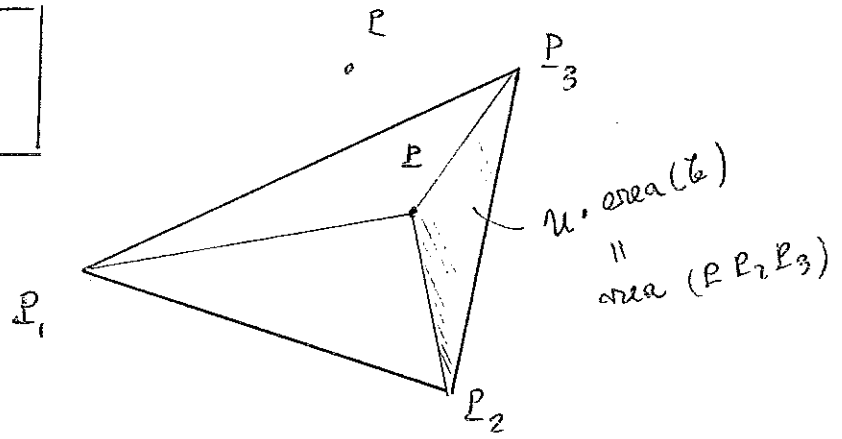
$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \underbrace{(A \cdot P_i + b)}_{f(P_i)} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(P_i)$$

Pertanto f conserva le combinazioni affini ....
[l'immagine tramite un'affinità di una comb. affine è la comb. affine delle immagini, con gli stessi coefficienti]. ciò garantisce che tale concetto è ben definito

* Tale proprietà può essere presa come def. di trasf. affine

Per fissare le idee prendiamo $n = 2$ (piano) e $m = 3$, con i pti in "posizione generale" (i.e. per es. $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ l.i. (non paralleli))

Coordinate baricentriche



Sia $P \in \mathbb{R}^2$. Mostriamo che

$$P_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

$$(*) \qquad P = u P_1 + v P_2 + w P_3$$

con u, v, w univocamente determinati, $u + v + w = 1$, detti <u>coordinate baricentriche</u> di P (risp. a $\underbrace{P_1 P_2 P_3}_{\tau}$) ("pesi" dei pti P_i)

Scriviamo $(*)$ nella forma

Notare !!

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

A è non singolare, e si noti che $\det A = 2$ area(τ) (orientata) (controllare...), e ciò basta per concludere. Interpretiamo geometricamente il risultato

Dal teorema di Cramer troviamo

$$u = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \end{vmatrix}}{2\ \text{area}(\mathcal{T})} = \frac{2\ \text{area}(\overbrace{P P_2 P_3}^{\mathcal{T}_1})}{2\ \text{area}\ \mathcal{T}}$$

$$= \frac{\text{area}(\mathcal{T}_1)}{\text{area}(\mathcal{T})} \qquad \text{(v. figura)}$$

ecc. P è interno al triangolo $P_1 P_2 P_3$ precisamente quando u, v, w sono non negativi (combinazioni convesse)

Le coordinate baricentriche costituiscono il primo esempio di coordinate non cartesiane (Moebius, 1827)

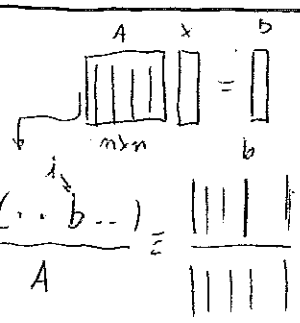
Assoggettando il piano ad una trasf. affine, queste non mutano (ciò è chiaro anche geometricamente: i rapporti tra le aree non cambiano).

È immediato generalizzare nello spazio ($n=3$, $m=4$..) e lavorare con tetraedri...

Richiamo

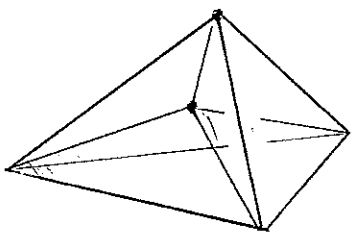
$Ax = b$

$\det A \neq 0$



$$x_i = \frac{\det(\ldots b \ldots)}{\det A}$$

☆☆ Formula di Cramer

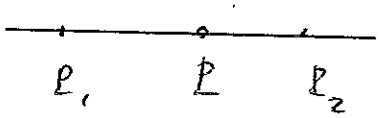


Vale la pena notare esplicitamente anche il caso $n=1$
$m=2$

P_1, P_2 distinti

$$\underset{u}{(1-t)}\,P_1 + \underset{v}{t}\,P_2 \qquad u+v=1$$

comb. affine.



$$\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{pmatrix}}_{\text{non singolare se } P_1 \neq P_2}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$$

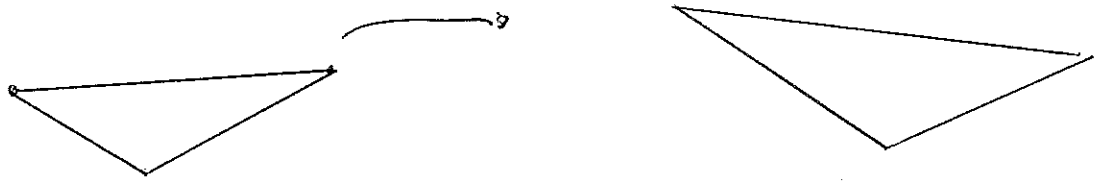
$$u = \frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ x & x_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{vmatrix}} = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$$

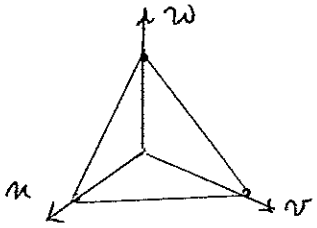
rapporto semplice di tre pti allineati

Applicazioni: interpolazione affine

$0 \mapsto P_0$
$1 \mapsto P_1$

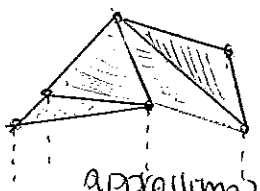
$t \mapsto (1-t)P_0 + tP_1$





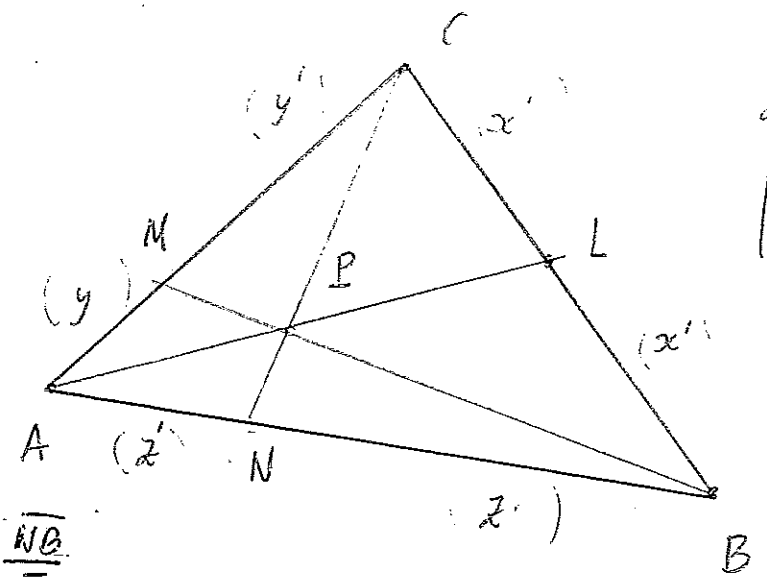
$u+v+w=1$

u	v	w		
1	0	0	$\longmapsto$	P_1
0	1	0	$\longmapsto$	P_2
0	0	1	$\longmapsto$	P_3



approssimazione lineare a tratti

Teorema di CEVA



$$\begin{cases} L = xB + x'C \\ M = yC + y'A \\ N = zA + z'B \end{cases}$$

$z + z' = 1$

$z, z' \in [0,1]$

ecc.

⚠ $\frac{z}{z'} = \frac{\overline{NB}}{\overline{AN}}$

AL, CN, CM concorrono in P

$\iff \quad x\,y\,z = x'\,y'\,z'$

$x + x' = 1$

"$\Rightarrow$"

$$P = uA + vB + wC$$

coordinate baricentriche

assumiamo $P \notin \{A, B, C\}$

$$P = uA + (v+w)\underbrace{\frac{vB + wC}{v+w}}_{X}$$

$u, v, w > 0$

$u + v + w = 1$

$P \in AX$, e $X \in BC \Rightarrow X = L = xB + x'C$

nella presente situazione $x \neq 0$, $x' \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{v}{v+w} \\ x' = \dfrac{w}{v+w} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{x'} = \frac{v}{w}$$

Per simmetria, si ha anche

$$\frac{y}{y'} = \frac{w}{u} \qquad \frac{z}{z'} = \frac{u}{v}$$

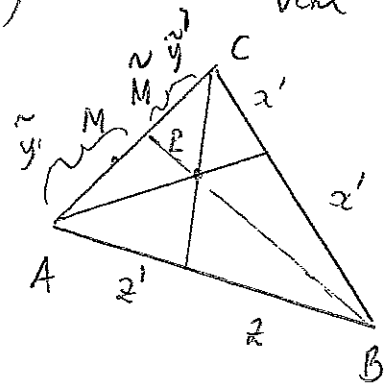
$$\Rightarrow \quad \frac{x}{x'} \cdot \frac{y}{y'} \cdot \frac{z}{z'} = \frac{v}{w} \cdot \frac{w}{u} \cdot \frac{u}{v} = 1$$

Osservazione.

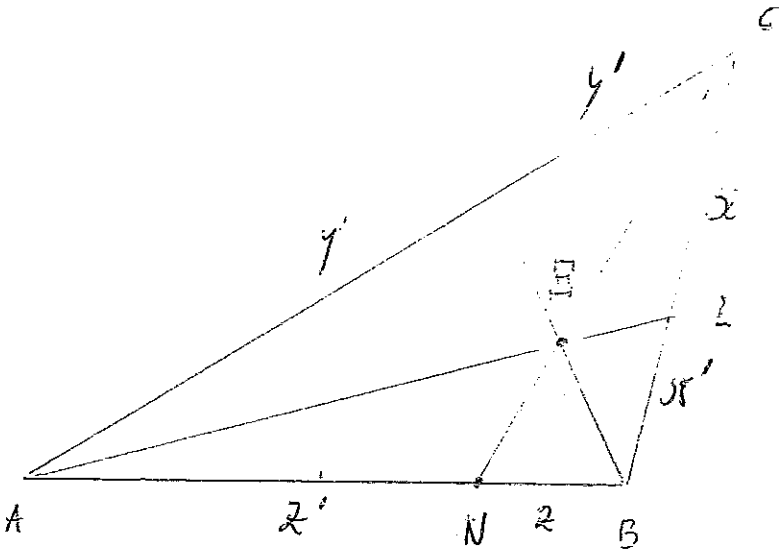
Da $\begin{cases} x = \dfrac{v}{v+w} \\ x' = \dfrac{w}{v+w} \end{cases}$ ecc... $\quad \dfrac{x}{x'} = \dfrac{v}{w}$ ecc.

è facile passare dalle x, y, z (e x', y', z') alle coordinate baricentriche e viceversa

($\Leftarrow$) Vale $xyz = x'y'z'$.



Si consideri la retta $B\hat{P}$, che incontrerà AC in $\hat{M}$.
Dall'implicazione diretta è
$$x\tilde{y}z = x'\tilde{y}'z',$$
da cui si giunge facilmente a $\tilde{y} = y$, e $\tilde{y}' = y'$.



$L = xA + x'B$

$x + x' = 1$

etc...

★★ <u>Ceva</u>: $\quad xyz = x'y'z'$

(CN (e S) affinché tre rette spiccate dai vertici di un triangolo si incontrino in un pto)

teorema di geom. affine

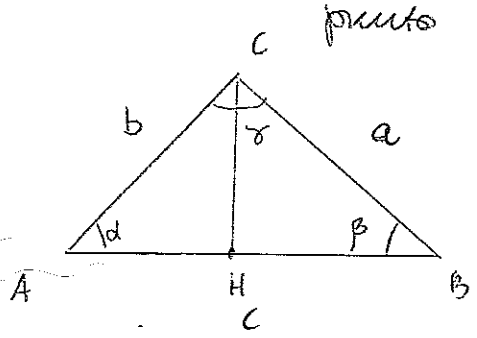
Corollari: ★ $x = x' = \frac{1}{2} = y = y' = z = z'$ produce il baricentro di ABC:

pto di incontro delle mediane, e $u = v = w = \frac{1}{3}$

★ Le altezze di un triangolo si intersecano in uno stesso punto (ortocentro): traccia della dim con Ceva

teorema di geometria euclidea

si usano nozioni metriche



$c = b\cos\alpha + a\cdot\cos\beta$

$1 = \underbrace{\frac{b}{c}\cos\alpha}_{z'} + \underbrace{\frac{a}{c}\cos\beta}_{z}$

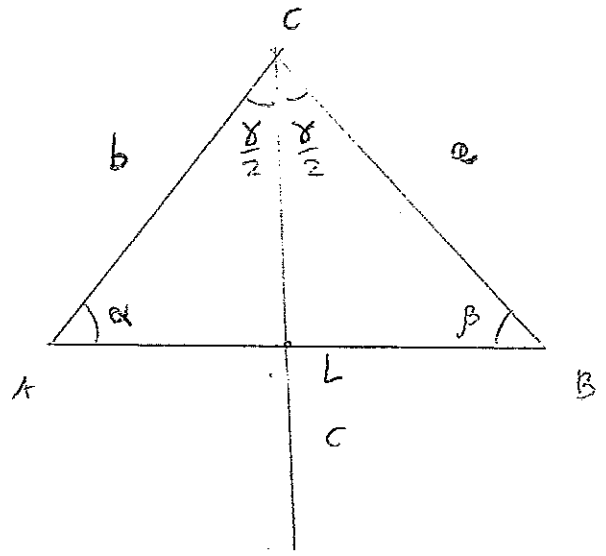
$H = \underbrace{\left(\frac{b}{c}\cos\alpha\right)}_{z} A + \underbrace{\left(\frac{a}{c}\cos\beta\right)}_{z'} B$

$\Rightarrow \quad x'\cdot y'\cdot z' = \overbrace{\frac{b}{c}\cos\alpha}^{z'} \cdot \overbrace{\frac{c}{a}\cos\beta}^{x'} \cdot \overbrace{\frac{a}{b}\cos\gamma}^{y'} = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$xyz = \underbrace{\frac{a}{c}\cos\beta}_{z'} \cdot \underbrace{\frac{b}{a}\cos\gamma}_{x} \cdot \underbrace{\frac{c}{b}\cos\alpha}_{y} = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

teorema di geometria euclidea

* Le bisettrici di un triangolo si intersecano in uno stesso punto (incentro del triangolo)



$$\frac{\overline{AL}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\overline{CL}}{\sin\alpha} \qquad \overline{AL} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\alpha}\,\overline{CL}$$

(** Teorema dei seni)

$$\overline{LB} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\beta}\,\overline{CL}$$

$$\overline{AL} + \overline{LB} = \overline{AB} = c \qquad \frac{\overline{AL}}{c} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\alpha}\,\frac{\overline{CL}}{c} \equiv z'$$

$$\frac{\overline{LB}}{c} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\beta}\,\frac{\overline{CL}}{c} \equiv z$$

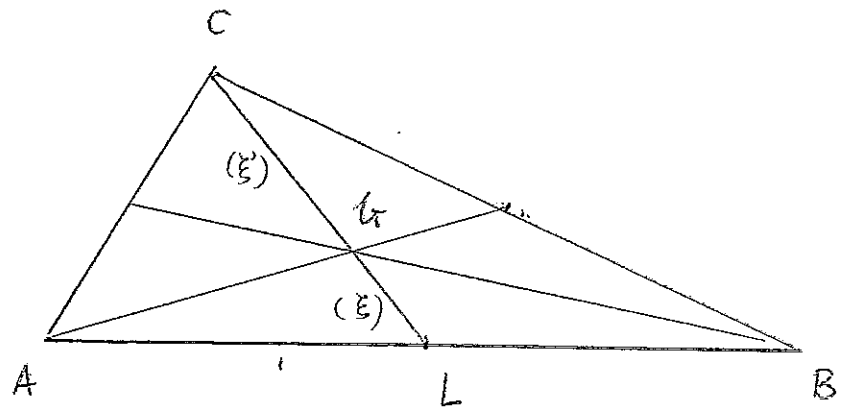
$$\frac{z}{z'} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \Rightarrow \frac{x\cdot y\cdot z}{x'\cdot y'\cdot z'} = \left(\frac{x}{x'}\right)\left(\frac{y}{y'}\right)\left(\frac{z}{z'}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}}_{\left(\frac{z}{z'}\right)} \cdot \underbrace{\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}}_{\left(\frac{x}{x'}\right)} \cdot \underbrace{\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}}_{\left(\frac{y}{y'}\right)} = 1$$

Ancora qualche dettaglio

G : baricentro

il risultato si può provare per via elementare; utilizziamo il formalismo affine testè sviluppato



$\frac{\overline{CG}}{\overline{GL}} = 2$; infatti $G = \xi C + \xi' L$

$= \xi C + \xi' \left(\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B\right) =$

$= \frac{1}{2}\xi' A + \frac{1}{2}\xi' B + \xi C = \frac{1}{3}(A + B + C)$

$\Rightarrow \xi = \frac{1}{3}, \ \xi' = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\xi'}{\xi} = 2$