esercizi

1. Esistono tre tipi α, β e γ tali che il giudizio $\vdash \lambda x : \alpha.\lambda y : \beta.(xy)(xy) : \gamma$ sia derivabile?

2. Sia Ω il dominio (detto detto *verticale*) $\langle \mathbf{N} \cup \{\omega\}, \leq \rangle$. Sia data la funzione $f : \Omega \to \Omega$ tale che $f(0) = 0, f(n) = 2n$ per n pari, $f(n) = f(n-1) + 1$ per n dispari $e f(\omega) = \omega$.

   f è una funzione continua?

3. Si dimostri che dati due insiemi X, Y, l'insieme delle funzioni parziali da X a Y ordinato dalla relazione di inclusione insiemistica è un dominio.

4. Dare la derivazione per tipare il termine
   $op \equiv \mathbf{Y}\ (\lambda p : nat \to nat.\lambda y : nat.\mathbf{if}\ \mathbf{iszero}(y)\ \mathbf{then}\ 10\ \mathbf{else}\ \mathbf{succ}(p(\mathbf{pred}(y))))$
   e successivamente, se esiste, esibire un valore V tale che $op(1) \Downarrow V$.

5. Esistono tre tipi α, β e γ tali che il giudizio $\vdash \lambda x : \alpha.\lambda y : \beta.x(yy) : \gamma$ sia derivabile?

6. Sia Ω il dominio (detto detto *verticale*) $\langle \mathbf{N} \cup \{\omega\}, \leq \rangle$. Sia data la funzione $f : \Omega \to \Omega$ tale che $f(n) = n$ per n pari, $f(n) = 0$ per n dispari e $f(\omega) = \omega$. f è una funzione continua?

7. Si dimostri che dati due insiemi X, Y, l'insieme delle funzioni parziali da X a Y ordinato dalla relazione di inclusione insiemistica è un dominio.

8. Dare la derivazione per tipare il termine
   $op \equiv \mathbf{Y}\ (\lambda p : nat \to (nat \to nat).\lambda x : nat.\lambda y : nat.$
   $\mathbf{if}\ \mathbf{iszero}(y)\ \mathbf{then}\ x\ \mathbf{else}\ \mathbf{succ}(p\ x\ \mathbf{pred}(y)))$
   e successivamente esibire un valore V tale che $op(0)(0) \Downarrow V$.

9. Esistono i tipi α, β, γ e δ tali che il giudizio
   $z : \gamma \vdash \lambda x : \alpha.((\lambda y : \beta.z)(xz)) : \delta$
   sia derivabile?

10. Sia $\leq \subseteq \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ la relazione standard di ordine totale tra naturali. Si consideri la relazione $R \subseteq (\mathbf{N} \times \mathbf{N}) \times (\mathbf{N} \times \mathbf{N})$ così definita:
    $\langle n, z \rangle R \langle m, w \rangle$ se e solo se $n < m$ oppure $n = m$ e $z \leq w$.

    (a) R è una relazione d'ordine parziale?

    (b) $\langle \mathbf{N} \times \mathbf{N}, R \rangle$ è un cpo ?

11. Si enunci e si dimostri il teorema del punto fisso di Tarski

12. Esiste in PCF un tipo α per il quale non esiste alcun termine M tale che $\vdash M : \alpha$ sia derivabile?

13. Esistono tre tipi α, β e γ tali che il giudizio $\vdash \lambda x : \alpha.\lambda y : \beta.y(xx) : \gamma$ sia derivabile?

14. Sia $\leq \subseteq \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ la relazione standard di ordine totale tra naturali. Si consideri la relazione $R \subseteq \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ così definita: $R = \{< x, 0 >: x \in \mathbf{N}\} \cup \{< y, z >: y \in \mathbf{N} - \{0\}, z \in \mathbf{N}\ e\ y \leq z\}$.

    (a) R è una relazione d'ordine parziale?

    (b) $< \mathbf{N}, R >$ è un cpo ?

15. Dati i cpo $< D_1, \leq_1 >$ e $< D_2, \leq_2 >$, $< E, \leq_E >$ e la funzione $f : D_1 \times D_2 \rightarrow E$, si dimostri che f è monotona se e solo se f è monotona in ciascun argomento. Si dimostri inoltre che se f è continua allora f è continua in ciascun argomento.

16. Sia Ω il termine $\mathbf{Y}(\lambda x : nat.x)$; esiste un termine M, un tipo α ed un valore V tale che $\vdash M\Omega : \alpha$ sia derivabile e $M\Omega \Downarrow V$?

17. Esistono tre tipi α, β e γ tali che il giudizio $\vdash \lambda x : \alpha.\lambda y : \beta.x(yx) : \gamma$ sia derivabile?

18. Sia $< D, \leq >$ un dominio e $f : D \rightarrow D$ una funziona continua. Sia $d \in D$ tale che $d \neq fix(f)$ tale che $d \leq fix(f)$. Si dimostri che f non può essere stretta.

19. Dati due cpo $< D_1, \leq_1 >$ e $< D_2, \leq_2 >$, si dia la definione di dominio prodotto $D_1 \times D_2$. Si definisca la funzione di proiezione $\pi_1 : D_1 \times D_2 \rightarrow D_1$ e si mostri che è monotona e continua.

20. Il termine $\mathbf{Y}(\lambda y : nat \rightarrow nat.\lambda x : nat.x)$ è tipabile?
    In caso di risposta affermativa, esiste V tale che $\mathbf{Y}(\lambda y : nat \rightarrow nat.\lambda x : nat.x) \Downarrow V$?

21. Esibire un termine tipabile in PCF M tale che diverga con la CbV e valuti a 0 con la CbN.