

Esercizi per il Corso di ALGEBRA

Foglio 1

14 ottobre 2008

1. Si verifichi che l'insieme $\text{End}G$ di tutti gli endomorfismi di un gruppo abeliano G forma un anello rispetto alla somma e alla composizione di applicazioni.

2. Sia I un insieme e sia R un anello.

- (a) Dato un sottoinsieme $N \subseteq I$, si verifichi che

$$\mathcal{A}(N) = \{f \in R^I \mid f|_N = 0\}$$

è un ideale dell'anello R^I .

- (b) Sia adesso R un campo e sia $x \in I$. Si dimostri che

$$\mathcal{A}(x) = \{f \in R^I \mid f(x) = 0\}$$

è un ideale massimale dell'anello R^I .

3. Sia $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

- (a) Si determinino gli elementi di $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^*$.

- (b) Si deduca da (a) che l'anello $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ è un campo se e solo se n è un numero primo.

4. Sia (G, \cdot) un gruppo abeliano, e siano $a, b \in G$. Sia inoltre $n = \text{mcm}(\text{ord}(a), \text{ord}(b))$ il minimo comune multiplo dell'ordine di a e di b . Si dimostri che esiste un elemento $c \in G$ con $\text{ord}(c) = n$.