GEOMETRIA a.a. 2008/09 Prova scritta del 21/9/09

(Prof. M. Spera)

① Data la superficie $\Sigma$ individuata da $z = \sin^2 x + 2y^2$, si determini il piano tangente a $\Sigma$ nel pto $O:(0,0,0) (\in \Sigma)$ nonché la curvatura gaussiana, le curvature principali e l'indicatrice di Dupin. Si calcoli la curvatura normale lungo la direzione individuata da $\underline{v} = (1,4,0)$.

② In $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > 0\}$ sia data la metrica $ds^2 = 4x^2\,dx^2 + dy^2$. Se ne calcoli la curvatura e se ne determinino le geodetiche, possibilmente in due modi.

③ Siano dati, in $\mathbb{R}^2$, $X = \{x=0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$

con $\mathcal{C}_n = \{(x-n)^2 + y^2 = n^2\}$,

$Y = \{x=0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}'_n$, $\mathcal{C}'_n = \{(x-\frac{1}{n})^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}\}$

Si dica se X e Y sono compatti, connessi, connessi per archi, localmente connessi per archi. Sono omeomorfi?

Tempo a disposizione 2h

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

21/9/09

(1) $z = f(x,y) = \sin^2 x + 2y^2$

$O: (0,0,0)$

$$z = x^2 + 2y^2 + o(x^2)$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{(2x^2+4y^2)} + \dots$$

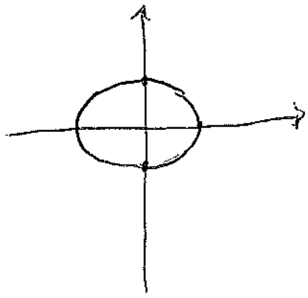
Sol. rapida $\Longrightarrow$

$$\mathcal{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = S|_{P_0}$$

$$K(\overset{u}{\underset{\shortparallel}{0}}, \overset{v}{\underset{\shortparallel}{0}}) = \det \mathcal{H}_f(0,0) = 8$$

curv. principali $\quad k_1 = 2, \quad k_2 = 4$

indicatrice di Dupin $\quad 2\xi^2 + 4\eta^2 = 1 \quad$ ellisse



$$\frac{\xi^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{\eta^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sim 0{,}707$$

curvatura normale lungo $\underline{v} = (1, 4, 0) \qquad \|v\|^2 = 17$

$$k_n = \frac{(1 \ \ 4)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}}{17} = \frac{(1 \ \ 4)\begin{pmatrix} 2 \\ 16 \end{pmatrix}}{17}$$

$$= \frac{2 + 4 \cdot 16}{17} = \frac{2+64}{17} = \frac{66}{17}$$

Calcolo standard:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sin^2 u + 2v^2 \end{cases}$$

$\underline{r}: (u, v, \sin^2 u + 2v^2)$

$\underline{r}_u: (1, 0, \underbrace{2\sin u \cos u}_{}) \quad = \sin 2u$

$\underline{r}_v = (0, 1, 4v)$

$\underline{r}_{uu} = (0, 0, 2\cos 2u)$

$\underline{r}_{uv} = (0, 0, 0)$

$\underline{r}_{vv} = (0, 0, 4)$

$\underline{N}_0 = (0, 0, 1)$

in $O: (0,0)$

$E_0 = 1 = G_0$

$e_0 = 2$

$f_0 = 0$

$g_0 = 4$

$$S|_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

21/9/09

(2) metrica: $ds^2 = 4x^2 dx^2 + dy^2$
$= (\alpha dx)^2 + dy^2$ $\quad x > 0$

$2x\,dx = dx^2$

posto $\begin{cases} \xi = x^2 \\ \eta = y \end{cases}$

la metrica diviene

$d\xi^2 + d\eta^2$ che è piatta; metrica standard su $(\xi,\eta)$

geodetiche: rette $\quad a\xi + b\eta + c = 0 \quad (a,b) \neq (0,0)$

$\Rightarrow \quad \boxed{a x^2 + b y + c = 0}$

(parabole ..) $\quad$ $a=0$ rette orizz. $\quad$ $b=0$ coppie di rette vert.

Altro modo: $\quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(4x^2 x'^2 + 2y'^2\right) \qquad ' = \frac{d}{ds}$

$4x^2 x'^2 + 2y'^2 = 1$ (cons. energia)

$y$: coord. ciclica

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \qquad \frac{d}{ds}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = 0 \qquad y' = C$

se $C = 0$
$x'^2 = 0$
$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ .. M.

se $A=0$
$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = C \neq 0 \end{cases}$
$\begin{cases} x = x_0 \\ y = C s \end{cases}$
||

$4x^2 x'^2 = A$ $\quad$ cost $\geq 0$ $\qquad x' = \frac{B}{x} \qquad x > 0$

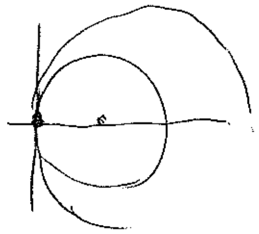
$\frac{dy}{dx} = C_1 x \qquad dy = C_1 x\,dx$

$y = D x^2 + E$

$D = 0 \quad y = E$ rette orizz.

3

21/9/09

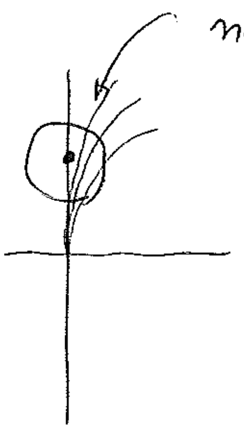


$\mathcal{C}_n : (x-n)^2 + y^2 = n^2$

$$X = \{x=0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$$

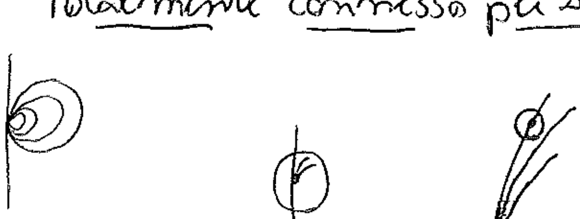
X è chiuso (top. relativa) ma non è limitato (⇒ non è compatto). È connesso per archi ⇒ è connesso. Ma non è loc. connesso per archi

non contiene nessun intorno connesso per archi



$$Y = \{x=0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{C}}_n \qquad \tilde{\mathcal{C}}_n : \left(x-\frac{1}{n}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}$$

Y è chiuso, non limitato, connesso per archi, localmente connesso per archi



$X \not\cong Y$