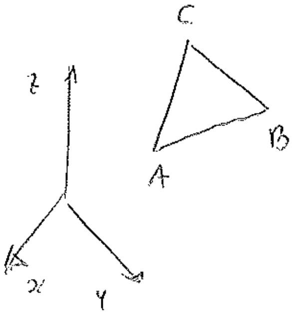
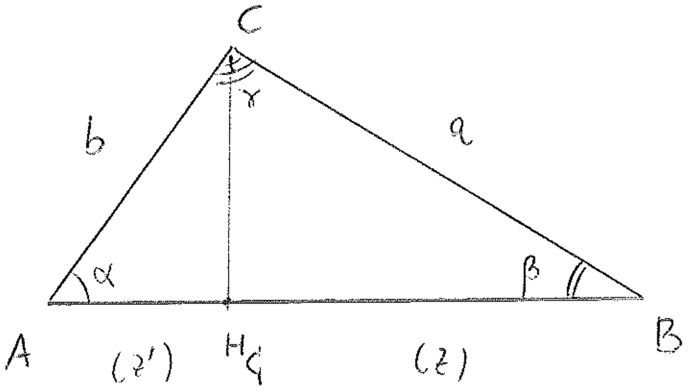
Addendum IV

Elementi di geometria
Prof. M. Spera   2010/11

Determinazione dell'ortocentro di un triangolo in $\mathbb{E}^3$ [ma il discorso è più generale]





c

$$H_c = \underbrace{\left(\frac{a}{c}\cos\beta\right)}_{z} A + \underbrace{\left(\frac{b}{c}\cos\alpha\right)}_{z'} B \qquad \text{ecc.}$$

$$z + z' = 1 \; ..$$

$$\begin{cases} \dfrac{z}{z'} = \dfrac{u}{v} = \dfrac{a}{b}\,\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} \\[2ex] \dfrac{x}{x'} = \dfrac{v}{w} = \dfrac{b}{c}\,\dfrac{\cos\gamma}{\cos\beta} \\[2ex] \dfrac{y}{y'} = \dfrac{w}{u} = \dfrac{c}{a}\,\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ analogamente:

$$\Rightarrow \quad u = \frac{a\cos\gamma}{c\cos\alpha}\, w \qquad v = \frac{b}{c}\,\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}\, w$$

$\Rightarrow$ da $u + v + w = 1$, ...

$$\left\{ 1 + \frac{\cos\gamma}{c}\left[\frac{a}{\cos\alpha} + \frac{b}{\cos\beta} \right] \right\} w = 1$$

$$\frac{\cos\gamma}{c}\left[\frac{c}{\cos\gamma} + \frac{a}{\cos\alpha} + \frac{b}{\cos\beta} \right] w = 1$$

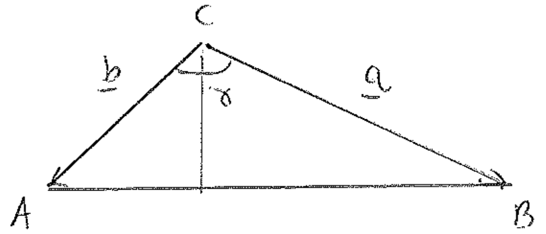
$$\Rightarrow \quad w = \frac{\dfrac{c}{\cos\gamma}}{\dfrac{a}{\cos\alpha} + \dfrac{b}{\cos\beta} + \dfrac{c}{\cos\gamma}}$$

$$\Rightarrow \quad H = uA + vB + wC \qquad \begin{cases} u = \dfrac{\dfrac{a}{\cos\alpha}}{\dfrac{a}{\cos\alpha} + \dfrac{b}{\cos\beta} + \dfrac{c}{\cos\gamma}} & (\circ) \\[2ex] v = \dfrac{\dfrac{b}{\cos\beta}}{\circ} \\[2ex] w = \dfrac{\dfrac{c}{\cos\gamma}}{\circ} \end{cases}$$

ortocentro

Se il triangolo è rettangolo ad es in A è, passando opportunamente al limite per $\alpha \to \frac{\pi}{2}$, $u = 1$, $v = w = 0$ i.e. H è in A, come è giusto che sia.

Forma alternativa:



posto poi $\underline{b} = \vec{CA}$, $\underline{a} = \vec{CB}$ etc.

è $\cos\gamma = \dfrac{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle}{a \cdot b} \Rightarrow \dfrac{c}{\cos\gamma} = \dfrac{abc}{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle}$

etc

Scelti ad es $w = \dfrac{\dfrac{abc}{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle}}{\dfrac{abc}{\langle \underline{b}, \underline{c} \rangle} + \dfrac{abc}{\langle \underline{a}, \underline{c} \rangle} + \dfrac{abc}{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle}}$

$$\Rightarrow \quad w = \frac{\dfrac{1}{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle}}{\dfrac{1}{\langle \underline{b}, \underline{c} \rangle} + \dfrac{1}{\langle \underline{a}, \underline{c} \rangle} + \dfrac{1}{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle}} =$$

$$= \left[\frac{\langle \underline{a}\, \underline{c} \rangle \langle \underline{a}\, \underline{b} \rangle + \langle \underline{b}\, \underline{c} \rangle \langle \underline{a}\, \underline{b} \rangle + \langle \underline{b}\, \underline{c} \rangle \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle}{\langle \underline{a}\, \underline{b} \rangle \langle \underline{b}, \underline{c} \rangle \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle} \right]^{-1} \cdot \frac{1}{\langle a, b \rangle}$$

$$= \frac{\langle \underline{b}\, \underline{c} \rangle \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle}{\langle \underline{a}\, \underline{c} \rangle \langle \underline{a}\, \underline{b} \rangle + \langle \underline{b}\, \underline{c} \rangle \langle \underline{a}, b \rangle + \langle \underline{b}\, \underline{c} \rangle \langle \underline{a}, c \rangle}$$

$$= \frac{\langle \underline{a}, \underline{c} \rangle \langle \underline{b}, \underline{c} \rangle}{\langle \underline{b}, \underline{a} \rangle \langle \underline{c}, \underline{a} \rangle + \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle \langle \underline{c}, \underline{b} \rangle + \langle a, \underline{c} \rangle \langle b, \underline{c} \rangle}$$

denominatore comune $(*)$

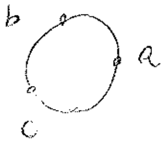
$$\Rightarrow \quad u = \frac{\langle \underline{b}, \underline{a} \rangle \langle \underline{c}, \underline{a} \rangle}{(*)}$$

$$v = \frac{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle \langle \underline{c}, \underline{b} \rangle}{(*)}$$

Add IV - 3

Per l'ortocentro, dunque [in quo $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle$ ecc]

$$\overset{(1)}{u} = \frac{\overset{(1)}{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle}\,\overset{(1)}{\langle \underline{a}, \underline{c} \rangle}}{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle + \langle \underline{b}, \underline{c} \rangle \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle + \langle \underline{c}, \underline{a} \rangle \langle \underline{c}, \underline{b} \rangle}$$



$$\overset{(2)}{v} = \frac{\overset{(2)}{\langle \underline{b}, \underline{c} \rangle}\,\overset{(2)}{\langle \underline{b}, \underline{a} \rangle}}{\circ}$$

$$\overset{(3)}{w} = \frac{\overset{(3)}{\langle \underline{c}, \underline{a} \rangle}\,\overset{(3)}{\langle \underline{c}, \underline{b} \rangle}}{\circ}$$

In particolare, per il triangolo equilatero, i prodotti scalari in questione sono tutti uguali $\Rightarrow$ $u = v = w = \frac{1}{3}$ e si trova $O = G$

★ Altro modo per determinare le coordinate baricentriche dell'<u>ortocentro</u>:

In virtù del teorema dei seni $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$

(raggio del cerchio circoscritto (circocentro)

costante

Si ha $\quad r = \dfrac{a}{\cos\alpha} \underset{\text{proporzionale}}{\propto} \dfrac{a}{\cos\alpha} \cdot \underbrace{\dfrac{\sin\alpha}{a}}_{= \frac{1}{2R}} = \tan\alpha$

ecc.

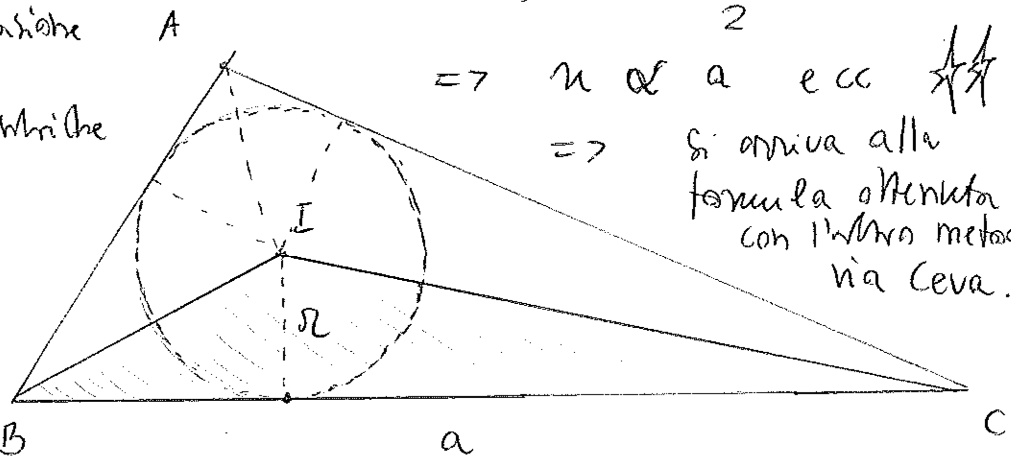
$$\Rightarrow \quad H = \frac{\tan\alpha}{\underbrace{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma}_{\circ}} A + \frac{\tan\beta}{\circ} B + \frac{\tan\gamma}{\circ} C$$

compaiono <u>solo</u> gli <u>angoli</u>

★ Altro modo per determinare le coordinate baricentriche dell'<u>incentro</u> I

area $BIC = \dfrac{a}{2} \cdot r$

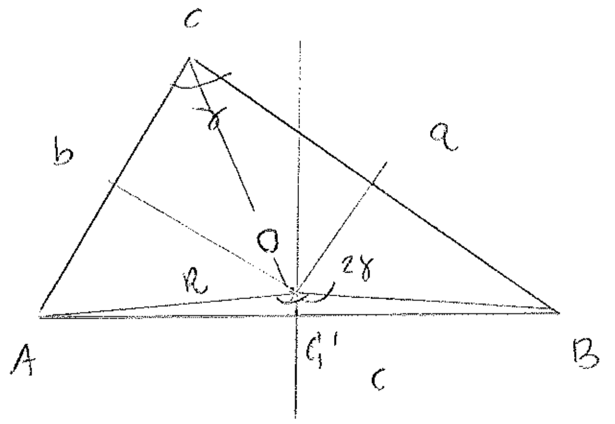
★ Si ricordi l'interpretazione geometrica delle coord. baricentriche



$\Rightarrow \quad r \propto a \quad$ ecc ★★

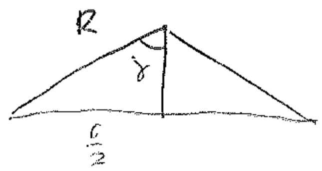
$\Rightarrow$ Si arriva alla formula ottenuta con l'altro metodo, via Ceva.

Determiniamo il circocentro di ABC
(centro del cerchio circoscritto)
raggio: R



$\frac{c}{2} = R \sin\gamma$

$\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$



Si ricordi (teorema dei seni)

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

L'area di AOB vale $\frac{c}{2} \cdot \underbrace{R\cos\gamma}_{h}$

$$= \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2\sin\gamma} \cdot \cos\gamma = \frac{c^2}{4}\operatorname{cotan}\gamma$$

ecc.

o anche

$R \cdot \frac{c}{2}\cos\gamma$

$= R^2 \sin\gamma\cos\gamma$

$= \frac{R^2}{2}\sin 2\gamma$

✱ Dall'interpretazione geometrica delle coordinate baricentriche si ha allora

$$\underset{\text{circocentro}}{O} = \frac{a^2\operatorname{cotan}\alpha}{\Sigma}A + \frac{b^2\operatorname{cotan}\beta}{\Sigma}B + \frac{c^2\operatorname{cotan}\gamma}{\Sigma}C$$

$$\Sigma = a^2\operatorname{cotan}\alpha + b^2\operatorname{cotan}\beta + c^2\operatorname{cotan}\gamma$$

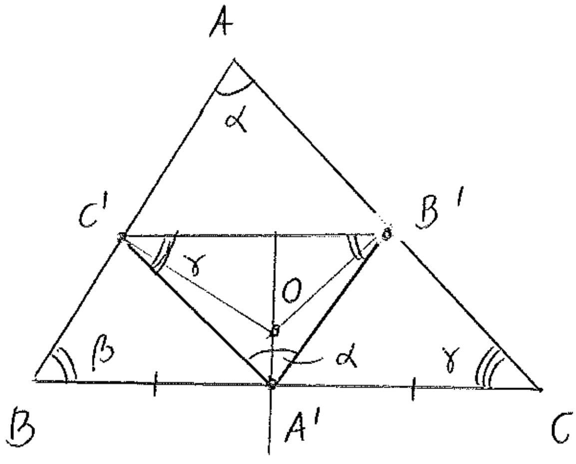
oppure

$$O = \sin 2\alpha\, A + \sin 2\beta\, B + \sin 2\gamma\, C$$

Coordinate baricentriche del circocentro (variante)

osservazione: O: circocentro di ABC

$= $ ortocentro di $A'B'C'$



$$A' = \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} C$$

$$B' = \frac{1}{2} C + \frac{1}{2} A$$

$$C' = \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B$$

$$O = \frac{\tan\alpha}{\cdot} A' + \frac{\tan\beta}{\cdot} B' + \frac{\tan\gamma}{\cdot} C'$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\tan\alpha}{\cdot}(B+C) + \frac{1}{2}\frac{\tan\beta}{\cdot}(C+A) + \frac{1}{2}\frac{\tan\gamma}{\cdot}(A+B)$$

$$= \frac{(\tan\beta + \tan\gamma)}{m} A + \frac{(\tan\gamma + \tan\alpha)}{m} B + \frac{(\tan\alpha + \tan\beta)}{m} C$$

$$m = 2(\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma)$$

Dimostriamo allora il teorema di Eulero: il

baricentro G : $[1, 1, 1]$

ortocentro H : $[\tan\alpha, \tan\beta, \tan\gamma]$

circocentro O : $[\tan\beta+\tan\gamma, \tan\alpha+\tan\gamma, \tan\alpha+\tan\beta]$

sono allineati

(la retta che li contiene è appunto detta retta di Eulero)

Formiamo un riferimento proiettivo con A, B, C, G ← punto unità

trattando le coordinate baricentriche come coordinate omogenee

i.e. lasciando cadere la limitazione $u+v+w=1$

Infatti; si consideri il det:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \tan\alpha & \tan\beta & \tan\gamma \\ \tan\beta+\tan\gamma & \tan\gamma+\tan\alpha & \tan\alpha+\tan\beta \end{vmatrix}$$

Aggiungendo la seconda riga alla terza, la prima e la terza riga divengono proporzionali, sicché $\left| \quad \right| = 0$, il che prova l'allineamento di G, H, O.

(Si noti poi che $\overline{GH} = 2\,\overline{GO}$)

4 Curiosità

La discussione precedente ci regala le seguenti identità, difficilmente intuibili a priori

$$\boxed{\text{se } \alpha+\beta+\gamma=\pi}$$

(*) $$\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma}=\frac{\tan\beta+\tan\gamma}{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma}$$ ecc. (unicità delle coordinate baricentriche)

ovvero:

(**) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin 2\alpha & \sin 2\beta & \sin 2\gamma \\ \tan\alpha & \tan\beta & \tan\gamma \end{vmatrix}=0$$ ← è ancora il teorema di Eulero

[le (*) e (**) sono equivalenti]

(**) può essere dimostrata direttamente, per ex usando $\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ ecc., ma il calcolo è laborioso