

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 25 settembre 2008

matricola nome cognome

corso di laurea anno accademico di immatricolazione

Votazione:	T1	E1
	T2	E2
		E3

Domande iniziali

- ☐ (1) Sia $\mathbf{A}$ una matrice 3×3 con $\det A \neq 0$. Si dica se 0 è un autovalore di $\mathbf{A}$.
- ☐ (2) Esistono applicazioni lineari biettive $f: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$?
- ☐ (3) Sia $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ un insieme linearmente indipendente nello spazio vettoriale V . Esiste uno scalare α in modo che l'insieme $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \alpha\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\}$ sia linearmente indipendente?

T1) Data la definizione di molteplicità algebrica m e geometrica d per l'autovalore λ della matrice quadrata $\mathbf{A}$, si dimostri che $1 \leq d \leq m$.

T2) Dati due sottospazi X e Y dello spazio vettoriale finitamente generato V , si definisca il sottospazio somma $X + Y$ e si dia una condizione necessaria e sufficiente affinché $\dim(X + Y) = \dim X + \dim Y$.

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 2\alpha & \alpha^2 & \alpha \\ 2 & 4 - \alpha & 2\alpha - 1 & 2 \\ 1 & 2 + \alpha & 3\alpha + 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = 0$ si trovi una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_0)$. Per $\alpha = 0$ si trovi una base ortogonale di $N(\mathbf{A}_0)$.

Interpretando $\mathbf{A}_\alpha$ come la matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α il sistema ha soluzione?

E2) Sia $f: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base ordinata $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4; \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1\}$ su dominio e codominio ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
- (b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f .
- (c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.
- (d) Si calcoli una base dello spazio nullo dell'applicazione lineare f .

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 \\ -1 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Per $\beta = -1$ si trovi una base di $\mathbb{C}^3$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_{-1}$.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 11 settembre 2008

matricola nome cognome

corso di laurea anno accademico di immatricolazione

Votazione:	T1	E1
	T2	E2
		E3

Domande iniziali

- ☐ (1) Sia $\mathbf{A}$ una matrice 3×3 con $\det A = 0$. Si dica se 0 è un autovalore di $\mathbf{A}$.
- ☐ (2) Esiste un'applicazione lineare suriettiva $f: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^4$?
- ☐ (3) Sia $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ una base dello spazio vettoriale V . Esiste un vettore $\mathbf{v}_4$ tale che $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4\}$ sia linearmente indipendente?

T1) Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata tale che $\mathbf{A} - \mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$. Si dica se una tale matrice può avere autovalori reali. Si scriva una matrice 3×3 con questa proprietà.

T2) Si dia la definizione di spazio vettoriale con prodotto scalare e se ne indichi un esempio importante. Si dimostri poi che ogni spazio vettoriale con prodotto scalare ammette una base ortogonale.

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & -\alpha & -2 \\ \alpha/2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -\alpha/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = -4$ si trovi una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_{-4})$. Per $\alpha = 0$ si trovi una base ortogonale di $N(\mathbf{A}_0)$.

Interpretando $\mathbf{A}_\alpha$ come la matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α il sistema ha soluzione?

E2) Sia $f: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base ordinata $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_4; \mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3; \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4\}$ su dominio e codominio ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
- (b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f .
- (c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.
- (d) Si calcoli una base dello spazio nullo dell'applicazione lineare f .

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & -1 \\ 0 & \beta & \beta \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Per $\beta = 1$ si trovi una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_1$.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 14 luglio 2008

matricola nome cognome

corso di laurea anno accademico di immatricolazione

Votazione:	T1	E1
	T2	E2
		E3

Domande iniziali

- ☐ (1) Sia $\mathbf{A}$ una matrice 3×3 di rango 1. Si dica se 0 è un autovalore di $\mathbf{A}$.
- ☐ (2) Sia $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ un insieme di generatori di V . Esiste un vettore $\mathbf{v}_4$ tale che $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3; \mathbf{v}_4\}$ sia linearmente indipendente?
- ☐ (3) Esiste un'applicazione lineare iniettiva $f: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^2$?

T1) Si dia la definizione di rango di una matrice. Si dimostri che il rango di una matrice è uguale al rango della matrice trasposta.

T2) Dopo aver dato la definizione di similitudine fra matrici, si enuncino e si dimostrino condizioni necessarie e sufficienti affinché una matrice sia simile a una matrice diagonalizzabile.

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -\alpha & -1 \\ \alpha & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -\alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = -2$ si trovi una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_{-2})$. Per $\alpha = 0$ si trovi una base ortogonale di $N(\mathbf{A}_0)$.

Interpretando $\mathbf{A}_\alpha$ come la matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α il sistema ha soluzione?

E2) Sia $f: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base ordinata $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_3; \mathbf{e}_4; \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\}$ su dominio e codominio ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
- (b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f .
- (c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.
- (d) Si calcoli una base dello spazio nullo dell'applicazione lineare f .

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta & 1 & 0 & 0 \\ \beta^2 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Per $\beta = 2$ si trovi una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_2$.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 26 giugno 2008

matricola nome cognome

corso di laurea anno accademico di immatricolazione

Votazione:	T1	E1
	T2	E2
		E3

Domande iniziali

- ☐ (1) Sia $\mathbf{A}$ una matrice 3×3 di rango 3. Si dica se 0 è un autovalore di $\mathbf{A}$.
- ☐ (2) Sia $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base di V . Esiste un vettore $\mathbf{v}_4$ tale che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ sia linearmente indipendente?
- ☐ (3) Esiste un'applicazione lineare $f: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^2$ di rango 3?

T1) Si diano le definizioni di rango, di inversa e di inversa destra e sinistra di una matrice. Si discuta l'esistenza e l'unicità di soluzioni di sistemi lineari la cui matrice dei coefficienti abbia inversa destra o sinistra.

T2) Dopo aver dato la definizione di autovalore e autovettore, si enuncino e si dimostrino condizioni necessarie e sufficienti affinché una matrice sia diagonalizzabile.

E1) Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$, la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & -\alpha & 1 \\ -\alpha & 1 & -1 & 1 \\ -1 & \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trovare, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU oppure la $P^T LU$. Per $\alpha = 2$ si trovi una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_2)$. Per $\alpha = 0$ si trovi una base ortogonale di $N(\mathbf{A}_0)$.

Interpretando $\mathbf{A}_\alpha$ come la matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α il sistema ha soluzione?

E2) Sia $f: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base ordinata $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_3; \mathbf{e}_4; \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\}$ su dominio e codominio ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
- (b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f .
- (c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.
- (d) Si calcoli una base dello spazio nullo dell'applicazione lineare f .

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta^2 & \beta \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Per $\beta = 2$ si trovi una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_2$.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 27 settembre 2007

matricola nome cognome

corso di laurea anno accademico di immatricolazione

Votazione:	T1	E1
	T2	E2
		E3

T1) Si diano le definizioni di rango, di inversa e di inversa destra e sinistra di una matrice. Si discuta l'esistenza e l'unicità di soluzioni di sistemi lineari la cui matrice dei coefficienti abbia inversa destra o sinistra.

T2) Dopo aver dato la definizione di autovalore e autovettore, si enuncino e si dimostrino condizioni necessarie e sufficienti affinché una matrice sia diagonalizzabile.

E1) Si consideri il sottospazio U_α di $\mathbb{C}^5$ generato dai vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2i \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si determini per quale valore di $\alpha \in \mathbb{C}$ il sottospazio U_α ha dimensione 3. Per $\alpha = 0$,

- (a) si calcoli una base ortogonale di U_0 ;
- (b) si completi questa base a una base ortogonale di $\mathbb{C}^5$;
- (c) si trovi la proiezione ortogonale del vettore $[2i \ i \ 3 \ 0 \ 1]^T$ su U_0 .

E2) Sia $f: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base ordinata $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_3; \mathbf{e}_4; \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\}$ su dominio e codominio ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
- (b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f .
- (c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.
- (d) Si calcoli una base dello spazio nullo dell'applicazione lineare f .

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\beta & -b \\ 2 & -1 & \beta & 0 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Si dica per quali valori del parametro β esiste una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$ e la si determini.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 11 settembre 2007

matricola nome cognome

corso di laurea anno accademico di immatricolazione

Votazione:	T1	E1
	T2	E2
		E3

T1) Si diano le definizioni di rango, di inversa e di inversa destra e sinistra di una matrice. Si enunci e si dimostri una condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice $\mathbf{A}$ di forma $m \times n$ abbia inversa.

T2) Dopo aver dato la definizione di autovalore e autovettore, si enuncino e si dimostrino condizioni necessarie e sufficienti affinché, data la matrice $\mathbf{A}$ di forma $n \times n$, esista una base di $\mathbb{C}^n$ formata da autovettori di $\mathbf{A}$.

E1) Si consideri il sottospazio U_α di $\mathbb{C}^5$ generato dai vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ i \\ -1 \\ \alpha - 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 - \alpha \\ i \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ \alpha - 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} \alpha - 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si determini per quale valore di $\alpha \in \mathbb{C}$ il sottospazio U_α ha dimensione 3 e, per questo valore,

- (a) si calcoli una base ortogonale di U_α ;
- (b) si completi questa base a una base ortogonale di $\mathbb{C}^4$;
- (c) si trovi la proiezione ortogonale del vettore $[2i \ i \ 3 \ 0]^T$ su U_α .

E2) Sia $f: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base ordinata $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_3; \mathbf{e}_4; \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3\}$ su dominio e codominio ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
- (b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f .
- (c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.
- (d) Si calcoli una base dello spazio nullo dell'applicazione lineare f .

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & \beta^2 & -2 + 2\beta & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2\beta - 3 & -\beta + 1 & 1 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Si dica per quali valori del parametro β esiste una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$ e la si determini.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 5 luglio 2007

matricola nome cognome

corso di laurea anno accademico di immatricolazione

Votazione:	T1	E1
	T2	E2
		E3

T1) Si diano le definizioni di rango, di inversa e di inversa destra e sinistra di una matrice. Si enunci e si dimostri una condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice $\mathbf{A}$ di forma $m \times n$ abbia inversa.

T2) Dopo aver dato la definizione di autovalore e autovettore, si enuncino e si dimostrino condizioni necessarie e sufficienti affinché, data la matrice $\mathbf{A}$ di forma $n \times n$, esista una base di $\mathbb{C}^n$ formata da autovettori di $\mathbf{A}$.

E1) Si consideri il sottospazio U_α di $\mathbb{C}^5$ generato dai vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ i \\ -1 \\ \alpha - 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 - \alpha \\ i \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \alpha - 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ \alpha - 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si determini per quale valore di $\alpha \in \mathbb{C}$ il sottospazio U_α ha dimensione 3 e, per questo valore,

- (a) si calcoli una base ortogonale di U_α ;
- (b) si completi questa base a una base ortogonale di $\mathbb{C}^4$;
- (c) si trovi la proiezione ortogonale del vettore $[2i \ i \ 3 \ 0]^T$ su U_α .

E2) Sia $f: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base ordinata $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_3; \mathbf{e}_4; \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3\}$ su dominio e codominio ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
- (b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f .
- (c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.
- (d) Si calcoli una base dello spazio nullo dell'applicazione lineare f .

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & \beta^2 & -2 + 2\beta & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2\beta - 3 & -\beta + 1 & 1 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Si dica per quali valori del parametro β esiste una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$ e la si determini.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 13 dicembre 2007 — Compito B

matricola nome cognome

corso di laurea anno accademico di immatricolazione

Votazione:	T1	E1
	T2	E2
		E3

Domande iniziali

1 – Siano $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. È vero che $\mathbf{v}$ è un autovettore di $\mathbf{A}$? Se sì, per quale autovalore?

2 – Sia $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2\}$ un insieme linearmente indipendente nello spazio vettoriale V . L'insieme $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\}$ è linearmente indipendente?

3 – Esiste una matrice $\mathbf{A}$, 3×4 , di rango 4?

Scrivere chiaramente sul primo foglio le risposte alle domande iniziali, con una breve giustificazione. Non saranno presi in considerazione compiti in cui manchino le risposte a queste domande.

T1) Si diano le definizioni di rango, di inversa e di inversa destra e sinistra di una matrice. Si dimostri una condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice abbia inversa sinistra.

T2) Dato un insieme linearmente indipendente $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n\}$ nello spazio vettoriale euclideo V , si dimostri che esiste un insieme ortonormale $\{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \dots; \mathbf{u}_n\}$ tale che, per $1 \leq i \leq n$, $\langle \mathbf{v}_1; \dots; \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{u}_1; \dots; \mathbf{u}_i \rangle$.

E1) Sia α un numero complesso e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2\alpha & 1 \end{bmatrix}.$$

- Trovare una decomposizione LU di $\mathbf{A}_\alpha$ e, dove non è possibile, la decomposizione $P^T L U$.
- Per $\alpha = 0$, trovare una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_0)$.
- Per $\alpha = 1$, trovare la proiezione ortogonale su $N(\mathbf{A}_1)$ di $[-1 \ 0 \ 2 \ 1]^T$.
- Interpretando $\mathbf{A}_\alpha$ come la matrice completa di un sistema, si dica per quali valori di α il sistema ammette soluzione.

E2) L'applicazione lineare $f: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ ha come matrice associata, rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ di $\mathbb{C}^3$ su dominio e codominio, la matrice

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sapendo che

$$\mathbf{v}_1 = [1 \ 1 \ -1]^T, \quad \mathbf{v}_2 = [1 \ 1 \ 1]^T, \quad \mathbf{v}_3 = [-1 \ 3 \ 5]^T,$$

si calcoli la dimensione dell'immagine di f e si dica se il vettore $[0 \ 2 \ 4]^T$ appartiene all'immagine di f .

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & \beta & -2\beta & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Per tali valori di β trovare una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$ e si scrivano le matrici $\mathbf{S}$ e $\mathbf{D}$ tali che $\mathbf{B}_\beta = \mathbf{S} \mathbf{D} \mathbf{S}^{-1}$

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 19 giugno 2007

matricola nome cognome

corso di laurea anno accademico di immatricolazione

Votazione:	T1	E1
	T2	E2
		E3

T1) Si diano le definizioni di rango e di inversa destra e sinistra di una matrice. Si enunci e si dimostri una condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice $\mathbf{A}$ di forma $m \times n$ abbia inversa destra.

T2) Si dimostrino condizioni necessarie e sufficienti affinché, data la matrice $\mathbf{A}$ di forma $n \times n$, esista una base di $\mathbb{C}^n$ formata da autovettori di $\mathbf{A}$.

E1) Si consideri il sottospazio U_α di $\mathbb{C}^5$ generato dai vettori

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} i \\ \alpha \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ -1 \\ -\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2i \\ -1 \\ -5 \\ -1 \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -\alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} i \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si determini per quale valore di $\alpha \in \mathbb{C}$ il sottospazio U_α ha dimensione 3 e, per questo valore,

- (a) si calcoli una base ortogonale di U_α ;
- (b) si completi questa base a una base ortogonale di $\mathbb{C}^5$.

E2) Sia $f: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$ una trasformazione lineare e si supponga che la matrice associata a f rispetto alla base ordinata $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_4; \mathbf{e}_3; \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2; \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3\}$ su dominio e codominio ($\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{C}^4$) sia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Si determini la matrice $\mathbf{B}$ associata a f rispetto alle basi canoniche.
- (b) Si calcoli la dimensione dell'immagine di f .
- (c) Si dica se la matrice $\mathbf{B}$ è diagonalizzabile.
- (d) Si calcoli una base dello spazio nullo dell'applicazione lineare f .

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & \beta^2 & -2 - 2\beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2\beta - 3 & \beta + 1 & 1 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Si dica per quali valori del parametro β esiste una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$ e la si determini.

Università degli studi di Verona
Dipartimento di Informatica — Settore di Matematica
Prova scritta di Algebra lineare — 13 dicembre 2007 — Compito A

matricola nome cognome

corso di laurea anno accademico di immatricolazione

Votazione:	T1	E1
	T2	E2
		E3

Domande iniziali

1 – Siano $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. È vero che $\mathbf{v}$ è un autovettore di $\mathbf{A}$? Se sì, per quale autovalore?

2 – Sia $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2\}$ un insieme linearmente indipendente nello spazio vettoriale V . L'insieme $\{\mathbf{v}_1; 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_2\}$ è linearmente indipendente?

3 – Esiste una matrice $\mathbf{A}$, 3×2 , di rango 3?

Scrivere chiaramente sul primo foglio le risposte alle domande iniziali, con una breve giustificazione. Non saranno presi in considerazione compiti in cui manchino le risposte a queste domande.

T1) Si diano le definizioni di rango, di inversa e di inversa destra e sinistra di una matrice. Si dimostri una condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice abbia inversa sinistra.

T2) Dato un insieme linearmente indipendente $\{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \dots; \mathbf{v}_n\}$ nello spazio vettoriale euclideo V , si dimostri che esiste un insieme ortonormale $\{\mathbf{u}_1; \mathbf{u}_2; \dots; \mathbf{u}_n\}$ tale che, per $1 \leq i \leq n$, $\langle \mathbf{v}_1; \dots; \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{u}_1; \dots; \mathbf{u}_i \rangle$.

E1) Sia α un numero complesso e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2\alpha & 1 \end{bmatrix}.$$

- Trovare una decomposizione LU di $\mathbf{A}_\alpha$ e, dove non è possibile, la decomposizione $P^T LU$.
- Per $\alpha = 0$, trovare una base ortogonale di $C(\mathbf{A}_0)$.
- Per $\alpha = 1$, trovare la proiezione ortogonale su $N(\mathbf{A}_1)$ di $[-1 \ 0 \ 2 \ 1]^T$.
- Interpretando $\mathbf{A}_\alpha$ come la matrice completa di un sistema, si dica per quali valori di α il sistema ammette soluzione.

E2) L'applicazione lineare $f: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ ha come matrice associata, rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ di $\mathbb{C}^3$ su dominio e codominio, la matrice

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sapendo che

$$\mathbf{v}_1 = [1 \ 1 \ 1]^T, \quad \mathbf{v}_2 = [1 \ 1 \ -1]^T, \quad \mathbf{v}_3 = [-1 \ 3 \ 5]^T,$$

si calcoli la dimensione dell'immagine di f e si dica se il vettore $[1 \ 0 \ 1]^T$ appartiene all'immagine di f .

E3) Si determini per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & -\beta & 2\beta & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile. Per tali valori di β trovare una base di $\mathbb{C}^4$ formata da autovettori di $\mathbf{B}_\beta$ e si scrivano le matrici $\mathbf{S}$ e $\mathbf{D}$ tali che $\mathbf{B}_\beta = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$