

# GEOMETRIA - Prova scritta del 15 febbraio 2011

(Prof. M. Spura)

① Si consideri la superficie  $\Sigma$  ottenuta ruotando

$$\ell: z = x - x^2, \quad x \in (0,1) \text{ attorno all'asse } x.$$

Si ne calcolino in un generico pto le curvature principali e la curvatura gaussiana.

② Si consideri l'ellissoide triassiale  $\Sigma: 3x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$

$$\text{e la curva } \mathcal{C} = \Sigma \cap \pi, \quad \pi: x - y = 0.$$

Si calcolino la curvatura  $K(\mathcal{C})$  e la curvatura geodetica  $K_g(\mathcal{C})$  di  $\mathcal{C}$  in  $P: \left( \frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \in \mathcal{C}$ ,

facendo uso del calcolo implicito.  $\mathcal{C}$  è una geodetica di  $\Sigma$ ?

③ Sia  $X = \mathbb{R}$  e  $\mathcal{C} = \{ \phi, X, \{x > a\}_{a \in \mathbb{R}} \}$

verificare che  $\mathcal{C}$  è una topologia su  $\mathbb{R}$ . È di

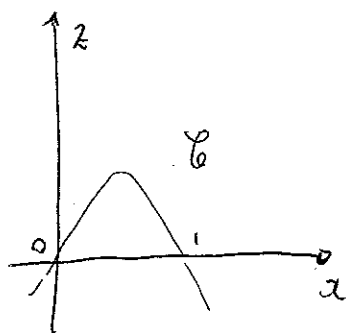
Hausdorff? Esiste una metrica  $d$  su  $X$

che induca la topologia data?

Tempo a disposizione: 2h

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

②



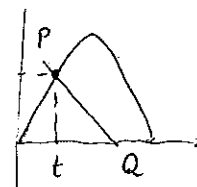
$$z = x(1-x) \\ = x - x^2$$

Geometria

15 febbraio 2011

$t \in (0,1)$

calcoliamo  $K$  su un  
generico parallelo



curv. di  $G$  (curv. meridiana  $G_m$   
della sup. ottenuta dalla rotazione di  $G$

attorno all'asse  $x$ )

$$K = K(t) = \frac{\ddot{z}}{(1 + \dot{z}^2)^{3/2}}$$

$$z = t - t^2 \\ \dot{z} = 1 - 2t \\ \ddot{z} = -2$$

$$K = K_m = \frac{-2}{[1 + (1-2t)^2]^{3/2}} = \frac{-2}{(1 + 1 - 4t + 4t^2)^{3/2}} \\ = - \frac{2}{(4t^2 - 4t + 2)^{3/2}} = - \frac{2}{(2t^2 - 2t + 1)^{3/2}} \cdot \frac{1}{2^{3/2}} \\ = - \frac{1}{2^{1/2} (2t^2 - 2t + 1)^{3/2}}$$

non normale.

retta per  $P: (t, t-t^2)$  normale a  $G$

$$z - (t - t^2) = - \frac{1}{1-2t} (x - t)$$

$$m^\perp = - \frac{1}{m}$$

Q: si pone  $z=0$

$$x - t = (1-2t)(t-t^2) \\ = t - 2t^2 - t^2 + 2t^3 \\ = 2t^3 - 3t^2 + t$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(2t^3 - 3t^2 + t)^2 + (t - t^2)^2}$$

$$= \sqrt{4t^6 + 9t^4 + t^2 - 12t^5 + 4t^4 - 6t^3 + t^2 + t^4 - 2t^3}$$

$$= \sqrt{4t^6 - 12t^5 + 14t^4 - 8t^3 + 2t^2}$$

$$= \sqrt{2t} \cdot \sqrt{2t^4 - 6t^3 + 7t^2 - 4t + 1}$$

$$R_2 = \frac{1}{\overline{PQ}} = \frac{1}{\sqrt{2t} \sqrt{2t^4 - 6t^3 + 7t^2 - 4t + 1}}$$

$$K = R_1 R_2 = \frac{1}{2t(2t^2 - 2t + 1)^{3/2} (2t^4 - 6t^3 + 7t^2 - 4t + 1)^{1/2}} > 0$$

(come  
i  
photo  
che  
fin)

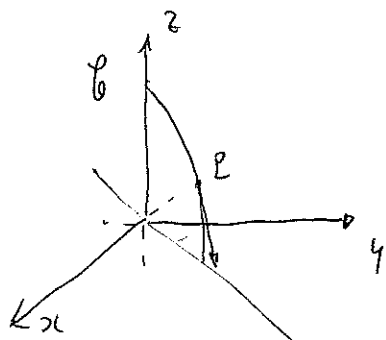
2

$$\mathcal{C} = \begin{cases} 3x^2 + 2y^2 + z^2 = 1 & \text{ellissoide triassiale} \\ x - y = 0 & \text{piano} \end{cases}$$

ellisse

geometria

15 febbraio 2011



$$P: \left( \frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

(controllo:  $3 \frac{1}{4 \cdot 5} + 2 \frac{1}{20} + \frac{3}{4} = 1$ )

$$\left( \frac{5}{20} + \frac{3}{4} = 1 \quad \checkmark \right)$$

"  $\frac{1}{4}$

calcoliamo  $R(P)$  e  $R_g(P)$

facendo uso del calcolo implicito

derivando succ. rispetto a  $s$   
(curva curvilinea)

$$\begin{cases} 3xx' + 2yy' + zz' = 0 \\ x' = y' \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x'^2 + 2y'^2 + z'^2 + 3xx'' + 2yy'' + zz'' = 0 \\ x'' = y'' \end{cases}$$

matrice:

( $x = x(s)$  etc.,

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

$$2x'x'' + 2y'y'' + 2z'z'' = 0$$

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0$$

$$R = \|r''\|$$

$$3 \frac{1}{2\sqrt{5}} x' + 2 \frac{1}{2\sqrt{5}} y' + \frac{\sqrt{3}}{2} z' = 0$$

$$\sqrt{5}x' + \sqrt{3}z' = 0$$

$$z' = -\sqrt{\frac{5}{3}}x'$$

$$z' = -\sqrt{\frac{5}{3}} \sqrt{\frac{3}{11}} = -\sqrt{\frac{5}{11}}$$

( $x' = y'$ )

$$2x'^2 + z'^2 = 1$$

$$2x'^2 + \frac{5}{3}x'^2 = 1$$

$$\frac{11}{3}x'^2 = 1$$

$$x' = \pm \sqrt{\frac{3}{11}}$$

$$\leadsto x' = +\sqrt{\frac{3}{11}} = y'$$

$$r' = \left( \frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$r' = \left( \sqrt{\frac{3}{11}}, \sqrt{\frac{3}{11}}, -\sqrt{\frac{5}{11}} \right) \quad \|r'\| = 1$$

OK

Proseguiamo

$$9 + 6 + 5 = 20$$

$$3 \cdot \frac{3}{11} + 2 \cdot \frac{3}{11} + \frac{5}{11} + 3 \frac{1}{2\sqrt{5}} x'' + 2 \frac{1}{2\sqrt{5}} y'' + \frac{\sqrt{3}}{2} z'' = 0$$

$$2 \cdot 11 \quad \frac{20}{11} + \frac{\sqrt{5}}{2} x'' + \frac{\sqrt{3}}{2} z'' = 0$$

$$40 + 11\sqrt{5} x'' + 11\sqrt{3} z'' = 0$$

$$\sqrt{\frac{3}{11}} x'' + \sqrt{\frac{3}{11}} y'' - \sqrt{\frac{5}{11}} z'' = 0$$

$$2\sqrt{3} x'' - \sqrt{5} z'' = 0$$

$$z'' = 2\sqrt{\frac{3}{5}} x''$$

$$\times \sqrt{5} \quad 40 + 11\sqrt{5} x'' + 11\sqrt{3} \cdot 2 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} x'' = 0$$

$$40\sqrt{5} + (55 + 66) x'' = 0$$

$$40\sqrt{5} + 121 x'' = 0$$

$$x'' = - \frac{40\sqrt{5}}{121} = - \frac{40}{121} \sqrt{5}$$

$$z'' = -2 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{40\sqrt{5}}{121} = - \frac{80}{121} \sqrt{3}$$

$$\underline{r}'' = \left( -\frac{40}{121} \sqrt{5}, -\frac{40}{121} \sqrt{5}, -\frac{80}{121} \sqrt{3} \right)$$

$$\rho = \|\underline{r}''\|; \|\underline{r}''\|^2 = 2 \cdot \frac{40^2}{121^2} \cdot 5 + \frac{80^2}{121^2} \cdot 3 = \frac{4^2 \cdot 10^3}{11^4} + \frac{4^4 \cdot 10^2 \cdot 3}{11^4}$$

$$= 4^2 \frac{10^2}{11^4} \left[ 10 + \frac{4^2 \cdot 3}{48} \right] = \left( \frac{40}{121} \right)^2 \cdot 58 \Rightarrow \|\underline{r}''\| = \rho = \frac{40}{121} \sqrt{58}$$

Calcoliamo  $\langle \underline{N}, \underline{b} \rangle$  in  $\mathbb{R}$

$$\underline{N}: 3x^2 + 2y^2 + z^2 = 1 \quad \equiv f(x, y, z) = 1$$

$$\underline{N} \propto \nabla f \quad \nabla f = (6x, 4y, 2z)$$

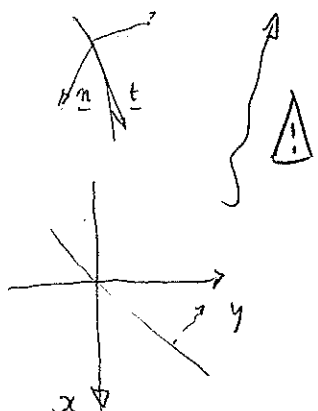
$$\underline{N} = \frac{\left( 6 \frac{1}{2\sqrt{5}}, 4 \frac{1}{2\sqrt{5}}, 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{\| \quad \|} = \frac{\left( \frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \sqrt{3} \right)}{\| \quad \|} \quad \text{norm. vettore}$$

$$= \frac{(3, 2, \sqrt{15})}{\parallel \parallel}$$

$$\parallel \parallel = \sqrt{\underbrace{3^2}_9 + \underbrace{2^2}_4 + \underbrace{15}_{15}} = \sqrt{28} = \sqrt{4 \cdot 7} = 2\sqrt{7}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{7}} (3, 2, \sqrt{15}) \equiv \underline{N}(P)$$

$$\underline{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 1, 0)$$



$$\langle \underline{N}, \underline{b} \rangle(P) = \frac{1}{2\sqrt{14}} (-3 + 2) = -\frac{1}{2\sqrt{14}}$$

$$R_g = -\frac{1}{2\sqrt{14}} \cdot \left( \frac{40}{121} \right) \sqrt{58} = -\frac{20}{121} \sqrt{\frac{58}{14}}$$

$$= -\frac{20}{121} \sqrt{\frac{29}{7}} \quad \left( \sim -\frac{1}{6} \cdot 4 \sim -\frac{2}{3} \right)$$

(E non è una quadrica?)

3

geometria  
15 febbraio 2011

$$X = \mathbb{R}$$

$$\mathcal{G} = \{ \text{---} \} \quad \text{semirette destre aperte}$$

$$\{x > a\} \quad a \in \mathbb{R} \quad \cup X \cup \emptyset$$

(Top. di Alexandroff)

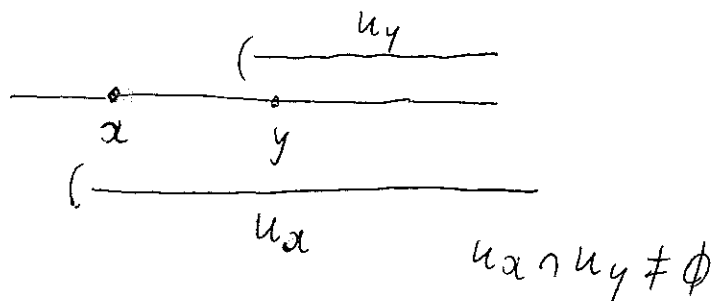
$\mathcal{G}$  è una topologia : l'unione di un # arbitrario di semirette aperte è una semiretta aperta

$$(a = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} a_{\alpha})$$

in senso generalizzato

l'intersezione finita di semirette aperte è una semiretta aperta.

Non è di Hausdorff :



Non esiste nessun metrica che induce la stessa topologia, poiché uno spazio metrico è sempre di Hausdorff.