Appunti del corso di
GEOMETRIA (Prof. M. Spera)

Lezione IV

☆ Richiamo [cf. corso di Analisi II]

una funzione

$$\underline{r} : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad (\text{o } \mathbb{R}^2)$$

$$t \longmapsto \underline{r}(t)$$

è detta

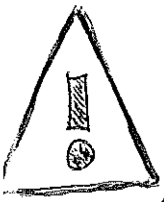
curva (parametrica) regolare — spaziale (in $\mathbb{R}^3$), piana (in $\mathbb{R}^2$)

se valgono le seguenti condizioni:

1. $\underline{r}$ è di classe $\mathcal{C}^1$
   (i.e. continua assieme alla sua derivata, ottenuta componente per componente)

2. $\underline{r}$ è iniettiva [si parla di curva semplice]
   $(t_1 \neq t_2 \Rightarrow \underline{r}(t_1) \neq \underline{r}(t_2))$

3. $\dot{\underline{r}}(t) \neq \underline{0} \quad \forall t \in (a,b)$ $\left[\dot{} = \frac{d}{dt} \right]$
   velocità



in molti testi questa è la condizione di regolarità propriamente detta

☆ In altre parole $\underline{r}$ è regolare se è iniettiva e se la retta tangente esiste e varia con continuità nell'intervallo di definizione.

[talvolta, con abuso di linguaggio, si identifica una curva col suo sostegno (ossia con l'immagine della funzione che la individua]

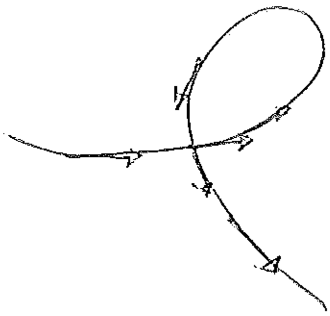
Osservazioni:

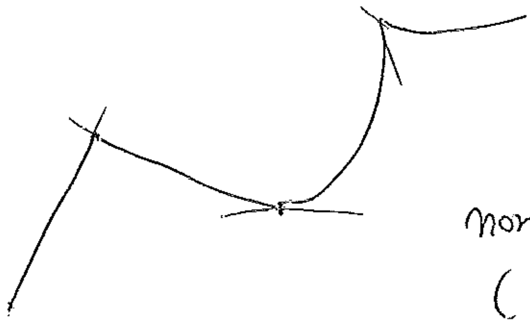
★ 3. implica la <u>locale</u> iniettività

$$\left[\because\ f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a) \quad \text{(teorema di Lagrange)}\right]$$

si lavori componente per componente

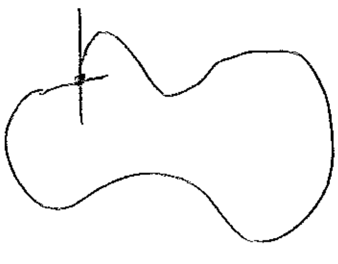
ma $3 \not\Rightarrow 2$!:





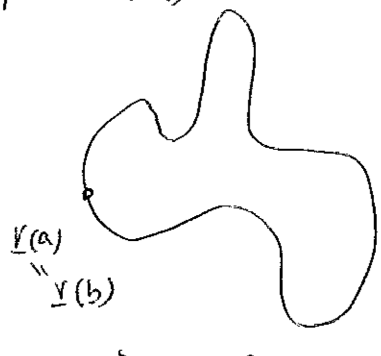
★ non è regolare
(lo è <u>a</u> <u>tratti</u>..)

★ per una curva <u>chiusa</u> (def. su $[a,b]$)
$\underline{r}(a) = \underline{r}(b)$



non è regolare

$\dot{\underline{r}}_-(b) \neq \dot{r}_+(a)$



è regolare

$\dot{\underline{r}}_-(b) = \dot{r}_+(a)$

☆ retta tangente a $\mathscr{C}$ in P_0 $(\equiv \underline{r}(t_0))$

$$\underline{R}(t) = \underset{\underset{\underline{r}(t_0)}{|||}}{\underline{r}_0} + (t-t_0)\,\overset{\circ}{\underline{r}}_0 \qquad \overset{\circ}{\underline{r}}_0 \equiv \overset{\circ}{\underline{r}}(t_0)$$

☆ Notazione classica [molto espressiva la useremo spesso]

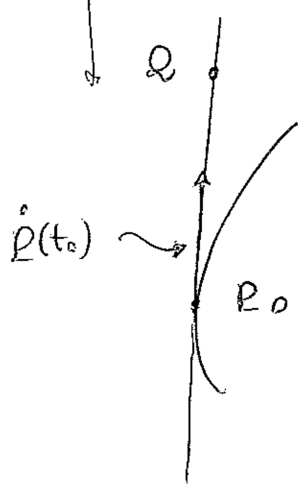
$$\underline{P} = \underline{P}(t) \quad (\equiv \underline{r}(t))$$

$$\overset{\circ}{\underline{P}} = \overset{\circ}{\underline{P}}(t) \quad (\equiv \overset{\circ}{\underline{r}}(t))$$

retta tangente a $\mathscr{C}$ in P_0 $\qquad Q = Q(t)$

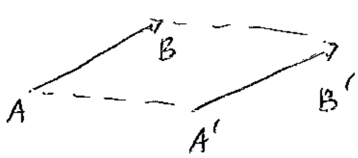
⚠ $$Q - P_0 = (t-t_0)\,\overset{\circ}{P}(t_0)$$

$$Q = P_0 + (t-t_0)\,\overset{\circ}{P}(t_0)$$



$\overrightarrow{AB} \equiv B - A$ formale!

vettore: classe di equipollenza di segmenti orientati



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$

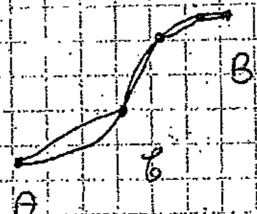
Appunti del corso di GEOMETRIA (Prof. M. Spera)

Lezione IV

◇ Richiami sulla lunghezza d'arco

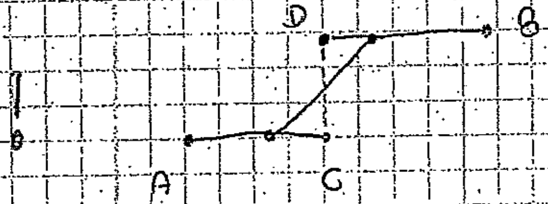
- Determineremo un parametro "naturale" sulle curve spaziali, l'ascissa curvilinea (... lunghezza ...)

- In modo informale la lunghezza dell'arco

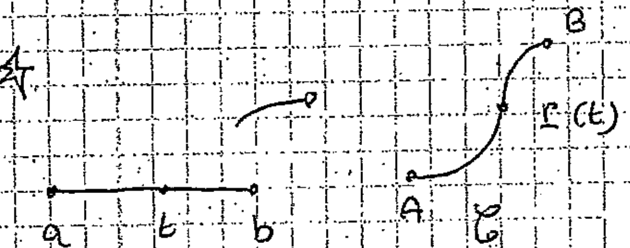


di curva $\mathcal{C}$ compreso tra A e B è l'estremo superiore delle lunghezze delle spezzate inscritte in $\mathcal{C}$.

- $\mathcal{C}$ va supposta almeno continua:



$$\sup\{\text{lunghezze delle spezzate}\} = \overline{AC} + \overline{DB} + \overline{CD}$$

- 

$$\underline{r} = \underline{r}(t)$$
$$\underline{r} \in \mathcal{C}^1([a,b])$$

Intuitivamente si ha

$$L(\mathcal{C}) = \int_a^b \|\dot{\underline{r}}(t)\|\, dt$$

$$\left(dL = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{1}{2}}\, dt \right.$$

e L è invariante per riparametrizzazione

v. pag IV-10

☆ premettiamo, per uso futuro, alcune nozioni di calcolo differenziale per funzioni vettoriali

Sia $\underline{v} : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ $\qquad \underline{v} \in \mathcal{C}^1(a,b)$

$t \mapsto \underline{v}(t)$

☆ Proposizione Sia $\| \underline{v}(t) \| =$ costante, $t \in (a,b)$

Allora $< \dot{\underline{v}}(t) \mid \underline{v}(t) > = 0 \quad \forall\, t \in (a,b)$

Dim. $\| \underline{v}(t) \|^2 = < \underline{v}(t) \mid \underline{v}(t) > =$ cost.

Derivando si ha $< \dot{\underline{v}}(t) \mid \underline{v}(t) > + < \underline{v}(t) \mid \dot{\underline{v}}(t) >$

$= \quad 2 < \dot{\underline{v}}(t) \mid \underline{v}(t) > \; = \; 0$

[in generale $\dot{\widehat{< \underline{a} \mid \underline{b} >}} = < \dot{\underline{a}} \mid \underline{b} > + < \underline{a} \mid \dot{\underline{b}} >$]

☆ Consideriamo una funzione a valori matriciali

Sia $A = A(t) \quad t \in (a,b) \qquad A \in \mathcal{C}^1(a,b)$

$A(t) \in \mathrm{Mat}\,(n \times n)$

Calcoliamo $\frac{d}{dt} \det A(t)$

☆ Proposizione

$$\dot{\overbrace{\left| \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \right|}} = \sum_{i=1}^{n} \left| \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \cdots \underset{i}{\dot{\widehat{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}}} \cdots \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \right|$$

Per esempio, se $\underline{n=2}$ è

$$\overset{\circ}{\widetilde{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}} = \overset{\circ}{\widetilde{(ad - bc)}} = \overset{\circ}{a}d + a\overset{\circ}{d} - \overset{\circ}{b}c - b\overset{\circ}{c} =$$

$$= \overset{\circ}{a}d - \overset{\circ}{b}c + a\overset{\circ}{d} - b\overset{\circ}{c} =$$

$$= \begin{vmatrix} \overset{\circ}{a} & b \\ \overset{\circ}{c} & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & \overset{\circ}{b} \\ c & \overset{\circ}{d} \end{vmatrix}.$$

<u>In generale</u> si usa la formula

$$\boxed{\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \underbrace{(-1)^{\sigma}}_{\text{segno della permutazione } \sigma} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}}$$

$$\overset{\circ}{\widetilde{\det A}} = \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \overset{\circ}{\widetilde{a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}}} =$$

$$= \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \sum_{j=1}^{n} a_{1\sigma(1)} \cdots \overset{\circ}{a}_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} a_{1\sigma(1)} \cdots \overset{\circ}{a}_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

da cui l'asserto.

☆ <u>Proposizione</u>: in $\mathbb{R}^3$ si ha ($\underline{v}, \underline{w} \in \mathcal{C}^1(a,b)$)

$$\overset{\circ}{\widetilde{\underline{v} \times \underline{w}}} = \overset{\circ}{\underline{v}} \times \underline{w} + \underline{v} \times \overset{\circ}{\underline{w}}$$

<u>Dim.</u> Calcolo diretto ... si ricordi che

$$\underline{v} \times \underline{w} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

☆ <u>Teorema</u> Sia $\underline{v} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$,

$\underline{v} \in \mathcal{C}^1([a,b])$. Si ha

☆ $$\boxed{\left\| \int_a^b \underline{v}(t) \right\|} \le \int_a^b \|\underline{v}(t)\| \, dt$$

si integra componente per componente

<u>Dim</u>

Sia $\underline{c} := \int_a^b \underline{v}(t)\, dt$ se $\underline{c} = \underline{0}$ la ☆ è

ovvia. Sia $\underline{c} \neq \underline{0}$

$$\|\underline{c}\|^2 = \langle \underline{c} \mid \underline{c} \rangle = \langle \underline{c} \mid \int_a^b \underline{v}(t)\, dt \rangle =$$

$$= \int_a^b \langle \underline{c} \mid \underline{v}(t) \rangle \, dt \le \int_a^b \|\underline{c}\| \, \|\underline{v}(t)\| \, dt$$

$$= \|\underline{c}\| \cdot \int_a^b \|\underline{v}(t)\| \, dt$$

$\Rightarrow$ dividendo per $\|\underline{c}\| > 0$ si ha l'asserto $\square$

Sia $\mathscr{C}$: $\underline{r} = \underline{r}(t)$ $t \in [a,b]$

$\underline{r} \in \mathscr{C}^1([a,b])$

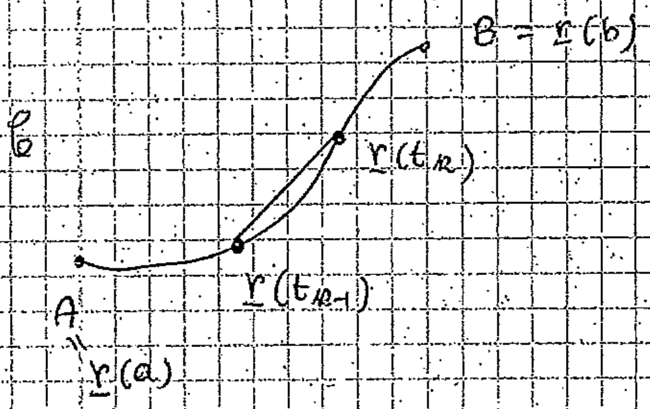
Sia $\mathscr{P} = \{t_0 = a, t_1, t_2, \dots t_n = b\}$

con $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$

una partizione di $[a,b]$

La lunghezza della spezzata inscritta in $\mathscr{C}$ corrispondente a $\mathscr{P}$ è

$$|\pi(\mathscr{P})| := \sum_{k=1}^{n} \| \underline{r}(t_k) - \underline{r}(t_{k-1}) \|$$



L = lunghezza di $\mathscr{C}$ (tra A e B)

$$:= \sup_{\mathscr{P}} |\pi(\mathscr{P})| \equiv \Lambda(a,b)$$

Proposizione. Nelle ipotesi fatte ($\underline{r} \in \mathscr{C}^1[a,b]$)

$\Lambda(a,b)$ è finita

(una curva di lunghezza finita è detta rettificabile)

Dim. $\quad |\pi(P)| = \sum_{k=1}^{n} \| \underline{r}(t_k) - \underline{r}(t_{k-1}) \| =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{\underline{r}}(t)\, dt \right\|$$

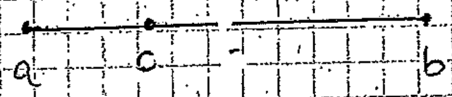
(teor. fond. del calcolo: $\left(f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, dt \right)$)

$$\le \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \| \dot{\underline{r}}(t) \|\, dt = \int_a^b \| \dot{\underline{r}}(t) \|\, dt$$

$$\Rightarrow \Lambda(a,b) = \sup_{P} |\pi(P)| \le \int_a^b \| \dot{\underline{r}} \|\, dt < \infty$$

Proposizione Λ è additiva

$$\Lambda(a,b) = \Lambda(a,c) + \Lambda(c,b)$$

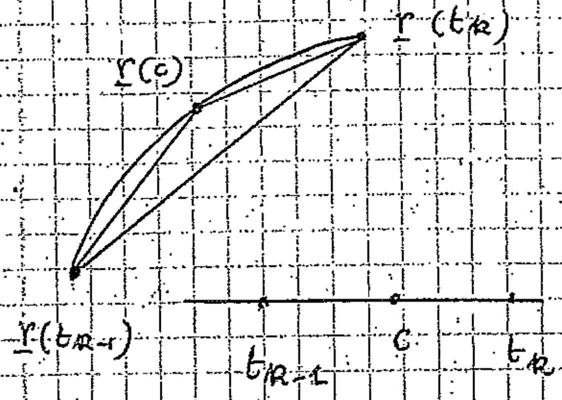


Dim.

Sia P una qualsiasi partizione di $[a,b]$. Siano P_1, P_2 le partizioni indotte su $[a,c]$ e $[c,b]$, rispettivamente e sia $P_1 \cup P_2$ la partizione che si ottiene aggiungendo c a P (se c già fa parte di P è $P_1 \cup P_2 = P$ ..)

Si ha (per la dis. triangolare)

$$|\pi(P)| \le |\pi(P_1)| + |\pi(P_2)|$$



$$\Rightarrow \quad |\pi(P)| \le \sup_{\substack{P_1 \\ \left(\text{part. di } [a,c]\right)}} |\pi(P_1)| + \sup_{\substack{P_2 \\ \left(\text{part. di } [c,b]\right)}} |\pi(P_2)|$$

$$= \Lambda(a,c) + \Lambda(c,b)$$

$$\Rightarrow \quad \Lambda(a,b) \le \Lambda(a,c) + \Lambda(c,b)$$

Facciamo vedere ora che vale $\ge$

Sia P una partizione contenente c e siano P_1, P_2 le partizioni indotte su $[a,c]$ e $[c,b]$.
Si ha:

$$|\pi(P)| = |\pi(P_1)| + |\pi(P_2)| \le \Lambda(a,b)$$

$$\Rightarrow \quad |\pi(P_1)| \le \Lambda(a,b) - |\pi(P_2)|$$

Sia P_2 fissata. Si avrà:

$$\Lambda(a,c) \le \Lambda(a,b) - |\pi(P_2)|$$

Variando ora P_2 è ...

$$\Lambda(a,c) \le \Lambda(a,b) - \Lambda(c,b)$$

$\square$

Definiamo la funzione "ascissa curvilinea" o "lunghezza d'arco"

$$s = s(t) = \lambda(a,t) \qquad t \in [a,b]$$

$$\left(s(a) = 0 \; ; \; s(b) = \lambda(a,b) \right)$$

Teorema i) s è continua, derivabile e

$$\dot{s}(t) = \|\dot{\underline{r}}(t)\|$$

($\Rightarrow$ se C è regolare s è strettamente crescente)

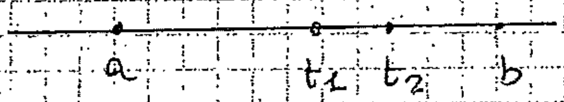
ii) $$\boxed{\lambda(a,b) = \int_a^b \|\dot{\underline{r}}(t)\| \, dt}$$

Dim. ii) segue da i) per il teor. fondamentale del calcolo (Torricelli - Barrow)

$$\lambda(a,b) = s(b) - \underset{\overset{\|}{0}}{s(a)} = \int_a^b \dot{s}(t)\,dt = \int_a^b \|\dot{\underline{r}}(t)\|\,dt .$$

Proviamo i). Basta provare la derivabilità...

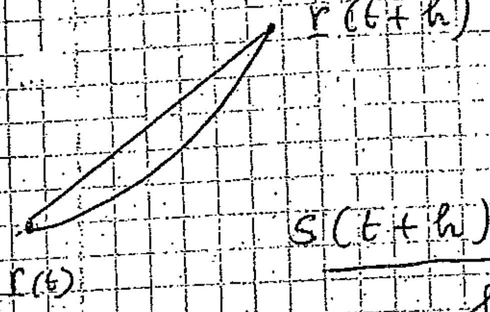
1.



$$s(t_2) = s(t_1) + \lambda(t_1, t_2) \qquad \text{(additività...)}$$

$$t_1 = t \; , \; t_2 = t + h \qquad (h > 0)$$

$$s(t+h) - s(t) = l(t, t+h)$$



$$\frac{s(t+h) - s(t)}{h} \le \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|\dot{\underline{r}}(t)\|\, dt$$

$$\rotatebox{90}{$\le$} \qquad\qquad\qquad\qquad \| \quad \text{(teor. di media integrale)}$$

$$\left\| \frac{\underline{r}(t+h) - \underline{r}(t)}{h} \right\| \qquad\qquad \|\dot{\underline{r}}(\xi)\|$$

$$(\xi \in (t, t+h))$$

Ora, se $h \to 0$ è $\|\dot{\underline{r}}(\xi)\| \to \|\dot{\underline{r}}(t)\|$

e $\left\| \frac{\underline{r}(t+h) - \underline{r}(t)}{h} \right\| \to \|\dot{\underline{r}}(t)\|$

ovvero $\lim_{h \to 0^+} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$ esiste ed è $= \|\dot{\underline{r}}(t)\|$

Analogo discorso per $h < 0$...

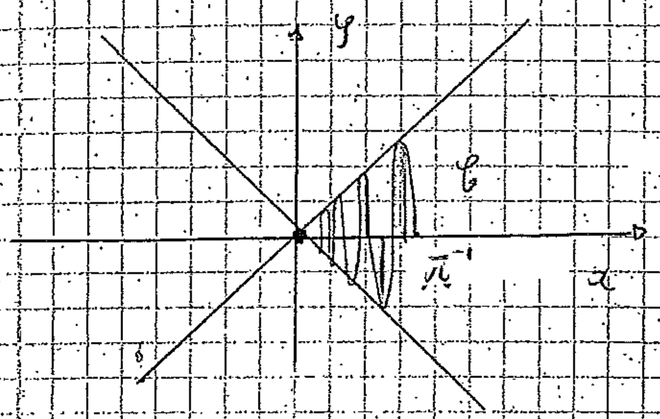
$\Rightarrow \quad \dot{s}(t) = \|\dot{\underline{r}}(t)\| \qquad \square$

Commento Una curva continua non è necessariamente rettificabile

Es: $y = x \sin \frac{1}{x}$ (definita $= 0$ per $x = 0$)

$x \in [0, \frac{1}{\pi}]$

Sia $k = 1, 2, \ldots$



$$x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi}$$

$$\left| x_k \sin \frac{1}{x_k} \right| = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi} \equiv \xi_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \quad \text{è divergente...}$$

(posso descrivere su ℭ una successione di spezzate di lunghezza arbitrariamente grande ...)

Sia ℭ regolare : ricordiamo che in tal caso $\dot{s} = \|\dot{\underline{r}}\| > 0$ ...

s è il parametro "naturale" per descrivere ℭ

$s = s(t)$ ... $t = t(s)$

Osserviamo che

$$\|\underline{r}'\| \; \left\| \frac{d\underline{r}}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\underline{r}}{dt} \frac{dt}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\underline{r}}{dt} \right\| \left| \frac{dt}{ds} \right| =$$

$$= \|\dot{\underline{r}}\| \cdot \frac{1}{\dot{s}} = 1$$

$\left(' = \frac{d}{ds} \right) \Rightarrow \underline{r}'$ versore tangente

si pone spesso $\underline{r}' = \underline{t}$

Teorema. La lunghezza di una curva (regolare) non dipende né dalla parametrizzazione, né dall'orientamento.

Dim. Sia $\tau \in [\alpha, \beta]$ $(\alpha < \beta)$, $\frac{dt}{d\tau} > 0$

(per fissare le idee)

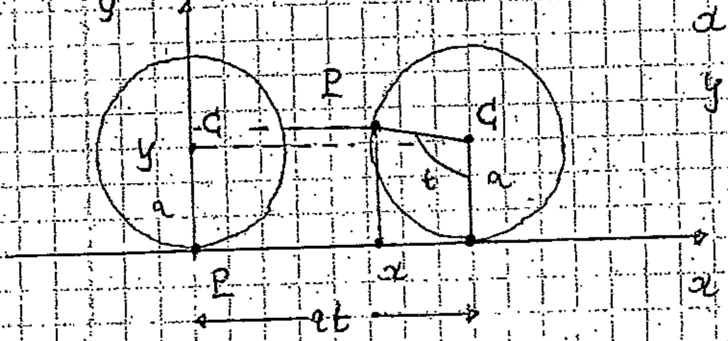
$$\underline{R}(\tau) = \underline{r}(t(\tau))$$

$$\Lambda(a,b) = \int_a^b \|\dot{\underline{r}}(t)\| \, dt = \int_a^b \left\| \frac{d\underline{r}}{dt} \right\| dt =$$

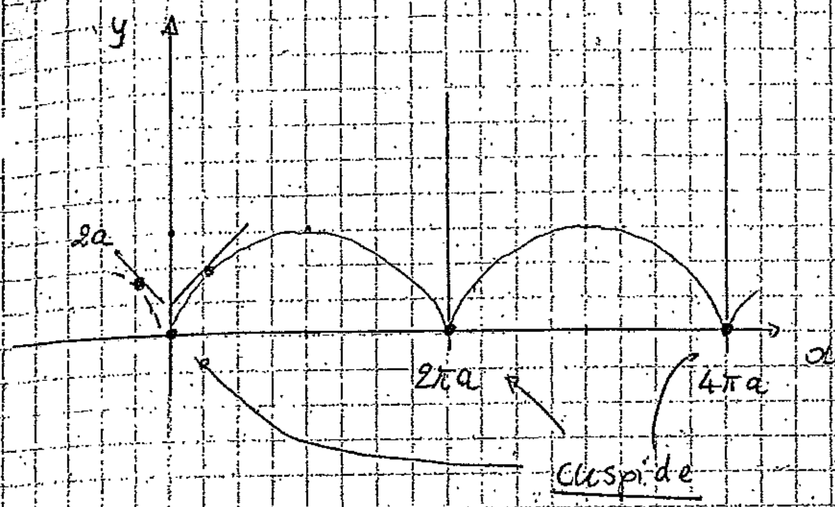
$$= \int_\alpha^\beta \left\| \frac{d\underline{R}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \right\| \frac{dt}{d\tau} \, d\tau = \int_\alpha^\beta \left\| \frac{d\underline{R}}{d\tau} \right\| d\tau$$

(Analogo ragionamento se τ induce l'orientamento opposto...) ☐

◇ **Esercizio**. Calcolare la lunghezza di un arco di cicloide



$$x = a(t - \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t)$$



Pti singolari $\quad \dot{x} = a(1-\cos t) = 0$

$\dot{y} = a \cdot \sin t = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2\pi k \cdot a$

$k \in \mathbb{Z}$

$$m(t) := \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\sin t}{1-\cos t} \sim \frac{t}{\frac{t^2}{2}} \to \begin{cases} +\infty & t \to 0^+ \\ -\infty & t \to 0^- \end{cases}$$

$\Rightarrow$ in $(2\pi k a, 0)$ si hanno cuspidi

(tangente doppia verticale)

$$\Lambda(0, 2\pi) = \int_0^{2\pi} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}} dt =$$

$$= \sqrt{2}\, a \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\; dt \quad ;$$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \qquad |\sin\alpha| = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$

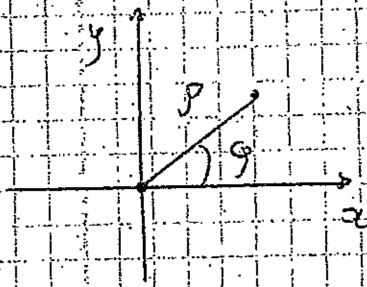
$t = 2\xi \qquad \xi \in [0, \pi] \Rightarrow \sqrt{2}\sin\xi = \sqrt{1-\cos t}$

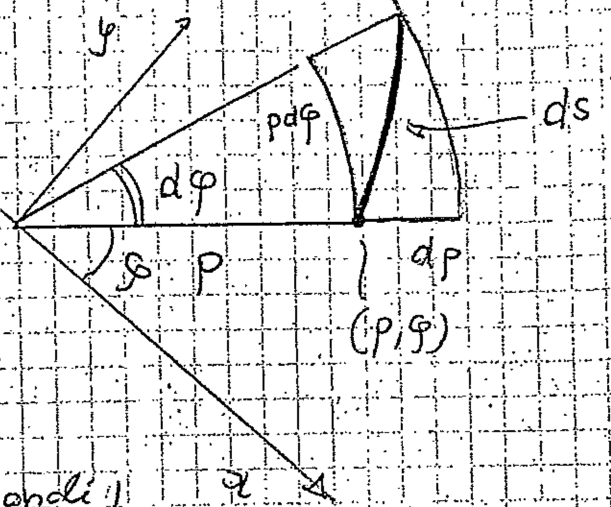
$dt = 2\, d\xi$

$$\Rightarrow \Lambda = \sqrt{2} \cdot a \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \int_0^{\pi} \sin\xi \, d\xi =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2\, a = 8a .$$

Lunghezza d'arco in coordinate polari





(le coordinate polari sono coordinate curvilinee ortogonali)

("teor. di Pitagora nell'infinitesimo")

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$$

$$\Rightarrow ds = \sqrt{\rho'^2+\rho^2}\, d\varphi \qquad ' = \frac{d}{d\varphi}$$

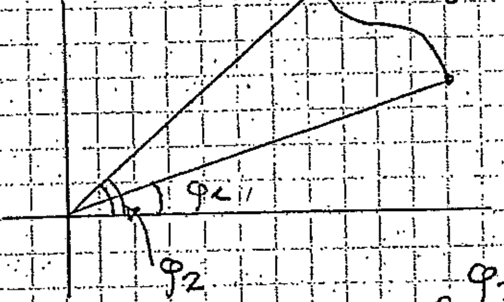
In modo rigoroso:

$$x = \rho(\varphi)\cos\varphi \qquad x' = \rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi$$

$$y = \rho(\varphi)\sin\varphi \qquad y' = \rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi$$

$$\Rightarrow ds = \sqrt{x'^2+y'^2}\, d\varphi = \ldots = \sqrt{\rho'^2+\rho^2}\, d\varphi$$

$\Rightarrow$

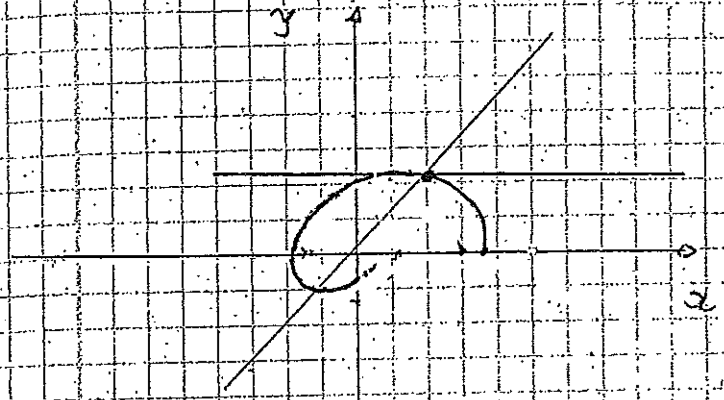


$$\rho = \rho(\varphi);\ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$$

$$\Lambda = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{1}{2}}\, d\varphi$$

Esercizio Si consideri la spirale

$$\rho = e^{-\varphi} \qquad \varphi \geq 0$$



Calcoliamone la lunghezza

$$ds = \left(e^{-2\varphi} + e^{-2\varphi}\right)^{\frac{1}{2}} d\varphi =$$

$$= \sqrt{2}\, e^{-\varphi}\, d\varphi$$

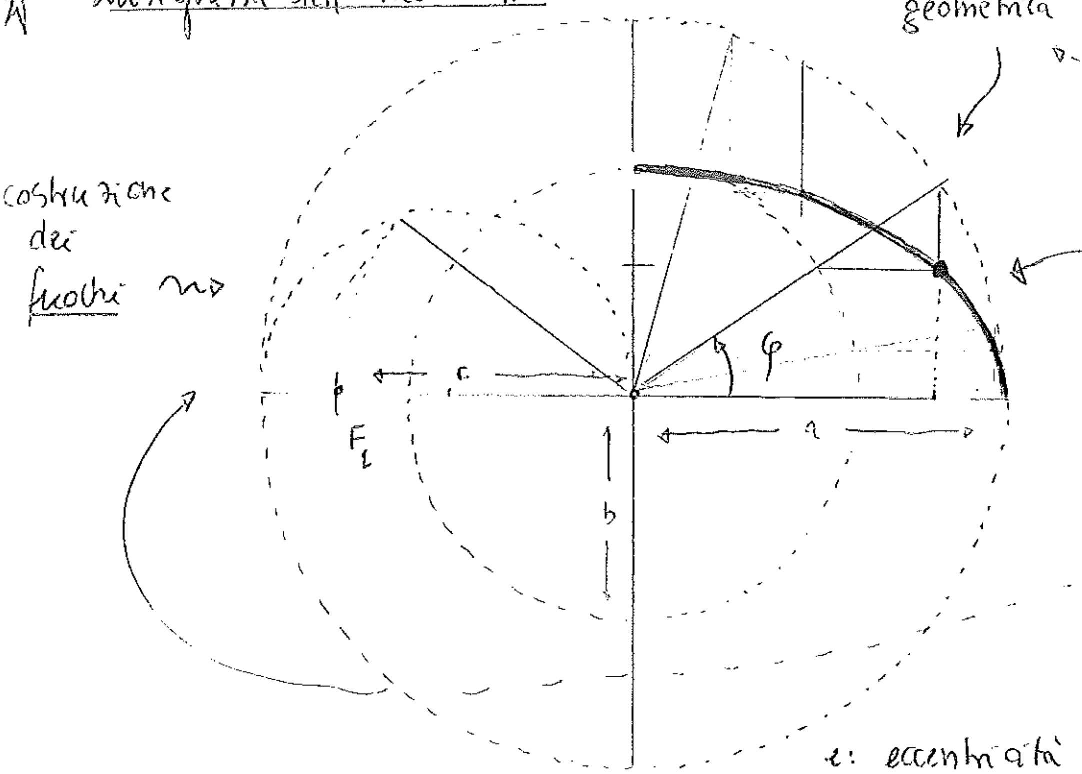
$$L = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-\varphi}\, d\varphi = \ldots \sqrt{2}$$

In generale gli integrali esprimenti lunghezze non sono risolubili elementarmente (integrali ellittici, lemniscatici ---→ formule di Fagnano ---→ formule di Eulero → teoria generale delle funzioni ellittiche. v. anche oltre.

☆ Lunghezza dell'arco ellittico

costruzione geometrica

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases}$$



$\varphi \in [0, 2\pi)$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

$' = \frac{d}{d\varphi}$ si ha subito:

$$\begin{aligned} x' &= -a\sin\varphi \\ y' &= b\cos\varphi \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi \\ &= a^2(1-\cos^2\varphi) + b^2\cos^2\varphi = \\ &= a^2 - (a^2-b^2)\cos^2\varphi \\ &= a^2\left(1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^2\varphi\right) \\ &= a^2(1 - e^2\cos^2\varphi) \end{aligned}$$

Calcoliamo la

☆ lunghezza di un quarto di meridiano

$$L = a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\cos^2\varphi}\,d\varphi \quad \left(= a\underbrace{\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}\,d\psi}_{} \qquad \psi = \frac{\pi}{2}-\varphi\right)$$

$e = 0$ (circ. : $\frac{\pi}{2}a$) ☆ integrale ellittico di 2^a specie

Se $0 < e << 1$ $\quad \sqrt{1-e^2\sin^2\psi} \sim 1 - \frac{e^2}{2}\sin^2\psi \qquad \left(\sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{x}{2}\right)$

$$L \sim a\left(\frac{\pi}{2} - \frac{e^2}{2}\underbrace{\int_0^{\pi/2}\sin^2\psi\,d\psi}_{\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{\pi}{2}a\left(1 - \frac{e^2}{4}\right)$$

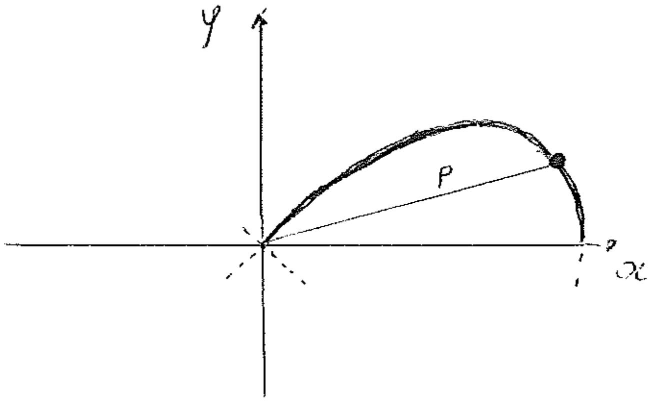
$$\left(\int_0^{\pi/2}\sin^2\psi\,d\psi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}1\cdot d\psi = \frac{\pi}{4}\right)$$

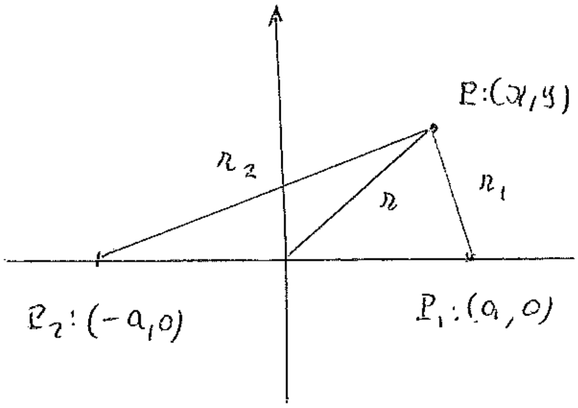
$\int_0^{\pi/2}\cos^2\psi\,d\psi$ ″

◇ Sulla lunghezza dell'arco di lemniscata

Rif.
C.L. Siegel
Topics in Complex function theory vol I.
Wiley Classics in Mathematics
Wiley, 1988

Digressione





$$\boxed{r_1 r_2 = c^2}$$

→ Cassinoidi
introdotte dal Cassini in astronomia. Trovano anche applicazioni in analisi numerica.

(◇) $r^2 = x^2 + y^2$

$$r_1^2 = (x-a)^2 + y^2 = r^2 + a^2 - 2ax$$
$$r_2^2 = (x+a)^2 + y^2 = r^2 + a^2 + 2ax$$

La lemniscata si ottiene ponendo $c = a$. Poniamo anche $2a^2 = 1$. Abbiamo, successivamente:

$$\overset{c^4}{\overset{\|}{a^4}} = (r^2 + a^2 - 2ax)(r^2 + a^2 + 2ax) =$$

$$(r^2+a^2)^2 - 4a^2x^2 = r^4 + \overbrace{2a^2}^{=1} r^2 + a^4 - 4a^2x^2$$

$\Rightarrow \quad r^4 + r^2 = 2x^2$ e, utilizzando (◇),

$$r^4 + r^2 = 2(r^2 - y^2) \Rightarrow 2y^2 = r^2 - r^4$$

In definitiva:

$$(\ast)\quad \begin{cases} 2x^2 = r^2 + r^4 \\ 2y^2 = r^2 - r^4 \end{cases} \qquad r \equiv \rho$$

$\Rightarrow$, estraendo le radici, otteniamo $\begin{cases} x = x(\rho) \\ y = y(\rho) \end{cases}$

Calcoliamo l'ascissa curvilinea (a partire da $O:(0,0)$)

$0 \le \rho \le 1$: dalle $(\ast)$ si ha:

$$2xx' = \rho + 2\rho^3 \qquad ' = \frac{d}{d\rho}$$

$$2yy' = \rho - 2\rho^3$$

$$4x^2x'^2 = (\rho + 2\rho^3)^2$$

$$x'^2 = \frac{(\rho + 2\rho^3)^2}{4x^2} = \frac{\rho^2(1+2\rho^2)^2}{2\rho^2(1+\rho^2)} = \frac{(1+2\rho^2)^2}{2(1+\rho^2)}$$

$$4y^2y'^2 = (\rho - 2\rho^3)^2$$

$$y'^2 = \frac{\rho^2(1-2\rho^2)^2}{2\rho^2(1-\rho^2)} = \frac{(1-2\rho^2)^2}{2(1-\rho^2)}$$

$$x'^2 + y'^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{(1-2\rho^2)^2}{1-\rho^2} + \frac{(1+2\rho^2)^2}{1+\rho^2}\right] \longrightarrow$$

$$\overbrace{x'^2+y'^2}^{s'^2} = \frac{1}{2}\,\frac{(1-2\rho^2)^2(1+\rho^2)+(1+2\rho^2)^2(1-\rho^2)}{1-\rho^4}$$

Ma $\quad (1-2\rho^2)^2(1+\rho^2)+(1+2\rho^2)^2(1-\rho^2) =$

$$= (1-2\rho^2)^2+(1+2\rho^2)^2+\rho^2\left[(1-2\rho^2)^2-(1+2\rho^2)^2\right]$$

$$= 2+8\rho^4+\rho^2\left[(1-\cancel{2\rho^2}+1+\cancel{2\rho^2})(-4\rho^2)\right]$$

$$= 2+8\rho^4-8\rho^4 = 2$$

$$\Rightarrow \qquad s'^2 = \frac{1}{1-\rho^4}$$

$$\boxed{s = s(\rho) = \int_0^\rho \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}} \qquad 0 \le r \le 1$$

* Integrale lemniscatico
non risolubile in
termini di f. elementari

$$\text{cf:}\quad \arcsin\rho = \int_0^\rho \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} \qquad (0\le r\le 1)$$

*** Eulero (nascita della teoria degli integrali ellittici...)
(cf. Siegel)

(*) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$u = \sin x \quad v = \sin y$

$\sin(x+y) = u\sqrt{1-v^2} + v\sqrt{1-u^2} \quad \Rightarrow$ (*) diventa

$$\boxed{\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} + \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}}$$

ebasso di ndarache..

se $r = u\sqrt{1-v^2} + v\sqrt{1-u^2}$

Nel caso dell'integrale lemniscatico, Eulero prova che

$$\boxed{S(u) + S(v) = S(r)}, \text{ ove } (\bigstar)\ r = \frac{u\sqrt{1-v^4} + v\sqrt{1-u^4}}{1+u^2v^2}$$

Se $u = v$ si ha $S(r) = 2S(u)$, con

$$r = \frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}$$

☆ teorema di Fagnano (da cui Eulero ha preso le mosse

Cenno di dim: Si parte da ($\bigstar$), trattando r costante, u variabile indipendente, v dipendente. Si pone $U = \sqrt{1-u^4}$ $V = \sqrt{1-v^4}$, e si deriva rispetto ad u, ottenendo

$$\frac{dx}{U}\left[(UV-2vx^3)(1+x^2v^2)-2(xUV+v-vx^4)xv^2\right]$$

$$+$$

$$\frac{dv}{V}\left[\qquad \text{stessa espressione} \qquad\right]$$

che diviene $= \sqrt{1-r^4}$ per $x=0$, ed

$r \neq 0$ se r e x sono suff. vicini a 0.

Pertanto

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dv}{\sqrt{1-v^4}} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \int_r^v \frac{dv}{\sqrt{1-v^4}} = 0$$

⚠

$$\Downarrow$$

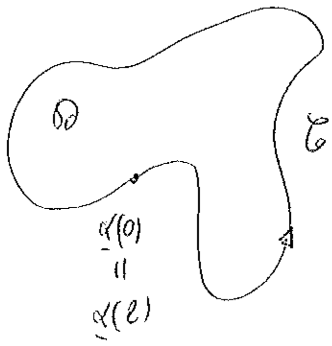
$$\star\star\star \quad \underbrace{\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}}_{s(x)} + \underbrace{\int_0^v \frac{dv}{\sqrt{1-v^4}}}_{s(v)} = \underbrace{\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}}_{s(r)}$$

$$r = \frac{x\sqrt{1-v^4} + v\sqrt{1-x^4}}{1+x^2v^2}$$

Sia $\underline{\alpha} : [0, l] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$s \longmapsto \underline{\alpha}(s)$

◇ La disuguaglianza isoperimetrica

una curva semplice, chiusa $(\underline{\alpha}(0) = \alpha(l))$, liscia, regolare parametrizzata tramite l'ascissa curvilinea s, di lunghezza l, di sostegno $\mathcal{C}$

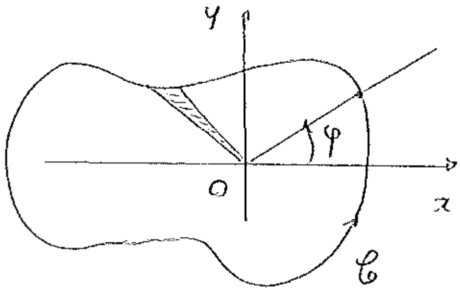


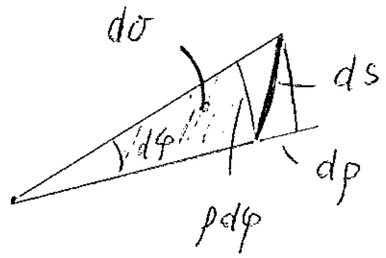
Detta A l'area della regione $\mathcal{D}$ racchiusa da $\mathcal{C}$, si ha

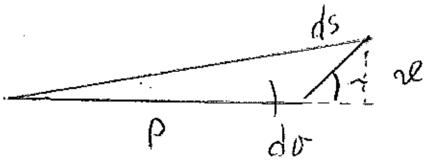
disuguaglianza isoperimetrica $\boxed{A \leq \frac{l^2}{4\pi}}$ $\Big(=$ area del cerchio di raggio $\frac{l}{2\pi}$: $l.\text{circ} = 2\pi \frac{l}{2\pi} = l$; $\pi \frac{l^2}{4\pi^2} = \frac{l^2}{4\pi} \Big)$

il segno $=$ vale $\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ è una circonferenza di raggio $\frac{l}{2\pi}$

"Dim." Sia O un p.to interno a $\mathcal{C}$, consideriamo un sistema di coordinate polari di origine O

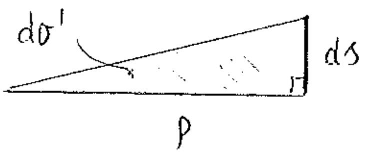






$\cos\vartheta = \langle \underline{t}, \frac{\underline{\alpha}}{\|\underline{\alpha}\|} \rangle$

$d\sigma = \frac{1}{2}\rho \cdot ds \cdot \overbrace{|\sin\vartheta|}^{\leq 1} \leq d\sigma' = \frac{1}{2}\rho\, ds$



★ in tale situazione $(ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi$

è $\rho' = 0 \Rightarrow \rho = \text{cost.}$

↑ circ. di raggio $l/2\pi$

In definitiva

$$A = \iint_D d\sigma \leq \frac{\ell^2}{4\pi}$$

Inciso

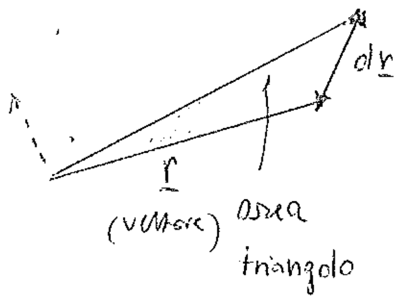
Notare anche che $\quad d\sigma = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx) \qquad A = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} x\,dy - y\,dx$

$$\left(\iint_D dx\,dy = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} x\,dy - y\,dx \right)$$

$$\left[\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy \right. \qquad \text{* Green}$$

$$P = -y \;, \quad Q = x \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 = -\frac{\partial P}{\partial y}$$

* Interpretazione geometrica (Riemann)



$$\underline{r} = (x, y, 0)$$

$$d\underline{r} = (dx, dy, 0)$$

$$\frac{1}{2}(\underline{r} \times d\underline{r}) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x & y & 0 \\ dx & dy & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\,\underline{k}\,(x\,dy - y\,dx)$$

In definitiva: "tra tutte le curve di lunghezza ℓ assegnata, la circonferenza è quella che racchiude l'area maggiore $(= \ell^2/4\pi)$"