

TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Prof. M. Spina
D.I. - Università di VERONA

a.a. 2009/10

Laurea magistrale
in Matematica
Master degree in
Mathematics

Lezione I

Lecture I

V spazio vettoriale (su \mathbb{R} o \mathbb{C} , per fissare le idee)
vector space K 1-forms

V^* : spazio vettoriale duale : [elementi (vettori) di V : 1-forme (lineari, o algebriche)]
dual

$V^* = \{ f: V \rightarrow K \mid f \text{ lineare} \}$ i.e.
linear

$$f(\alpha v + \beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w)$$

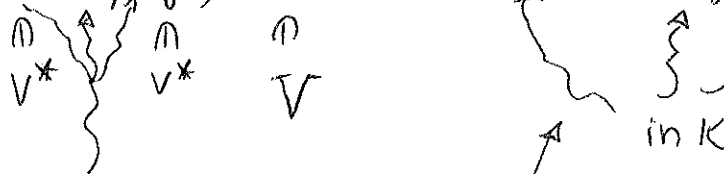
Diagram showing the mapping of the linear combination $\alpha v + \beta w$ from V to K via f , and the corresponding linear combination of $f(v)$ and $f(w)$ in K .

Exercise

Esercizio : V^* è effettivamente uno spazio
Indeed

vettoriale su K : si definisce

$(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(v) := \alpha \cdot f(v) + \beta \cdot g(v)$



da definirsi tramite
(defined via)

Prop Sia $\dim_K V = n$ (dim. finita) finite dimensional vector space

ϵ' $\dim_K V^* = n$

Dim. Sia (e_1, \dots, e_n) una base di V . Consideriamo le

forme duali $\{e_i^* \mid i=1, \dots, n\}$ così definite:

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} \quad (\delta \text{ di Kronecker}) \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

[nota: è sufficiente definire $f \in V^*$ su una base di V , in virtù della linearità: $f(v) = f(\sum \alpha_i e_i) = \sum \alpha_i f(e_i)$

"estensione per linearità" ; si osserva che $e_i^*(v) = \alpha_i$, dove

e_i^* "pesca" la i -esima componente di un vettore espresso come
 picks up c_i dei vettori della base (e_1, \dots, e_n)
 linear combination

si ha subito $f = \sum f(e_i) e_i^* \quad ; \quad \text{infatti } f(v) = \sum \alpha_i f(e_i)$

$$e \quad \left(\sum_i f(e_i) e_i^* \right) (v) = \sum_{i,j} f(e_i) \alpha_j e_i^*(e_j) = \sum_{i,j} f(e_i) \alpha_j \delta_{ij} \\ = \sum \alpha_i f(e_i) = f(v) \quad \Rightarrow \quad \text{gli } e_i^* \text{ - generate } V^* \text{ - generate } V^*.$$

gli e_i^* sono l.i. linearly independent. indeed ; infatti, se $\sum \beta_i e_i^* = 0$,

si ha, $\forall v \in V \quad \left(\sum \beta_i e_i^* \right) (v) = 0$; scelto $v = e_j$,

$$0 = \sum_i \beta_i e_i^*(e_j) = \sum_i \beta_i \delta_{ij} = \beta_j \Rightarrow$$

$\beta_j = 0 \quad \forall j=1, \dots, n$, da cui l'asserto

La base $(e_1^* \dots e_n^*)$ è detta duale
della base data $(e_1 \dots e_n)$. si ricordi ancora:
 $e_k^*(\sum \alpha_i e_i) = \alpha_k$

Si ha allora $V \cong V^*$, ma l'isomorfismo
 \uparrow
iso

||| non è canonico (dipende dalla scelta della base)
canonical

.. si può considerare ovviamente $V^{**} := (V^*)^*$
(bi-duale di V). In dim. finita, esso è

|| canonicamente isomorfo a V [ovvero, si può
costruire un isomorfismo indipendente dalla scelta
di una base:

dato $v \in V$, si definisca

$v^{**} \in V^{**}$ come segue:

$$v^{**}(f) := f(v) \quad (f \in V^*)$$

\uparrow
 V^*

l'applicazione $V \ni v \mapsto v^{**} \in V^{**}$

è lineare e iniettiva, e $\dim V^{**} = n$,

pertanto è anche suriettiva (per il teorema N+R)
e quindi è un isomorfismo.

Esempi

1. \mathbb{R}^n , (e_1, \dots, e_n) base canonica

"

$$\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_x \right\}_{x_i \in \mathbb{R}} \quad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

base duale $\{d_i\} \subset (\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$

*

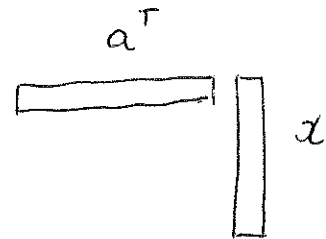
$$e_i^* = (0 \ 0 \ \dots \ 1 \ 0 \ \dots \ 0)$$

↑
i

$$(\mathbb{R}^n)^* = \left\{ \underbrace{(a_1, \dots, a_n)}_{a^T} \right\}_{a_i \in \mathbb{R}}$$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

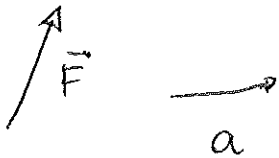
$$f_a(x) = a^T x = \sum a_i x_i$$



2. \vec{F} forza
force

\vec{a} spostamento
displacement

(nello spazio
vettoriale
geometrico)



lavoro :
prodotto da \vec{F}

$$\vec{F} \cdot \vec{a} = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{a}\| \cos \alpha$$

↑
prod. scalare
elementare



$$l = l_{\vec{F}} \quad \tau \text{ una 1-forma}$$

3. ★ Il differenziale
differential

il tutto si generalizza, v. sotto

Sia $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, di classe C^1 , per
aperta

fissare le idee. Sia $x_0 \in U$, $x_0 + h \in U$

Allora

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \overbrace{df|_{x_0}}^{\text{operatore lineare}} h + o(h)$$

differenziale
di f in x_0

$$\left[\frac{o(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \right]$$

$$df|_{x_0}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h \mapsto df|_{x_0} \cdot h$$

abuso di notazione

$$\boxed{\nabla f^t} \cdot \boxed{h} = \square$$

è un vettore duale, i.e. una 1-forma

Concretamente; è rappresentato dalla ^{matrix} matrice $1 \times n$

$$df|_{x_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \quad (= (\nabla f)^t)$$

gradiente



Il concetto di
gradiente, a rigore,
è metrico

Incorso Aside

★ Differenziale secondo Fréchet

$f: U \subset V \rightarrow W$ spazi vettoriali
normati (normed)

$$f(a+h) - f(a) = T_a \cdot h + o(h) \quad \frac{\|o(h)\|_W}{\|h\|_V} \rightarrow 0 \text{ se } h \rightarrow 0$$

se $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$,

T_a è rapp. dalla matrice jacobiana,
 $m \times n$

Importante

Sia $\alpha = \alpha(t)$

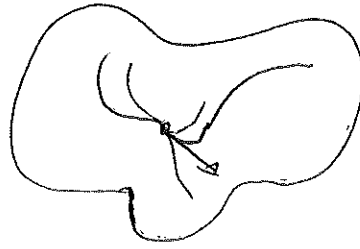


$\alpha(0) = \alpha_0$

$\dot{\alpha}(0) = v$

velocity
velocity
speed

" h_i
" h_m "



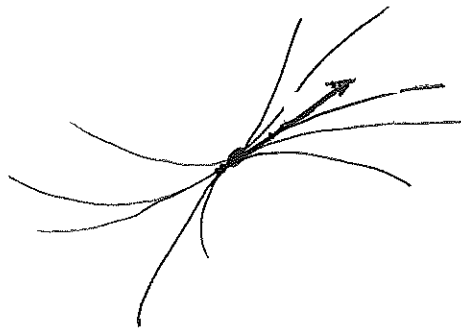
$I \ni 0$

Sia $F = F(t) = f(\alpha(t)) = (f \circ \alpha)(t)$

È anche $df|_{\alpha_0} v = \frac{dF}{dt}(0)$

$(= \sum f_{x_i}^0 h_i)$
|||
 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$

★ indipendentemente da $\alpha = \alpha(t)$ purchè
abbia la stessa velocità v in α_0



4. L'integrale

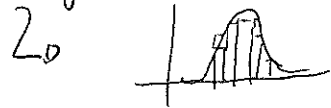
$$\text{Sia } V = \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$$

funzioni continue
a supporto compatto, a valori reali

$$\text{Sia } \int_{\mathbb{R}} : V \ni f \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f \in \mathbb{R}$$

non richiede formalmente
l'introduzione di una misura, basta la misura
standard dei polirettangoli

integrale di Riemann



$\int_{\mathbb{R}}$ è un funzionale lineare (e continuo, v. corso di A.F.)

[Esso è analitico (Teorema della rappresentazione di Riesz)
dalla misura di Lebesgue]

(scalar, or inner product)

Sia $K = \mathbb{R}$, e \langle, \rangle un prodotto scalare (interno) su V

(si parla di spazio vettoriale euclideo (V, \langle, \rangle))
Euclidean

\langle, \rangle forma bilineare ¹ simmetrica ² definita ³ positiva:
bilinear, symmetric, positive definite

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

linear in both arguments

- 1. lineare in entrambi gli argomenti (bilinearità)
- 2. $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ (simmetria) \downarrow vettore nullo
- 3. $\langle v, v \rangle \geq 0$ e vale $= \Leftrightarrow v = \underline{0}$

\langle, \rangle induce isomorfismi tra V e V^*
(isomorfismi musicali; "index raising & lowering"
innalzamento e abbassamento di indici)

"bemolle"
flat

$$b : V \rightarrow V^*$$

$$v \mapsto \langle v, \cdot \rangle =: v^\flat$$

$$(b^{-1} = \sharp : V^* \rightarrow V)$$

dieis
sharp

Questo è il teorema della rappresentazione (Riesz)

In concreto, sia \langle, \rangle rappresentato, rispetto ad una base (e_1, \dots, e_n) di V , dalla matrice $g = (g_{ij})$, $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$

↳ consente di ricostruire \langle , \rangle :

$$\text{e } v = \sum v^i e_i, \quad w = \sum w^j e_j \quad v \leftrightarrow \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$$

$$\langle v, w \rangle = \sum v^i w^j \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{g_{ij}} \quad w \leftrightarrow \begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix}$$

(bilinearità)

↳ abuso di notazione

$$= \sum_{i,j} g_{ij} v^i w^j = v^T g w$$

riceversa, data g e una base di V , costruisco \langle , \rangle tramite

ciò vale per una forma bilineare qualsiasi.

Nel nostro caso g è simmetrica, i.e. $g = g^t$

($g_{ij} = g_{ji}$) e definita positiva

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = v^t g v \geq 0 \quad (v = 0 \Leftrightarrow v = 0)$$

[g è simmetrica, dunque ortogonalmente diagonalizzabile, i.e. possiede una base ortogonale di autovettori. I suoi autovalori, reali, sono necessariamente positivi (CNES)]

convenzione di Einstein: somma sugli indici ripetuti

$$v = (v^j) \xrightarrow{b} (g_{ij} v^j) \equiv (v_i)$$

$$\langle v, w \rangle = v^t g w = \underbrace{(g^t v)^t}_v w = (g v)^t w$$

Descriviamo $\# = b^{-1}$ anche così:

$$\text{Sia } \ell_i^{-1} = (g^{ij}) \quad g^{ij} g_{jk} = \delta_R^i (= \delta_{ik})$$

$$(v_i) \xrightarrow{\#} (g^{ij} v_j)$$

|||
 v^i

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \hline \\ \hline \end{array} & = \begin{array}{|c|} \hline 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ \hline \end{array} \\ \ell^{-1} & \ell^R & = I_m \end{array}$$

In astratto: $(v_i) \leftrightarrow \tilde{v}$ $\langle v, w \rangle = \tilde{v}^t w$

$$\tilde{v} = \ell v$$

$$\Rightarrow v = \ell^{-1} \tilde{v}$$

" "
 (v_i) (\tilde{v}_i)

$$\begin{aligned} &= v^t \ell w \\ &= (\ell v)^t w \end{aligned}$$

* Teorema della rappresentazione

(esistenza di $\#$)

[vale in uno spazio di Hilbert e caratterizza

Sia (V, \langle, \rangle)

uno spazio vettoriale euclideo

$\dim_{\mathbb{R}} V = n$ funzionali

lineari e continui

Sia $l \in V^*$

Allora $\exists!$ $u \in V$ t. che, $\forall v \in V$, si

abbia

$$l(v) = \langle u, v \rangle$$

[sic. $\forall u \in V$, $l_u(v) := \langle u, v \rangle$ definisce un f. lineare [ovvio]]

Dm. Sia (e_1, \dots, e_n) una base ortonormale

$$\text{di } V : \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, n$$

[si può costruire tramite Gram-Schmidt a partire da una base qualsiasi]

$$\text{Si ha : } v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$$

unic. Determinate uniquely determined

Pertanto Thus

$$l(v) = \sum_{i=1}^n v_i \underbrace{l(e_i)}_{= \alpha_i}$$

Il vettore $u := \sum_{i=1}^n u_i e_i$

$\bar{\lambda}$ il valore cercato, ed è nec. unico:
sought for

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \left\langle \sum u_i e_i, \sum v_j e_j \right\rangle = \sum_{i,j} u_i v_j \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \sum_i u_i v_i \end{aligned}$$