Analisi di Equazioni Differenziali

Debora Botturi

ALTAIR

http://metropolis.sci.univr.it

Introduzione

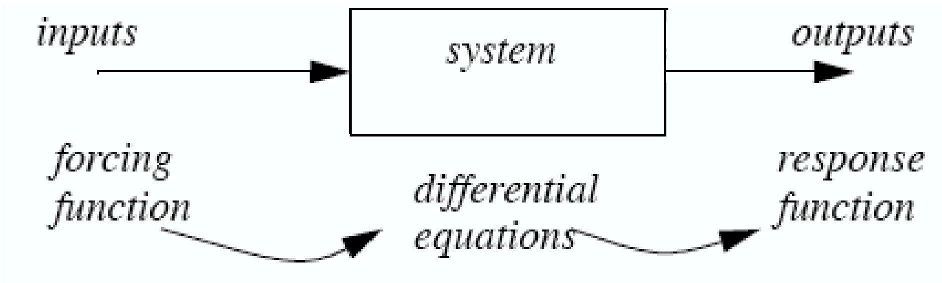
Argomenti

- Equazioni differenziali omogenee del primo e secondo ordine
- Equazioni differenziali non omogenee
- Risposte del primo e secondo ordine
- Cenni ad elementi non lineari

Obiettivo: sviluppare equazioni esplicite che descrivono la risposta di un sistema

Osservazioni

- Le equazioni del moto possono essere utilizzate per analizzare il comportamento del sistema
- Il metodo piú comune é quello di forzare una funzione in input e delle condizioni iniziali e quindi risolvere l'equazione differenziale.



Osservazioni

Ci sono vari tipi di input usati per testare un sistema:

- gradino - un veloce cambiamento di input
- rampa - un input continuamente crescente
- sinusoidale - input ciclico che varia continuamente

Riassumendo

Le fasi per analizzare un sistema sono:

- Costruzione del modello matematico
- Scelta dei tipi di input
- Scelta condizioni iniziali
- Determinare il comportamento del sistema risolvendo le equazioni differenziali

Soluzioni di Equazioni

Osservazioni

- Le equazioni differenziali danno una risposta generica del sistema come funzione del tempo
- Alcune equazioni differenziali notevoli si possono classificare nei seguenti tipi:
  - $A\dot{x} + Bx = 0$ omogenea del primo ordine
  - $A\dot{x} + Bx = Cf(t)$ non-omogenea del primo ordine
  - $A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = 0$ omogenea del secondo ordine
  - $A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = Df(t)$ non-omogenea del secondo ordine
- Le equazioni notevoli sopra riportate sono equazioni differenziali lineari in cui x é la variabile dipendente.

Soluzione omogenea del primo ordine

- La forma generale della soluzione viene indovinata (ce^{-kt})
- Si procede alla sostituzione fino alla determinazione del coefficiente k
- Le condizioni iniziali sono usate per trovare il valore del coefficiente c

nota: cosa ci aspettiamo da un grafico della soluzione di una equazione differenziale omogenea del primo ordine? una curva che partendo dalle condizioni iniziale date tende a zero per il tempo tendente all'infinito

Esempio

Given the general form of a first-order homogeneous equation,

$$A\dot{x} + Bx = 0 \qquad \text{and} \qquad x(0) = x_0$$

initial condition

Guess a solution form and solve.

$$x = Xe^{-Yt} \qquad \dot{x} = -YXe^{-Yt}$$

$$A(-YXe^{-Yt}) + B(Xe^{-Yt}) = 0$$

$$A(-Y) + B = 0$$

$$Y = \frac{B}{A}$$

Therefore the general form is,

$$x_h = Xe^{-\frac{B}{A}t}$$

Note: The general form below is useful for finding almost all homogeneous equations

$$x_h(t) = Xe^{-Yt}$$

Next, use the initial conditions to find the remaining unknowns.

$$x_h = Xe^{-\frac{B}{A}t}$$

$$x_0 = Xe^{-\frac{B}{A}0}$$

$$x_0 = X$$

Therefore the final equation is,

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{B}{A}t}$$

Esercizio

Risolvere la seguente equazione differenziale date le condizioni iniziali

$$\dot{x} + 2x = 0 \qquad x(0) = 3$$

soluzione:

$$x(t) = 3e^{-2t}$$

Soluzione omogenea del secondo ordine

- Indovinare la soluzione dell'omogenea e della equazione quadratica associata (eq. caratteristica)
- I casi di soluzione della forma quadratica sono:
  - due differenti soluzioni reali
  - due soluzioni identiche reali
  - due radici complesse (oscillazioni sinusoidali)
- Dopo aver trovato la soluzione all' equazione omogenea, le condizioni iniziali vengono utilizzate per trovare i valori dei rimanenti coefficienti.

Esempio

Given,

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = 0 \qquad x(0) = x_0 \qquad \text{and} \qquad \dot{x}(0) = v_0$$

Guess a general equation form and substitute it into the differential equation,

$$x_h = Xe^{Yt} \qquad \dot{x}_h = YXe^{Yt} \qquad \ddot{x}_h = Y^2Xe^{Yt}$$

$$A(Y^2Xe^{Yt}) + B(YXe^{Yt}) + C(Xe^{Yt}) = 0$$

$$A(Y^2) + B(Y) + C = 0$$

$$Y = \frac{-B \pm \sqrt{(B)^2 - 4(AC)}}{2A} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

If the values for Y are both real, but different, the general form is,

$$Y = R_1, R_2 \qquad x_h = X_1e^{R_1t} + X_2e^{R_2t}$$

Note: The initial conditions are then used to find the values for X_1 and X_2

If the values for Y are both real, and identical, the general form is,

$$Y = R_1, R_1 \qquad x_h = X_1e^{R_1t} + X_2te^{R_1t}$$

The initial conditions are then used to find the values for X_1 and X_2.

If the values for Y are complex, the general form is,

$$Y = \sigma \pm \omega j \qquad x_h = X_3e^{\sigma t}\cos(\omega t + X_4)$$

The initial conditions are then used to find the values of X_3 and X_4.

Osservazioni

- Formule di Eulero:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i \sin x \\ \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{aligned}$$

Esercizio

Risolvere la seguente equazione differenziale date le condizioni iniziali

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0 \qquad x(0) = 1 \quad \dot{x}(0) = 2$$

soluzione:

$$x(t) = e^{-t} + 3te^{-t}$$

Soluzione non-omogenea del secondo ordine

- Trovare la soluzione dell’equazione omogenea associata
- Indovinare la forma finale della soluzione
- Si sostituisce all’interno dell’equazione e si trovano i valori dei coefficienti
- Si sommano la soluzione omogenea e quella particolare (assumendo la linearitá utilizziamo il principio di sovrapposizione degli effetti)
- La risposta libera é condizionata dai valori iniziali
- La soluzione particolare é detta risposta forzata ed é condizionata dall’input del sistema.

Esempio

$$A\dot{x} + Bx = Cf(t) \qquad x(0) = x_0$$
$$x_h = x_0 e^{(B/A)t}$$
$$x_p \quad dipendente \quad da \quad f(t)$$

Consideriamo l'equazione:

$$6\dot{x} + 2x = 5e^{4t}$$

Visto che la funzione in input é un esponenziale possiamo considerare la forma della soluzione particolare:

$$x_p = C_1 e^{at} \qquad \dot{x}_p = 4C_1 e^{4t}$$

Sostituiamo il tutto nell'equazione differenziale iniziale

$$\begin{aligned} 6(4C_1e^{4t}) + 2(c_1e^{4t}) &= 5e^{4t} \\ 24C_1 + 2C_1 &= 5 \\ C_1 &= 5/26 \end{aligned}$$

Combinamo le due soluzioni

$$x = x_p + x_h = 5/26e^{4t} + x_0e^(2/6)t$$

Esempio - parte I

Generally,

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = Df(t) \qquad x(0) = x_0 \quad \text{and} \quad \dot{x}(0) = v_0$$

1. *Find the homogeneous solution as before.*

$$x_h = X_3 e^{\sigma t} \cos(\omega t + X_4)$$
$$\text{or} \quad x_h = X_1 e^{\sigma t} + X_2 t e^{\sigma t}$$
$$\text{or} \quad x_h = X_1 e^{\sigma_1 t} + X_2 e^{\sigma_2 t}$$

2. *Guess the particular solution by looking at the form of 'f(t)'. This step is highly subjective, and if an incorrect guess is made it will be unsolvable. When this happens, just make another guess and repeat the process. For the purpose of illustration an example is given below. In the case below it should be similar to the sine function.*

For example, if we are given

$$2\ddot{x} + 6\dot{x} + 2x = 2\sin(3t + 4)$$

A reasonable guess is,

$$x_p = A\sin(3t) + B\cos(3t)$$
$$\dot{x}_p = 3A\cos(3t) - 3B\sin(3t)$$
$$\ddot{x}_p = -9A\sin(3t) - 9B\cos(3t)$$

Esempio - parte II

Substitute these into the differential equation ans solve for A and B.

$$2(-9A\sin(3t) - 9B\cos(3t)) + 6(3A\cos(3t) - 3B\sin(3t)) + 2(A\sin(3t) + B\cos(3t)) = 2\sin(3t+4)$$

$$(-18A - 18B + 2A)\sin(3t) + (-18B + 18A + 2B)\cos(3t) = 2\sin(3t+4)$$

$$(-16A - 18B)\sin(3t) + (18A - 16B)\cos(3t) = 2(\sin 3t\cos 4 + \cos 3t\sin 4)$$

$$(-16A - 18B)\sin(3t) + (18A - 16B)\cos(3t) = (2\cos 4)\sin(3t) + (2\sin 4)\cos(3t)$$

$$-16A - 18B = 2\cos 4 \qquad 18A - 16B = 2\sin 4$$

$$\begin{bmatrix} -16 & -18 \\ 18 & -16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos 4 \\ 2\sin 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & -18 \\ 18 & -16 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -1.307 \\ -1.514 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0109 \\ 0.0823 \end{bmatrix}$$

Next, rearrange the equation to phase shift form.

$$x_p = -0.0109\sin(3t) + 0.0823\cos(3t)$$

$$x_p = \sqrt{-0.0109^2 + 0.0823^2}\,\sin\left(3t + \operatorname{atan}\left(\frac{0.0823}{-0.0109}\right) + \frac{\pi}{2}\right)$$

3. Use the initial conditions to determine the coefficients in the homogeneous solution.

Soluzioni Particolari

Le forme in tabella possono servire nella risoluzione della soluzione particolare

Forcing Function	*Guess*
A	C
$Ax + B$	$Cx + D$
e^{Ax}	Ce^{Ax} *or* Cxe^{Ax}
$B\sin(Ax)$ *or* $B\cos(Ax)$	$C\sin(Ax) + D\cos(Ax)$ *or* $Cx\sin(Ax) + xD\cos(Ax)$

Esercizio

Risolvere la seguente equazione differenziale date le condizioni iniziali

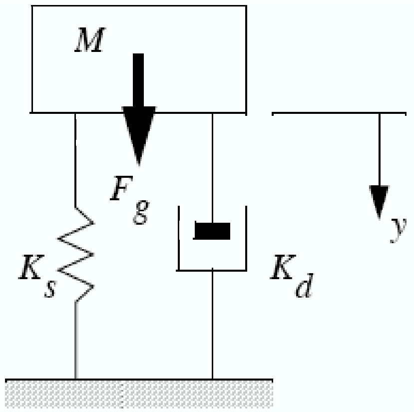
$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 1 \qquad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 0$$

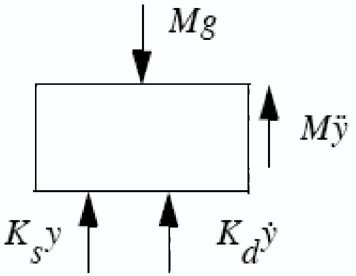
soluzione:

$$x(t) = -e^{-t} - te^{-t} + 1$$

Esercizio - parte I

Assume the system illustrated to the right starts from rest at a height 'h'. At time 't=0' the system is released and allowed to move.





$$+\!\uparrow \sum F_y = -Mg + K_s y + K_d \dot{y} = -M\ddot{y}$$

$$M\ddot{y} + K_d\dot{y} + K_s y = Mg$$

Find the homogeneous solution.

$$y_h = e^{At} \qquad \dot{y}_h = Ae^{At} \qquad \ddot{y}_h = A^2 e^{At}$$

$$M\ddot{y} + K_d\dot{y} + K_s y = 0$$

$$M\left(A^2 e^{At}\right) + K_d(Ae^{At}) + K_s(e^{At}) = 0$$

$$MA^2 + K_d A + K_s = 0$$

$$A = \frac{-K_d \pm \sqrt{K_d^2 - 4MK_s}}{2M}$$

Let us assume that the values of M, K_d and K_s lead to the case of two different positive roots. This would occur if the damper value was much larger than the spring and mass values. Thus,

$$A = R_1, R_2$$

$$y_h = C_1 e^{R_1 t} + C_2 e^{R_2 t}$$

Esercizio - parte II

Next, find the particular solution.

$$y_p = C \qquad \dot{y}_h = 0 \qquad \ddot{y}_h = 0$$

$$M(0) + K_d(0) + K_s(C) = Mg$$

$$C = \frac{Mg}{K_s}$$

Now, add the homogeneous and particular solutions and solve for the unknowns using the initial conditions.

$$y(t) = y_p + y_h = \frac{Mg}{K_s} + C_1 e^{R_1 t} + C_2 e^{R_2 t}$$

$$y(0) = h \qquad y'(0) = 0$$

$$h = \frac{Mg}{K_s} + C_1 e^0 + C_2 e^0$$

$$C_1 + C_2 = h - \frac{Mg}{K_s}$$

$$y'(t) = R_1 C_1 e^{R_1 t} + R_2 C_2 e^{R_2 t}$$

$$0 = R_1 C_1 e^0 + R_2 C_2 e^0$$

$$0 = R_1 C_1 + R_2 C_2 \qquad C_1 = \frac{-R_2}{R_1} C_2$$

$$-\frac{R_2}{R_1} C_2 + C_2 = h - \frac{Mg}{K_s}$$

$$C_2 = \left(\frac{K_s h - Mg}{K_s}\right)\left(\frac{-R_1}{R_1 - R_2}\right) \qquad C_1 = \frac{-R_2}{R_1}\left(\frac{K_s h - Mg}{K_s}\right)\left(\frac{-R_1}{R_1 - R_2}\right)$$

Now, combine the solutions and solve for the unknowns using the initial conditions.

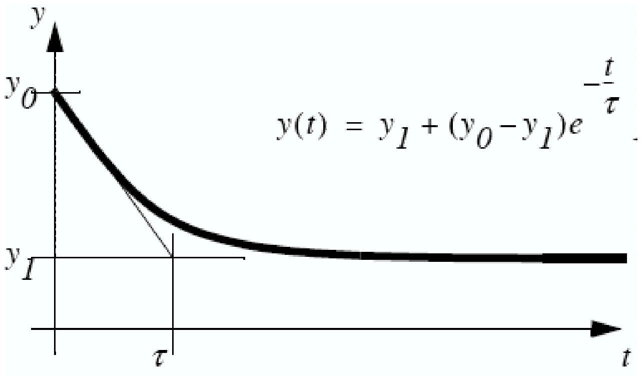
$$y(t) = \frac{Mg}{K_s} + \left(\frac{K_s h - Mg}{K_s}\right)\left(\frac{-R_1}{R_1 - R_2}\right) e^{R_1 t} + \frac{-R_2}{R_1}\left(\frac{K_s h - Mg}{K_s}\right)\left(\frac{-R_1}{R_1 - R_2}\right) e^{R_2 t}$$

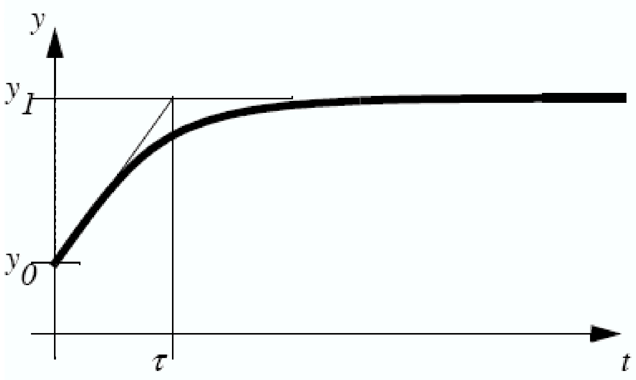
$$y(t) = \frac{Mg}{K_s} + \left(\frac{K_s h - Mg}{K_s}\right)\left(\frac{-R_1}{R_1 - R_2}\right) e^{R_1 t} + \left(\frac{K_s h - Mg}{K_s}\right)\left(\frac{R_2}{R_1 - R_2}\right) e^{R_2 t}$$

Risposte di Sistemi

Sistemi del primo ordine

- Descritti da un'equazione differenziale del primo ordine
- La risposta per questi sistemi é il naturale decadimento oppure la crescita
- La costante di tempo del sistema per andare a regime (la misura del tempo di reazione del sistema ai cambiamenti) puó essere trovata direttamente dall'equazione differenziale
- Tendono ad essere passivi
- Non sono oscillanti a meno che l'input non sia oscillante.





Esempio

Introduzione

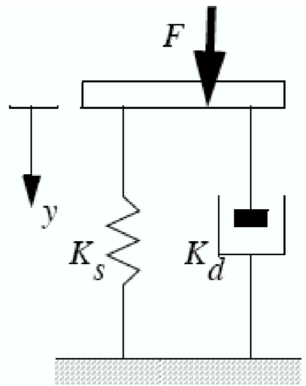
Soluzioni di Equazioni

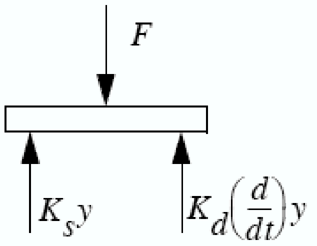
Risposte di Sistemi
- Sistemi del primo ordine
- Esempio
- Sistemi del secondo ordine
- Esercizio
- Altre risposte
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

Find the response to the applied force if the force is applied at t=0s. Assume the system is initially deflected a height of h.





$$+\uparrow \sum F_y = -F + K_s y + K_d\left(\frac{d}{dt}\right)y = 0$$

$$K_d\dot{y} + K_s y = F$$

Find the homogeneous solution.

$$y_h = Ae^{Bt} \qquad \dot{y}_h = ABe^{Bt}$$

$$K_d(ABe^{Bt}) + K_s(Ae^{Bt}) = 0$$

$$K_d B + K_s = 0$$

$$B = \frac{-K_s}{K_d}$$

Next, find the particular solution.

$$y_p = C \qquad \dot{y}_p = 0$$

$$K_d(0) + K_s(C) = F \qquad \therefore C = \frac{F}{K_s}$$

Combine the solutions, and find the remaining unknown.

$$y(t) = y_p + y_h = Ae^{\frac{-K_s}{K_d}t} + \frac{F}{K_s}$$

$$y(0) = h$$

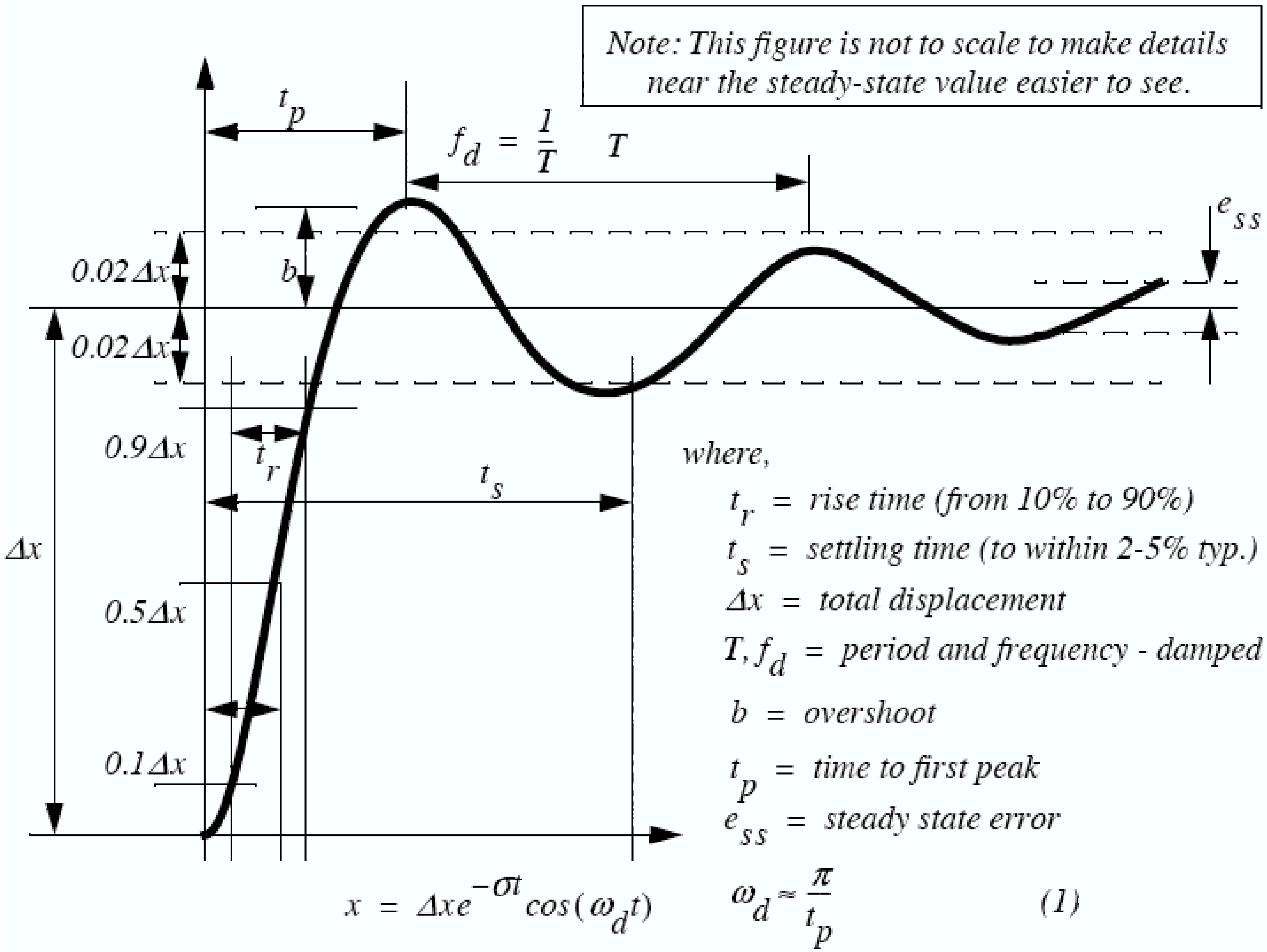
$$h = Ae^{0} + \frac{F}{K_s} \qquad \therefore A = h - \frac{F}{K_s}$$

The final solution is,

$$y(t) = \left(h - \frac{F}{K_s}\right)e^{\frac{-K_s}{K_d}t} + \frac{F}{K_s}$$

Sistemi del secondo ordine

Misurazioni dirette della risposta di un sistema del secondo ordine ci possono spiegare il comportamento del sistema



where,

- t_r = rise time (from 10% to 90%)
- t_s = settling time (to within 2-5% typ.)
- Δx = total displacement
- T, f_d = period and frequency - damped
- b = overshoot
- t_p = time to first peak
- e_{ss} = steady state error

$$\omega_d \approx \frac{\pi}{t_p} \qquad (1)$$

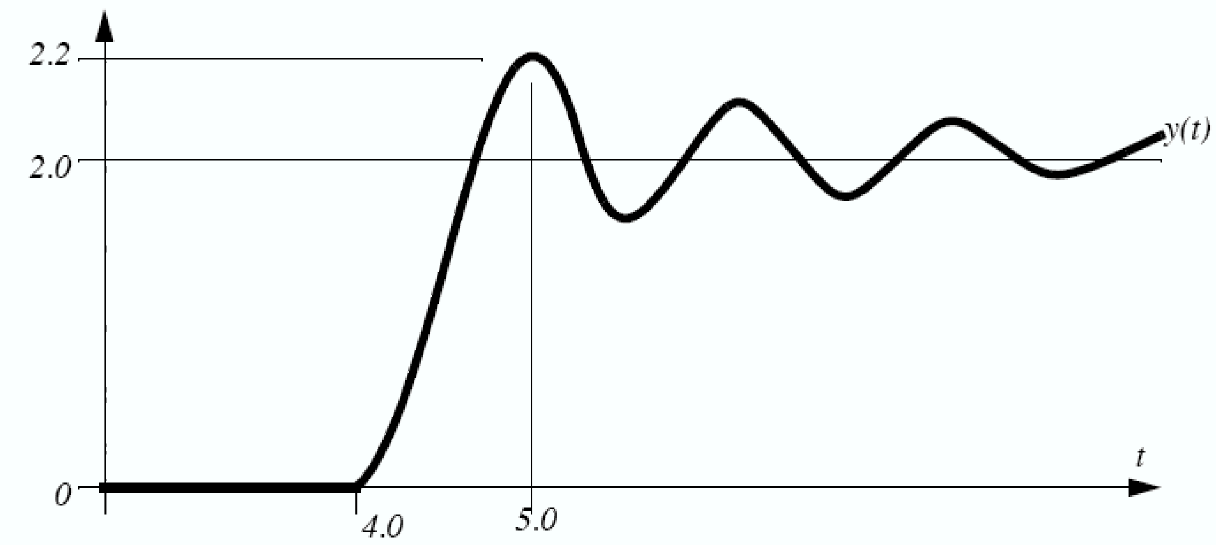
$$\sigma = \xi\omega_n \qquad (2)$$

$$\frac{b}{\Delta x} = e^{-\sigma t_p} \qquad (3)$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{t_p \sigma}\right)^2 + 1}} \qquad (4)$$

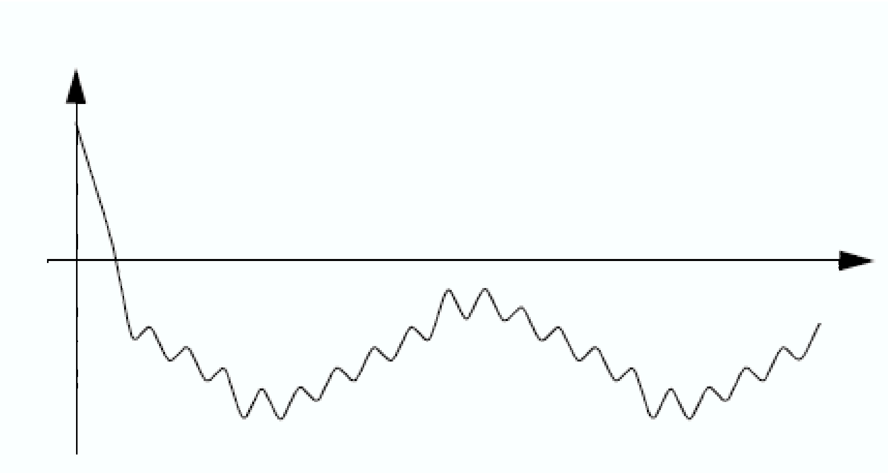
Esercizio

Scrivere una funzione nel dominio del tempo per il grafico (Trovare la frequenza naturale ed il coefficiente di smorzamento per l'equazione differenziale)



Altre risposte

- La risposta di sistemi di ordine elevato ha molti termini esponenziali e/o sinusoidali
- Per questo tipo di risposte si usano le stesse tecniche di risoluzione usate per equazioni di primo e secndo ordine
- Nella figura é rappresentata una possibile risposta di un sistema di ordine elevato. Si nota un profilo di base corrispondente ad un sistema del primo ordine a cui vengono sovrapposti tre risposte sinusoidali ad alte frequenze.



Esempio

Given the homogeneous differential equation

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^4 x + 13\left(\frac{d}{dt}\right)^3 x + 34\left(\frac{d}{dt}\right)^2 x + 42\left(\frac{d}{dt}\right) x + 20x = 5$$

Guess a solution for the homogeneous equation,

$$x_h = e^{At}$$

$$\frac{d}{dt}x_h = Ae^{At} \quad \left(\frac{d}{dt}\right)^2 x_h = A^2 e^{At} \quad \left(\frac{d}{dt}\right)^3 x_h = A^3 e^{At} \quad \left(\frac{d}{dt}\right)^4 x_h = A^4 e^{At}$$

Substitute the values into the differential equation and find a value for the unknown.

$$A^4 e^{At} + 13A^3 e^{At} + 34A^2 e^{At} + 42Ae^{At} + 20e^{At} = 0$$

$$A^4 + 13A^3 + 34A^2 + 42A + 20 = 0$$

$$A = -1, -10, -1-j, -1+j$$

$$x_h = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-10t} + C_3 e^{-t}\cos(t + C_4)$$

Guess a particular solution, and the solve for the coefficient.

$$x_p = A \quad \frac{d}{dt}x_p = 0 \quad \left(\frac{d}{dt}\right)^2 x_p = 0 \quad \left(\frac{d}{dt}\right)^3 x_p = 0 \quad \left(\frac{d}{dt}\right)^4 x_p = 0$$

$$0 + 13(0) + 34(0) + 42(0) + 20A = 5 \qquad A = 0.25$$

Esempio - parte I

Solve for the unknowns, assuming the system starts at rest and undeflected.

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-10t} + C_3 e^{-t} \cos(t + C_4) + 0.25$$

$$0 = C_1 + C_2 + C_3 \cos(C_4) + 0.25 \qquad (1)$$

$$C_3 \cos(C_4) = -C_1 - C_2 - 0.25 \qquad (2)$$

$$\frac{d}{dt} x_h(t) = -C_1 e^{-t} - 10 C_2 e^{-10t} - C_3 e^{-t} \cos(t + C_4) - C_3 e^{-t} \sin(t + C_4)$$

$$0 = -C_1 - 10 C_2 - C_3 \cos(C_4) - C_3 \sin(C_4) \qquad (3)$$

Equations (1) and (3) can be added to get the simplified equation below.

$$0 = -9 C_2 - C_3 \sin(C_4) + 0.25$$

$$C_3 \sin(C_4) = -9 C_2 + 0.25 \qquad (4)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 x_h(t) = C_1 e^{-t} + 100 C_2 e^{-10t} + C_3 e^{-t} \cos(t + C_4) + C_3 e^{-t} \sin(t + C_4) + C_3 e^{-t} \sin(t + C_4) - C_3 e^{-t} \cos(t + C_4)$$

$$0 = C_1 + 100 C_2 + C_3 \cos(C_4) + C_3 \sin(C_4) + C_3 \sin(C_4) - C_3 \cos(C_4)$$

$$0 = C_1 + 100 C_2 + 2 C_3 \sin(C_4) \qquad (5)$$

Equations (4) and (5) can be combined.

$$0 = C_1 + 100 C_2 + 2(-9 C_2 + 0.25)$$

$$0 = -17 C_1 + 100 C_2 + 0.5 \qquad (6)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^3 x_h(t) = -C_1 e^{-t} + (-1000) C_2 e^{-10t} - 2 C_3 e^{-t} \sin(t + C_4) + 2 C_3 e^{-t} \cos(t + C_4)$$

$$0 = -C_1 + (-1000) C_2 - 2 C_3 \sin(C_4) + 2 C_3 \cos(C_4) \qquad (7)$$

Esempio - parte II

Equations (2 and (4) are substituted into equation (7).

$$0 = -C_1 + (-1000)C_2 - 2(-9C_2 + 0.25) + 2(-C_1 - C_2 - 0.25)$$

$$0 = -3C_1 + (-984)C_2 - 1$$

$$C_1 = \left(-\frac{984}{3}\right)C_2 - \frac{1}{3} \qquad (8)$$

Equations (6) and (8) can be combined.

$$0 = -17\left(\left(-\frac{984}{3}\right)C_2 - \frac{1}{3}\right) + 100C_2 + 0.5$$

$$0 = 5676C_2 + 6.1666667 \qquad C_2 = -0.00109$$

$$C_1 = \left(-\frac{984}{3}\right)(-0.00109) - \frac{1}{3} \qquad C_1 = 0.0242$$

Equations (2) and (4) can be combined.

$$\frac{C_3 \sin(C_4)}{C_3 \cos(C_4)} = \frac{-9C_2 + 0.25}{-C_1 - C_2 - 0.25}$$

$$\tan(C_4) = \frac{-9(-0.00109) + 0.25}{-(0.0242) - (-0.00109) - 0.25} \qquad C_4 = -0.760$$

Equation (4) can be used the find the remaining unknown.

$$C_3 \sin(-0.760) = -9(-0.00109) + 0.25 \qquad C_3 = -0.377$$

The final response function is,

$$x(t) = 0.0242e^{-t} + (-0.00109)e^{-10t} + (-0.377)e^{-t}\cos(t - 0.760) + 0.25$$

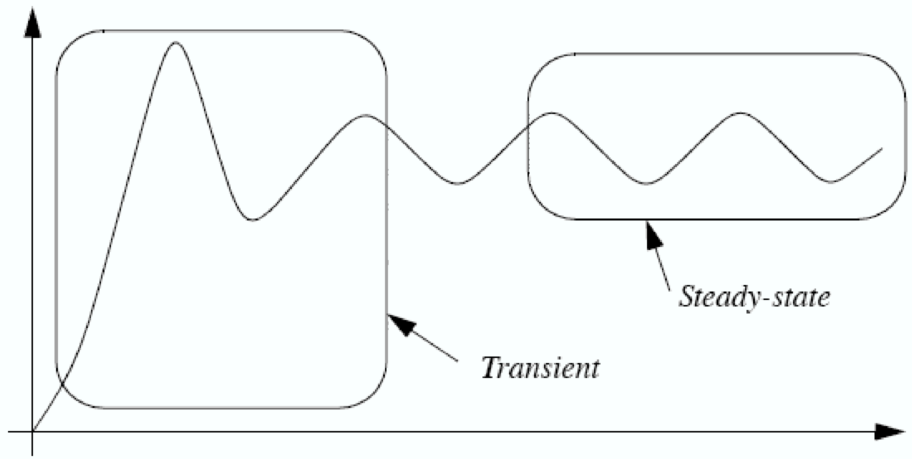
Analisi della Risposta

Osservazioni

- Calcolata la risposta, si procede nell'analisi
- La proprietá piú importante che viene richiesta ad un sistema e da analizzare é la stabilitá
- Semplici metodi per determinare la stabilitá sono:
  - Se lo scalino come input porta il sistema all'infinito, il sistema é instabile
  - Se la rampa come input porta il sistema all'infinito, il sistema potrebbe non rispondere bene ai cambiamenti costanti
  - Se la risposta ad un input sinusoidale cresce per ogni ciclo, il sistema é instabile.
- Oltre alla stabilitá dobbiamo decidere per un sistema le prestazioni (tempo, frequenza, smorzamento)

Osservazioni

- Si puó distinguere nel comportamento di un sistema:
  - transiente: soggetto alle condizioni iniziali
  - stato stazionario: a lungo termine
- Il comportamento transitorio é strettamente connesso alla soluzione omogenea dell'equazione differenziale che descrive il sistema, ed alle condizioni iniziali, é caratterizzato da un un veloce tempo di salita (rise time t_r) e sovraelongazione (overshooting b)
- Il comportamento a regime si predice con la soluzione particolare; si manifesta dopo un pó di tempo di funzionamento e si stabilizza ad una onda sinusoidale empre piú smorzata.



Sistemi non lineari

Osservazioni

- I sistemi non lineari non possono essere descritti da equazioni differenziali lineari (come quelle fino ad ora incontrate)
- Le condizioni piú comuni che portano alla non linearitá sono: forze che sono la radice quadrata della distanza, condizioni aerodinamiche

Esempi di equazioni differenziali non lineari (con le fonti di non lineritá cerchiate)

$$\dot{x} + x^2 = 5$$

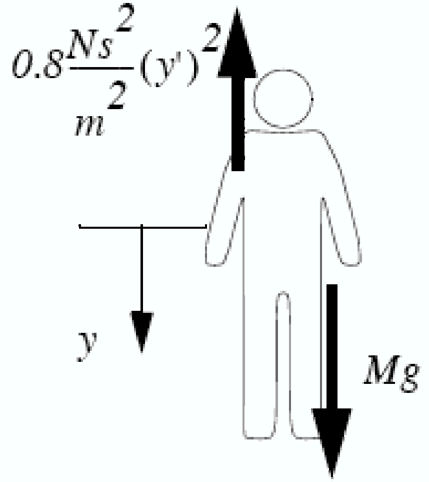
$$\dot{x}^2 + x = 5$$

$$\dot{x} + \log(x) = 5$$

$$\dot{x} + (5t)x = 5$$

Esempio

Si consideri l'equazione differenziale per una persona di $100kg$ lanciata da un aereo (le forze di trascinamento rendono l'equazione non lineare)



$$\sum F_y = 0.8(\dot{y})^2 - Mg = -M\ddot{y}$$

$$100kg\ddot{y} + 0.8\frac{Ns^2}{m^2}(\dot{y})^2 = 100kg\,9.81\frac{N}{kg}$$

$$100kg\ddot{y} + 0.8\frac{Ns^2}{m^2}(\dot{y})^2 = 981N$$

$$100kg\ddot{y} + 0.8kg\frac{m}{s^2}\frac{s^2}{m^2}(\dot{y})^2 = 981kg\frac{m}{s^2}$$

$$100\ddot{y} + 0.8m^{-1}(\dot{y})^2 = 981ms^{-2}$$

$$\ddot{y} + 8\times 10^{-3}m^{-1}(\dot{y})^2 = 9.81ms^{-2}$$

The terminal velocity can be found be setting the acceleration to zero.

$$(0) + 8\times 10^{-3}m^{-1}(\dot{y})^2 = 9.81ms^{-2}$$

$$\dot{y} = \sqrt{\frac{9.81ms^{-2}}{8\times 10^{-3}m^{-1}}} = \sqrt{\frac{9.81}{8\times 10^{-3}}m^2s^{-2}} = 35.0\frac{m}{s} = 126\frac{km}{h}$$

Esempio - parte I

Una risoluzione alternativa é quella di usare l'integrazione esplicita

$$100\ddot{y} + 0.8m^{-1}(\dot{y})^2 = 981ms^{-2}$$

$$100\dot{v} + 0.8m^{-1}v^2 = 981ms^{-2}$$

$$100\frac{dv}{dt} + 0.8m^{-1}v^2 = 981ms^{-2}$$

$$100\frac{dv}{dt} = 981ms^{-2} - 0.8m^{-1}v^2$$

$$\frac{100}{981ms^{-2} - 0.8m^{-1}v^2}dv = dt$$

$$\int \frac{\frac{100}{-0.8m^{-1}}}{\frac{981}{-0.8m^{-1}}ms^{-2} + v^2}dv = \int dt$$

$$\int \frac{-125m}{v^2 - 1226.25m^2s^{-2}}dv = t + C_1$$

$$\int \frac{-125m}{\left(v + 35.02\frac{m}{s}\right)\left(v - 35.02\frac{m}{s}\right)}dv = t + C_1$$

Esempio - parte II

This can be reduced with a partial fraction expansion.

$$\int\left[\frac{A}{\left(v+35.02\frac{m}{s}\right)}+\frac{B}{\left(v-35.02\frac{m}{s}\right)}\right]dv = t + C_1$$

$$Av - A\left(35.02\frac{m}{s}\right) + Bv + B\left(35.02\frac{m}{s}\right) = -125m$$

$$v(A+B) + 35.02\frac{m}{s}(-A+B) = -125m$$

$$A + B = 0 \qquad\qquad A = -B$$

$$35.02\frac{m}{s}(-A+B) = -125m$$

$$(-(-B)+B) = -\frac{125}{35.02}s \qquad\qquad B = -1.785s$$

$$A = 1.785s$$

$$\int\left[\frac{1.785s}{\left(v+35.02\frac{m}{s}\right)}+\frac{-1.785s}{\left(v-35.02\frac{m}{s}\right)}\right]dv = t + C_1$$

Esempio - parte III

L'integrale puó essere risolto usando una forma equivalente

$$1.785\,s\ln\left|v + 35.02\frac{m}{s}\right| - 1.785\,s\ln\left|v - 35.02\frac{m}{s}\right| = t + C_1$$

$$1.785\,s\ln\left|\frac{v + 35.02\frac{m}{s}}{v - 35.02\frac{m}{s}}\right| = t + C_1$$

$$\boxed{\int(a + bx)^{-1}dx = \frac{\ln|a + bx|}{b} + C}$$

$$\left|\frac{v + 35.02\frac{m}{s}}{v - 35.02\frac{m}{s}}\right| = e^{\frac{t}{1.785\,s} + C_1}$$

$$\left|\frac{v + 35.02\frac{m}{s}}{v - 35.02\frac{m}{s}}\right| = e^{C_1}e^{\frac{t}{1.785\,s}}$$

Esempio - parte IV

$$\left|\frac{v + 35.02\frac{m}{s}}{v - 35.02\frac{m}{s}}\right| = C_2 e^{\frac{t}{1.785s}}$$

An initial velocity of zero can be assumed to find the value of the integration constant

$$\left|\frac{0 + 35.02\frac{m}{s}}{0 - 35.02\frac{m}{s}}\right| = C_2 e^{\frac{0}{1.785s}} \qquad 1 = C_2$$

This can then be simplified, and the absolute value sign eliminated.

$$\frac{v + 35.02\frac{m}{s}}{v - 35.02\frac{m}{s}} = \pm e^{\frac{t}{1.785s}}$$

$$v + 35.02\frac{m}{s} = \pm v e^{\frac{t}{1.785s}} \mp 35.02\frac{m}{s} e^{\frac{t}{1.785s}}$$

$$v\left(1 \mp e^{\frac{t}{1.785s}}\right) = \mp 35.02\frac{m}{s} e^{\frac{t}{1.785s}} - 35.02\frac{m}{s}$$

$$v = 35.02\frac{m}{s}\left(\frac{\mp e^{\frac{t}{1.785s}} - 1}{1 \mp e^{\frac{t}{1.785s}}}\right) \qquad 0 = 35.02\frac{m}{s}\left(\frac{\mp 1 - 1}{1 \mp 1}\right) = \left(\frac{1 - 1}{1 + 1}\right) = \frac{0}{2}$$

$$v = 35.02\frac{m}{s}\left(\frac{e^{\frac{t}{1.785s}} - 1}{1 + e^{\frac{t}{1.785s}}}\right)$$

Linearizzazione

- La risoluzioni di equazioni differenziali non lineari non utilizza metodi di routine
- Tipicamente vengono usati metodi numerici (che vedremo nelle prossime lezioni)
- Un sistema non lineare puó essere approssimato con una equazione lineare nei seguenti modi:
  - Scegliendo un punto di operazione od un range per le componenti
  - Trovare una costante che relaziona i cambiamenti dell'input con quelli dell'output
  - Sviluppare un'equazione lineare
  - Usare comunque una equazione lineare per l'analisi
- Una equazione differenziale linearizzata puó essere risolta usando tecniche note a condizione che il sistema non si muova troppo lontano dal punto di linearizzazione

Esempio - parte I

Assumiamo di avere una equazione non lineare. Puó essere risolta linearizzandola nell'intorno del punto di operazione (la derivata non si discosti troppo da 100)

Given,

$$\dot{y}^2 + 4y = 200 \qquad y(0) = 10$$

We can make the equation linear by replacing the velocity squared term with the velocity times the actual velocity. As long as the system doesn't vary too much from the given velocity the model should be reasonably accurate.

$$\dot{y} = \pm\sqrt{200 - 4y}$$

$$\dot{y}(0) = \pm\sqrt{200 - 4(10)} = \pm 12.65$$

$$12.65\dot{y} + 4y = 20$$

This system may now be solved as a linear differential equation. If the velocity (first derivative of y) changes significantly, then the differential equation should be changed to reflect this.

Homogeneous:

$$12.65\dot{y} + 4y = 0$$

$$12.65A + 4 = 0 \qquad A = -0.316$$

$$y_h = Ce^{-0.316t}$$

Particular:

$$y_p = A$$

$$12.65(0) + 4A = 200 \qquad A = 50$$

Initial conditions:

$$y(t) = Ce^{-0.316t} + 50$$

$$10 = Ce^{0} + 50 \qquad C = -40$$

$$y(t) = -40e^{-0.316t} + 50$$

Esempio -parte II

Se la velocitá cambia significativamente allora l'equazione differenziale deve cambiare. Ricalcoliamo l'equazione dopo $0.1s$.

$$y(0.1) = -40e^{-0.316(0.1)} + 50 = 11.24$$

$$\frac{d}{dt}y(0.1) = -40(-0.316)e^{-0.316(0.1)} = 12.25 \qquad \textit{Note: a small change}$$

$$12.25y' + 4y = 20$$

Now recalculate the solution to the differential equation.

Homogeneous:

$$12.25\dot{y} + 4y = 0$$

$$12.25A + 4 = 0 \qquad A = -0.327$$

$$y_h = Ce^{-0.327t}$$

Particular:

$$y_p = A$$

$$12.25(0) + 4A = 200 \qquad A = 50$$

Initial conditions:

$$y(t) = Ce^{-0.327t} + 50$$

$$11.24 = Ce^{0.1} + 50 \qquad C = -35.070575$$

$$y(t) = -35.07e^{-0.316t} + 50$$

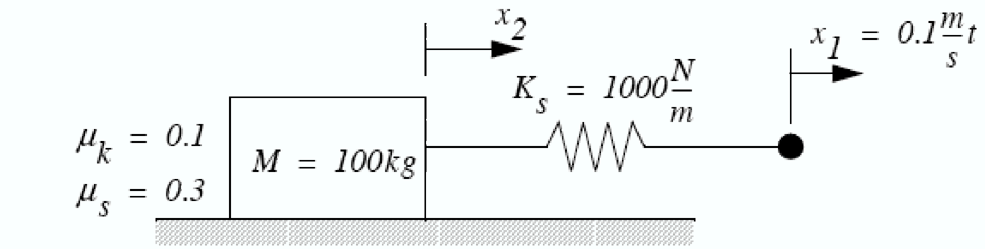
Notice that the values have shifted slightly, and as the analysis progresses the equations will adjust slowly. Higher accuracy can be obtained using smaller steps in time.

Sistemi che cambiano

- Nei sistemi reali le forze continuano a cambiare
- Esempi sono:
  - Forze di attrito statico all'inizio del moto che si trasformano in piú piccole forze di attrito cinetico
  - La forza su un cavo in tensione agisce come una molla, quando é compresso la forza va a zero

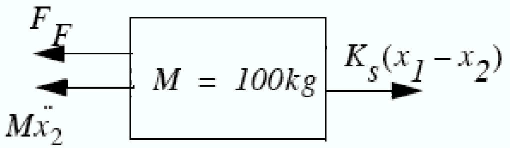
Esempio - parte I

Massa solidale ad un cavo



An FBD and equation can be developed for the system. The friction force will be left as a variable at this point.

For the cable/spring in tension $x_1 - x_2 \geq 0$



$$\sum F_x = -F_F + K_s(x_1 - x_2) = M\ddot{x}_2$$

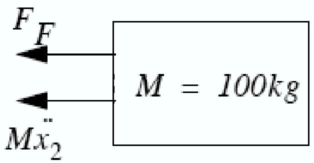
$$-F_F + 1000\frac{N}{m}\left(0.1\frac{m}{s}t - x_2\right) = 100kg\ddot{x}_2$$

$$100kg\ddot{x}_2 + 1000\frac{N}{m}x_2 = 1000\frac{N}{m}0.1\frac{m}{s}t - F_F$$

$$\ddot{x}_2 + 10\frac{N}{kgm}x_2 = 1\frac{N}{kgs}t - \frac{F_F}{100kg}$$

$$\ddot{x}_2 + 10s^{-2}x_2 = 1\frac{m}{s^3}t - \frac{F_F}{100kg}$$

For the cable/spring in compression $x_1 - x_2 < 0$



$$\sum F_x = -F_F = M\ddot{x}_2$$

$$-F_F = 100kg\ddot{x}_2$$

$$100kg\ddot{x}_2 = -F_F$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{F_F}{100kg}$$

Esempio - parte II

Introduzione

Soluzioni di Equazioni

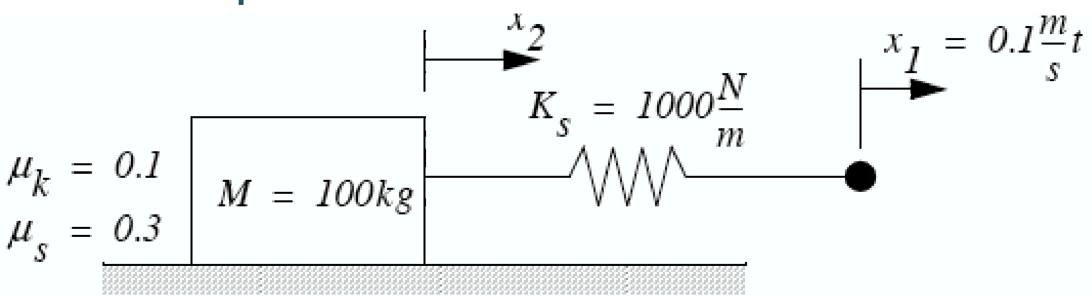
Risposte di Sistemi

Analisi della Risposta

Sistemi non lineari

- Osservazioni
- Esempio
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- Linearizzazione
- Esempio - parte I
- Esempio -parte II
- Sistemi che cambiano
- Esempio - parte I
- Esempio - parte II
- Esempio - parte III
- Esempio - parte IV
- Esempio - parte V
- Esempio - parte VI
- Caso studio - parte I
- Caso studio - parte II
- Caso studio - parte III
- Caso studio - parte IV
- Caso studio - parte V

Foze di attrito per la massa



An FBD and equation can be developed for the system. The friction force will be left as a variable at this point.

$$N = 100kg\,9.81\frac{N}{kg} = 981N$$

static friction $\quad \frac{d}{dt}x_2 \leq 0\frac{m}{s}$

$$0N \leq F_F < \mu_s N < 294.3N$$

kinetic friction $\quad \frac{d}{dt}x_2 > 0\frac{m}{s}$

$$F_F = \mu_k N = 98.1N$$

Esempio - parte III

Analisi dell'oggetto prima dell'inizio del moto. Si assume che il sistema parta da fermo e non deflesso. Il blocco quindi stará fermo fino a che le forze del cavo in tensione non supereranno quelle di attrito statico (il sistema é statico da 0 a $2.943s$)

$$x_2 = 0 \qquad \ddot{x}_2 = 0 \qquad F_F = 294.3N$$

$$\ddot{x}_2 + 10s^{-2}x_2 = 1\frac{m}{s^3}t - \frac{F_F}{100kg}$$

$$0 + 10s^{-2}0 = 1\frac{m}{s^3}t - \frac{294.3N}{100kg}$$

$$1\frac{m}{s^3}t = \frac{294.3kgm}{100kgs^2}$$

$$t = 2.943s$$

Esempio - parte IV

Analisi dell’oggetto dopo l’inizio del moto

$$\ddot{x}_2 + 10s^{-2}x_2 = 1\frac{m}{s^3}t - \frac{98.1N}{100kg}$$

For the homogeneous,

$$\ddot{x}_2 + 10s^{-2}x_2 = 0$$

$$A + 10s^{-2} = 0 \qquad A = \pm 3.16js^{-1}$$

$$x_h = C_1 \sin(3.16t + C_2)$$

For the particular,

$$x_p = At + B \qquad \dot{x}_p = A \qquad \ddot{x}_p = 0$$

$$0 + 10s^{-2}(At + B) = 1\frac{m}{s^3}t - \frac{98.1N}{100kg}$$

$$10s^{-2}A = 1\frac{m}{s^3} \qquad A = 0.1\frac{m}{s}$$

$$10s^{-2}B = -\frac{98.1N}{100kg} \qquad B = -0.0981m$$

Esempio - parte V

Analisi dell’oggetto dopo l’inizio del moto

For the initial conditions,

$$x(2.943s) = 0m \qquad \frac{d}{dt}x(2.943s) = 0\frac{m}{s}$$

$$x(t) = C_1 \sin(3.16t + C_2) + 0.1\frac{m}{s}t - 0.0981m$$

$$0 = C_1 \sin(3.16(2.943s) + C_2) + 0.1\frac{m}{s}(2.943s) - 0.0981m$$

$$C_1 \sin(9.29988 + C_2) = -0.1962$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = 3.16C_1 \cos(3.16t + C_2) + 0.1\frac{m}{s}$$

$$0 = 3.16C_1 \cos(3.16(2.943) + C_2) + 0.1\frac{m}{s}$$

$$C_1 \cos(9.29988 + C_2) = -0.0316$$

$$\frac{C_1 \sin(9.29988 + C_2)}{C_1 \cos(9.29988 + C_2)} = \frac{-0.1962}{-0.0316}$$

$$\tan(9.29988 + C_2) = 6.209 \qquad C_2 = (-7.889 + \pi n)rad \qquad n \text{ Œ } I$$

$$C_1 = \frac{-0.1962}{\sin(9.29988 - 7.889)} = -0.199m$$

$$x(t) = -0.199m \sin(3.16t - 7.889rad) + 0.1\frac{m}{s}t - 0.0981m$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = -0.199(3.16)m \cos(3.16t - 7.889rad) + 0.1\frac{m}{s}$$

Esempio - parte VI

Le equazioni di moto cambiano dopo che il cavo non oppone piú nessuna forza al moto (punto finale del cavo e blocco hanno lo stesso spostamento)

$$0.1\frac{m}{s}t = -0.199m\sin(3.16t - 7.889rad) + 0.1\frac{m}{s}t - 0.0981m$$

$$-0.199m\sin(3.16t - 7.889rad) = 0.0981m$$

$$3.16t - 7.889 + \pi n = -0.51549413 \qquad t = 3.328s$$

$$x(3.328) = 0.137m \qquad \frac{d}{dt}x(2.333) = 0.648\frac{m}{s}$$

After this the differential equation without the cable/spring is used.

$$x_2'' = -\frac{98.1N}{100kg} = -0.981\frac{m}{s^2}$$

$$\dot{x}_2 = \left(-0.981\frac{m}{s^2}\right)t + C_1$$

$$0.648\frac{m}{s} = \left(-0.981\frac{m}{s^2}\right)(3.328s) + C_1$$

$$C_1 = 3.913\frac{m}{s}$$

$$x_2 = \left(-\frac{0.981}{2}\frac{m}{s^2}\right)t^2 + 3.913\frac{m}{s}t + C_2$$

$$0.137m = \left(-\frac{0.981}{2}\frac{m}{s^2}\right)(3.328s)^2 + 3.913\frac{m}{s}(3.328s) + C_2$$

$$C_2 = -7.453m$$

$$x_2(t) = \left(-\frac{0.981}{2}\frac{m}{s^2}\right)t^2 + 3.913\frac{m}{s}t - 7.453m$$

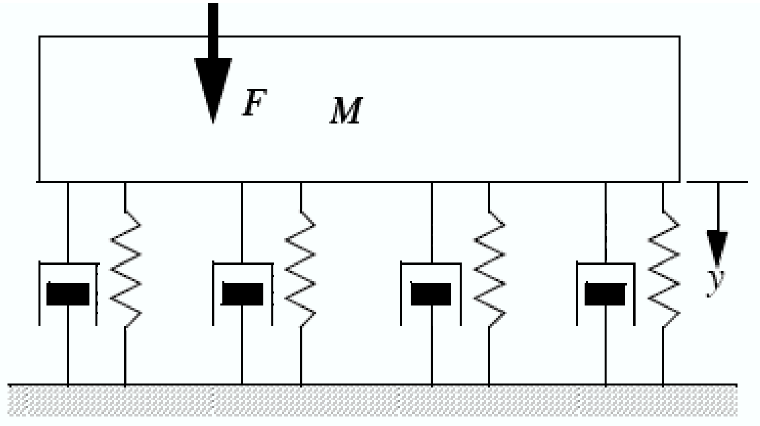
This motion continues until the block stops moving.

$$0 = \left(-0.981\frac{m}{s^2}\right)t + 3.913\frac{m}{s}$$

$$t = 3.989s$$

Caso studio - parte I

La massa é $10000kg$. Il sistema opera in modo che una forza di $1000N$ con una frequenza di $2Hz$ sia applicata alla massa. Progettare un sistema isolante per le vibrazioni (I criteri sono: gli isolanti, molla smorzatore devono essere lunghi $30cm$ quando non caricati ed $25cm$ quando caricati, le oscillazioni non possono essere piú di $2cm$)



Caso studio - parte II

Scomposizione a termini di froza

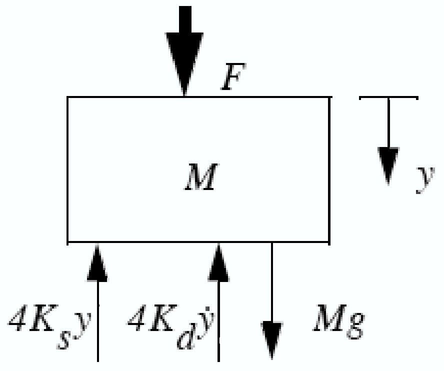
$$+\downarrow \sum F_y = F - 4K_s y - 4K_d \dot{y} + Mg = M\ddot{y}$$

$$M\ddot{y} + 4K_d \dot{y} + 4K_s y = F + Mg$$

$$\ddot{y} + \frac{4K_d \dot{y}}{M} + \frac{4K_s y}{M} = \frac{F}{M} + g$$

$$\ddot{y} + \frac{4K_d \dot{y}}{10000Kg} + \frac{4K_s y}{10000Kg} = \frac{1000N}{10000Kg} sin(2(2\pi)t) + 9.81ms^{-2}$$

$$\ddot{y} + 0.0004Kg^{-1} K_d \dot{y} + 0.0004Kg^{-1} K_s y = 0.1ms^{-2} sin(4\pi t) + 9.81ms^{-2}$$



Caso studio - parte III

Calcolo del coefficiente della molla

When the system is at rest the equation is simplified; the acceleration and velocity terms both become zero. In addition, we will assume that the cyclic force is not applied for the unloaded/loaded case. This simplifies the differential equation by eliminating several terms.

$$0.0004Kg^{-1}K_s y = 9.81ms^{-2}$$

Now we can consider that when unloaded the spring is 0.30m long, and after loading the spring is 0.25m long. This will result in a downward compression of 0.05m, in the positive y direction.

$$0.0004Kg^{-1}K_s(0.05m) = 9.81ms^{-2}$$

$$K_s = \frac{9.81}{0.0004(0.05)}Kgms^{-2}m^{-1}$$

$$\therefore K_s = 491KNm^{-1}$$

Caso studio - parte IV

Soluzione particolare dell'equazione differenziale

$$\ddot{y} + 0.0004Kg^{-1}K_d\dot{y} + 0.0004Kg^{-1}(491KNm^{-1})y = 0.1ms^{-2}\sin(4\pi t) + 9.81ms^{-2}$$

$$\ddot{y} + 0.0004Kg^{-1}K_d\dot{y} + 196s^{-2}y = 0.1ms^{-2}\sin(4\pi t) + 9.81ms^{-2}$$

The particular solution can now be found by guessing a value, and solving for the coefficients. (Note: The units in the expression are uniform (i.e., the same in each term) and will be omitted for brevity.)

$$y = A\sin(4\pi t) + B\cos(4\pi t) + C$$

$$y' = 4\pi A\cos(4\pi t) - 4\pi B\sin(4\pi t)$$

$$y'' = -16\pi^2 A\sin(4\pi t) - 16\pi^2 B\cos(4\pi t)$$

$$\therefore (-16\pi^2 A\sin(4\pi t) - 16\pi^2 B\cos(4\pi t)) + 0.0004K_d(4\pi A\cos(4\pi t) - 4\pi B\sin(4\pi t))$$
$$+ 196(A\sin(4\pi t) + B\cos(4\pi t) + C) = 0.1\sin(4\pi t) + 9.81$$

$$-16\pi^2 B + 0.0004K_d 4\pi A + 196A = 0$$

$$B = A(31.8\times 10^{-6}K_d + 1.24)$$

$$-16\pi^2 A + 0.0004K_d(-4\pi B) + 196A = 0.1$$

$$A(-16\pi^2 + 196) + B(-5.0\times 10^{-3}K_d) = 0.1$$

$$A(-16\pi^2 + 196) + A(31.8\times 10^{-6}K_d + 1.24)(-5.0\times 10^{-3}K_d) = 0.1$$

$$A = \frac{0.1}{-16\pi^2 + 196 + (31.8\times 10^{-6}K_d + 1.24)(-5.0\times 10^{-3}K_d)}$$

$$A = \frac{0.1}{K_d^2(-159\times 10^{-9}) + K_d(-6.2\times 10^{-3}) + 38.1}$$

$$B = \frac{3.18\times 10^{-6}K_d - 0.124}{K_d^2(-159\times 10^{-9}) + K_d(-6.2\times 10^{-3}) + 38.1}$$

$$C = 9.81ms^{-2}$$

Caso studio - parte V

Determinazione coefficiente di smorzamento

In the previous particular solution the values were split into cosine and sine components. The magnitude of oscillation can be calculated with the Pythagorean formul

$$magnitude = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$magnitude = \frac{\sqrt{(0.1)^2 + \left((3.18 \cdot 10^{-6})K_d - 0.124\right)^2}}{K_d^2(-159 \cdot 10^{-9}) + K_d(-(6.2 \cdot 10^{-3})) + 38.1}$$

The design requirements call for a maximum oscillation of 0.02m, or a magnitude of 0.01m.

$$0.01 = \frac{\sqrt{(0.1)^2 + \left((3.18 \cdot 10^{-6})K_d - 0.124\right)^2}}{K_d^2(-159 \cdot 10^{-9}) + K_d(-(6.2 \cdot 10^{-3})) + 38.1}$$

$$K_d = 3411 N \frac{s}{m}$$