LOGICA MATEMATICA

1. L'ESIGENZA DI STUDIARE UN LINGUAGGIO FORMALE.

Da sempre l'uomo si è posto domande fondamentali circa la sua esperienza nella propria vita. Uno di queste è: perché la realtà si comporta nel modo che viene constatato? Tale domanda continua a ripetersi perché le risposte proposte non si sono dimostrate definitive. E' nella comune esperienza dell'uomo l'illudersi, l'avere l'impressione che le cose stiano in un certo modo, per poi accorgersi di essersi sbaglilato. Come essere certi che un'eventuale risposta alla domanda posta inizialmente non sia sbagliata? Peggio, l'uomo sperimenta anche la falsità. Sa dire bugie, magari convincenti, come riconoscerle? Questo aspetto è rilevante anche per la conoscenza, dal momento che molte informazioni arrivano all'uomo non per esperienza diretta, che è molto limitata, ma perché riferite da altri, attraverso le possibilità comunicative di cui l'uomo dispone. Quando credere a ciò che viene comunicato? Dall'antichità l'uomo ha studiato questo problema in entrambe le direzioni: convincere e lasciarsi convincere. Così sono nate la retorica e l'ermeneutica. Ma l'ambizione era quella di arrivare a risultati certi, a volte possibili, come si può constatare nell'esperienza. Così l'uomo ha cominciato a notare e catalogare le modalità di espressione che portano a risultati incontrovertibili. Ecco la logica con i suoi sillogismi e le sue varie forme argomentative. Visti i successi ottenuti in questa direzione, l'uomo si è fatto ancora più aridito cercando di appogiare su basi certe e inconfutabili le risposte ai suoi problemi fondamentali. Così ha cercato di presentare tali basi come conseguenze di fatti che non possono che essere come sono, perchè concepiti in modo da autogiustificarsi per la stessa struttura (logica nel senso prima detto) della loro presentazione. In tal modo la mente umana sarebbe forzata ad accettare la basi così strutturate. Direi che in questa ottica si inseriscono varie opere di filosofi, che si sentono in dovere di precisare la logica (ancora nel senso sopra detto) su cui appoggiarsi, visto anche che altri sistemi logici, precedentemente elaborati, sarebbero stati insufficienti ai loro scopi.

Per secoli non si notò, in questa problematica, il ruolo centrale del linguaggio. Ipotizzando che il linguaggio fosse totalmente trasparente (cioè non frapponesse alcun ostacolo tra il significato rappresentato e il modo di rappresentarlo), non si sentì la necessita di separare i due momenti costituiti da ciò che si vuole rappresentare e dal modo con cui lo si rappresenta, ma anzi si analizzò la correttezza di quanto affermato attraverso lo studio dell'espressione linguistica che lo rappresentava. Questo atteggiamento, del tutto ragionevole nell'ambito dell'ipotesi formulata, portò ad identificare lo studio del ragionamento (dell'attività mentale) con lo studio delle espressioni del linguaggio al punto che l'ineluttabilità dell'accettazione di certe affermazioni si identificava con la correttezza del ragionamento. Pur non esplicitando cosa debba intendersi per ragionamento corretto, esso veniva ritenuto tale se seguiva le norme della logica, ovvero le norme del costituirsi di espressioni linguistiche della cui validità nessuno avrebbe potuto dubitare. Di conseguenza, la logica che si sviluppò si appoggiò pesantemente sugli aspetti linguistici, fino a sentire la necessità di giustificare la loro affidabilità. Ma proprio nel tentativo di dimostrare tale affidabilità, il linguaggio con le sue espressioni divenne oggetto dello studio. Affinché tale studio non fosse basato sulle sabbie mobili di una lingua viva, mutabile e sfuggente, anzitutto si dovette precisare il linguaggio che si voleva studiare, costruendolo e definendolo esplicitamente, e giungendo al cosiddetto linguaggio oggetto o linguaggio formale. Così facendo, si mise in risalto anche il ruolo dell'organizzazione interna del linguaggio nella determinazione delle affermazioni che si è forzati ad accettare come corrette. Fu proprio nell'ambito di questi studi che ci si accorse dei limiti dei linguaggi formali, ad esempio individuando concetti non rappresentabili con precisione (cioè non definibili né esplicitamente né implicitamente) mediante un linguaggio formale. A questi risultati si giungerà nello sviluppo dello studio che si sta intrapprendendo; qui, invece, interessa mettere in risalto come sia maturata l'esigenza di introdurre un linguaggio formale, e come, di conseguenza, si sia precisato il campo della logica come studio delle potenzialità e dei limiti dei linguaggi formali.

Ma le motivazioni indicate non sono le sole che portano alla considerazione di linguaggi formali. Un'altra fonte per questa esigenza è l'informatica.

Come indica l'origine etimologica della parola informatica (informazione automatica), questa si occupa di come trasmettere ed elaborare informazioni in modo automatico, attraverso opportune macchine.

A volte si pensa che solo l'uomo sia in grado di elaborare informazioni, detto altrimenti di ragionare, e può sorprendere il ricorso a delle macchine per effettuare una tale operazione, a meno che non si tratti di macchine intelligenti. Spesso i computers vengono chiamati proprio macchine intelligenti, ma, in effetti, sono autentiche macchine che eseguono solo le operazioni per cui sono state costruite, senza sapere ciò che fanno. Come possono allora elaborare informazioni?

Mentre nella comunicazione interpersonale si può assumere una conoscenza dei significati delle parole da parte degli interlocutori, conoscenza a cui si può ricorrere per cogliere il messaggio, quando questo passa attraverso una macchina, ed è eventualmente elaborato, non si può utilizzare né significato, né ingegno per realizzare la comunicazione e l'elaborazione. L'unica cosa su cui può operare una macchina è la forma linguistica del messaggio, la sua rappresentazione che deve essere ben architettata per poter essere accettata dalla macchina ed essere utile ad essa.

Come si vedrà dallo studio che seguirà, introducendo opportunamente un linguaggio, si possono trovare delle operazioni di trasformazione delle espressioni linguistiche che portano da espressioni con un certo significato ad espressioni il cui significato è ottenuto dal significato precedente mediante operazioni mentali sui significati (ragionando). Sicché al posto di operare sui significati, (attività riservata a chi comprende i significati), si può equivalentemente operare sulle espressioni di questi, attività eseguibile anche da chi non comprende il significato di quanto si sta facendo.

L'esistenza di questa attività parallela, che sarà illustrata nello studio successivo, suggerisce la possibilità di architettare e costruire macchine (prototipi di stupidità) che possano elaborare i significati semplicemente elaborando inconsapevolmente, ma comandate da chi sa cosa si vuol ottenere, le espressioni di un opportuno linguaggio.

Ecco l'esigenza di un linguaggio ben realizzato, eventualmente artificialmente costruito, per poter esser utilizzato nelle comunicazioni attraverso una macchina: l'esigenza di un linguaggio formale.

Così, volendo automatizzare e controllare come si ragiona, cioè come si opera nei modelli mentali, dobbiamo studiare come questo operare si manifesti attraverso il linguaggio. Ecco allora l'importanza dello studio delle potenzialità e dei limiti dei linguaggio, e, di conseguenza della logica se questa significa studiare proprio ciò.

Quando il linguaggio diventa oggetto di studio, esso diventa un **linguaggio oggetto**, di cui parliamo ovviamente usando un linguaggio che dobbiamo già conoscere, questo sarà chiamato **metalinguaggio**.

Come deve essere il linguaggio oggetto? Può essere un linguaggio naturale?

Non proprio, un po' per l'imprecisione di un qualsiasi linguaggio naturale. Direi che per forza i linguaggi naturali devono essere imprecisi a causa dei modi e degli scopi per cui sono sorti: devono rispondere alle esigenze umane di comunicazione qualunque sia l'argomento che si vuol trattare, e, senza perdere le precedenti doti di comunicabilità, devono svilupparsi nel tempo per rispondere alle nuove esigenze espressive anche riguardo a nozioni vaghe e forse non completamente esprimibili in alcun linguaggio formale meccanizzabile.

Di più, in un linguaggio naturale la stessa costruzione sintattica (cioè la determinazione delle successioni di simboli dell'alfabeto che vogliamo accettare per costruire dei discorsi) è regolata, a volte, da criteri che coinvolgono la semantica, cioè il significato dei termini usati. Ad esempio, si considerino le frasi "questo fiore è profumato" e "questo numero è pari": esse hanno la stessa strutturazione sintattica. Anche le seguenti frasi "questo fiore è pari" e "questo numero è profumato" hanno la stessa strutturazione sintattica, ma non sono accettate, non tanto per scorrettezze sintattiche, ma per il significato degli aggetttivi che non si applica ai rispettivi soggetti. Questa presenza di aspetti dell significato anche nel precisare la strutturazione sintattica del linguaggio naturale impedisce un controllo puramente sintattico sulla correttezza dei ragionamenti, che, invece, si può ottenere attraverso linguaggi opportunamente ben costruiti. Per chiarire questo concetto val la pena presentare un esempio a tutti noto.

Noi usiamo la notazione araba per indicare i numeri naturali. Questa notazione usa le cifre, simboli per indicare i numeri dallo zero al nove, e sfrutta la posizione delle cifre nella scrittura dei numeri. Sappiamo anche che i romani adottavano una notazione completamente diversa che partiva dai simboli I, V, X, L, C, D, M e ancora sfruttava la posizione, ma in modo diverso. Anche i romani, come noi, sapevano fare le operazioni fondamentali: i risultati della addizione e della moltiplicazione non dipendono dalla notazione ma dai numeri a cui si applicano queste operazioni. Però è molto più facile e sicuro eseguire, ad esempio, l' addizione di due numeri naturali a e b usando la notazione araba. Infatti, invece che effettuare l'operazione di passaggio al successore b volte a partire dal numero a (con la probabile possibilità di perdere il conto se il numero b è grande) e poi indicare il numero ottenuto con la notazione voluta, è più semplice usare il ben noto algoritmo della somma che opera sulle scritture in notazione araba dei numeri a e b per dare una scrittura che indica il numero somma, sempre nella notazione araba. Analogamente per la moltiplicazione si può operare sulla scrittura araba dei numeri da moltiplicare per ottenere la scrittura del prodotto. Cioè, con un buon linguaggio, ad una operazione tra gli enti che sono significato di certi nomi, si può sostituire un'operazione tra i nomi che porta, correttamente, in modo facilmente controllabile e senza far ricorso alla comprensione dei significati (dunque in modo meccanizzabile), al nome dell'ente risultato dell'operazione.

La notazione romana dei numeri, ed anche quella mediante il linguaggio naturale, non consentono questo interessante modo di procedere operando sul linguaggio invece che sugli enti indicati dal linguaggio (in particolare per la moltiplicazione), ma richiedono di conoscere il significato dei vocaboli per poter pervenire al risultato. Sicuramente il linguaggio naturale non è atto a poter essere elaborato da una macchina, che certo non è intelligente e non opera sui significati, ma neppure può essere usato come linguaggio oggetto di studio, perché sarebbe un oggetto mal definito e sfuggevole, dal momento che è un linguaggio vivo e in continua trasformazione.

Nonostante il linguaggio naturale sia così comodo, ben conosciuto, ed utilizzato anche in questo momento per comunicare quanto si sta indagando, le motivazioni appena viste fanno desiderare di costruire un linguaggio che funzioni almeno altrettanto bene quanto la notazione araba per i numeri naturali, ma esteso ad un campo ben più largo. Certo non si può pensare ad un linguaggio omnicomprensivo, per i motivi già detti riguardo ai linguaggi naturali, e ci si accontenterà di un linguaggio in grado di descrivere almeno situazioni matematiche.

Ovviamente, non si vuole che il linguaggio formale arrivi ad esprimere e dedurre (cioè controllare come accettabile) una qualsiasi stupidaggine, eventualmente una contraddizione. Attenzione, però, che, proprio a causa di questo desiderio, nello studio di un linguaggio formale non è sufficiente determinare cosa appartiene al linguaggio, cosa si deduce, cosa è vero in certe interpretazioni, ma anche cosa non appartiene al linguaggio, cosa non si deduce, cosa non è vero in quelle interpretazioni; ed il problema (come tutti i problemi di impossibilità) cambia ordine di difficoltà.

I problemi di impossibilità non hanno una risposta assoluta, ma dipendono dagli strumenti concessi per la soluzione, che vanno precisati, perché è rispetto ad essi che la soluzione può esserci o meno. Si pensi ad esempio al classico problema della quadratura del cerchio che non ha soluzioni con riga e compasso, ma che si risolve facilmente disponendo del passaggio al limite; o al problema di trovare le soluzioni dell'equazione $x^2-c = 0$ che, al variare dell'interpretazione di c tra 4, 2,-1, ha o non ha soluzioni in funzione del campo numerico in cui si cercano tali soluzioni.

Così, nel nostro caso, bisognerà precisare in modo definitivo quali sono gli strumenti concessi, e ancora una volta ci si accorge che il linguaggio comune, vivo ed in continua evoluzione, non è adatto per questo studio. Abbiamo bisogno di un linguaggio in cui siano ben precisate le espressioni da accettare e quelle da non accettare, al limite un oggetto artificialmente costruito allo scopo, ma che si comporti come un linguaggio, cioè sia almeno in grado di descrivere situazioni. Si è tornati così a sentir bisogno dello studio dei limiti e delle potenzialità di un linguaggio oggetto opportunamente costruito per le esigenze esposte (e qui l'enfasi è sul linguaggio costruito per quelle esigenze) o, come si usa dire, un linguaggio formale.

2. LE STRUTTURE.

Vistane l'esigenza, vi vuole passare all'introduzione di un linguaggio artificialmente costruito. Almeno inizialmente, ci si limita a linguaggi atti a descrivere situazioni, sull'esempio del linguaggio delle cifre arabe, ma capace di descrivere una qualsiasi situazione e non solo ciò che avviene tra numeri naturali. Ma prima ancora di vedere cosa ciò significhi e comporti, si noti una caratteristica che il linguaggio deve avere: deve essere sempre possibile riconoscere in modo effettivo le sue espressioni, che dovranno essere di lunghezza finita.

Poiché il linguaggio dovrà essere in grado di descrivere una qualsiasi situazione, si cercherà anzitutto di analizzare cos'è uno situazione in generale, prima di arrivare descriverla.

Astraendo il più possibile dalle particolarità di ogni singola situazione per offrire un concetto utilizzabile al massimo, si può dire che in ogni situazione ci sono degli elementi, degli oggetti, tra i quali ci sono delle relazioni che interessano.

Ecco dunque il concetto di **struttura** (che vuole cogliere quanto c'è in comune tra le varie situazioni): una struttura $\mathfrak{A}$ è una coppia ordinata il cui primo elemento è un insieme non vuoto (per non banalizzare il tutto) A, detto **universo** (in cui sono raccolti gli oggetti della situazione), e il cui secondo elemento è un insieme non vuoto $\mathcal{R}$ di **relazioni** R su A, ciascuna con la sua arietà maggiore di zero, cioè sottinsiemi del prodotto cartesiano di A con sé stesso tante volte quante viene specificato dall'arietà della relazione (queste sono le relazioni che ci interessano nella situazione). Così la relazione R di arietà n è un insieme di n-uple ordinate di elementi che appartengono ad A.

Si noti subito che abbiamo appena introdotto i nomi $\mathfrak{A}$ per la struttura, A per l'universo, $\mathcal{R}$ per l'insieme delle relazioni che ci interessano, R per una generica relazione di questo insieme, ma tutti questi nomi non sono simboli del linguaggio che vogliamo costruire, ma sono nomi nel linguaggio, diciamolo esterno, che usiamo per descrivere sia una struttura, che un linguaggio artificiale e i rapporti tra questi, linguaggio esterno che nel nostro caso è l'italiano arricchito di alcuni simboli e che, come già detto, viene chiamato metalinguaggio.

Si noti anche che la conoscenza del metalinguaggio deve essere presupposta alla conoscenza del linguaggio artificiale che costruiremo, e che questo, dunque, non potrà essere utilizzato a fondamento del comportamento del metalinguaggio (avremo modo di tornare su questa osservazione in vari momenti).

Spesso tra le relazioni si suole mettere in evidenza alcune tra quelle particolari relazioni che sono le **funzioni** n-arie totali, cioè le relazioni (n+1)-arie tali che comunque scelti ordinatamente n elementi dell'universo c'è un unico elemento che, ultimo dopo gli altri n, costituisce una (n+1)-upla ordinata della relazione; tali relazioni vengono dette totali e univoche. Si indichi con $\mathcal{F}$ l'insieme delle funzioni messe in evidenza. Per tali relazioni, si usa considerare l'operazione di applicazione ad un'n-upla ordinata, che è l'operazione che ad una qualsiasi n-upla ordinata di elementi dell'universo associa l'elemento dell'universo, che, considerato come (n+1)-esimo dopo gli altri n, dà un'(n+1)-upla ordinata che è un elemento della relazione: tale elemento è anche detto l'immagine dell'n-upla ordinata data attraverso la funzione. L'arietà delle funzioni può essere anche 0 (allora la funzione è una relazione totale univoca 1-aria), e in tal caso alla funzione appartiene un solo insieme ordinato con un solo elemento che appartiene all'universo, e viene chiamata **costante individuale** perché mette in evidenza un particolare elemento dell'universo. In questo caso la funzione si applica solo alle 0-uple (che non esistono, e dunque si applica a niente), e l'immagine attraverso la funzione è l'unico elemento associato. Si noti che le costanti individuali, essendo funzioni 0-arie su A, sono elementi dell'universo A, sicché l'insieme delle costanti indivuduali, che si indicherà con $\mathcal{C}$, è un sottinsieme di A, non necessariamente tutto A, ma costituito da quegli elementi di A che hanno un particolare interesse tanto da essere messi in evidenza.

Separando le funzioni totali messe in evidenza dalle relazioni e le costanti tra queste funzioni, una struttura $\mathfrak{A}$ diventa una quaterna ordinata (A,$\mathcal{R}$,$\mathcal{F}$,$\mathcal{C}$) il cui primo elemento è l'insieme non vuoto A, detto universo, il secondo elemento è l'insieme non vuoto $\mathcal{R}$ delle relazioni su A che si vogliono considerare nella struttura, eventualmente privato di quelle che considereremo tra le funzioni totali (questo insieme $\mathcal{R}$ non include necessariamente tutte le relazioni su A, ma solo alcune, quelle che interessano e che vengono considerate nella struttura), il terzo elemento (eventualmente vuoto) è l'insieme $\mathcal{F}$ delle funzioni totali su A che si vogliono considerare nella struttura che non sono costanti individuali (come prima, questo insieme $\mathcal{F}$ non include necessariamente tutte le funzioni totali su A non 0-arie, ma solo alcune, quelle che interessano e che vengono considerate nella struttura), e il quarto è l'insieme $\mathcal{C}$ (eventualmente vuoto) delle costanti individuali che si vogliono considerare nella struttura, che sono particolari elementi di A (ancora, questo insieme $\mathcal{C}$ non include necessariamente tutte le funzioni totali 0-arie, ma solo alcune, quelle che interessano e che vengono considerate nella struttura).

3. IL LINGUAGGIO.

Per descrivere il comportamento della struttura va introdotto un linguaggio adatto. Poiché si vogliono considerare le strutture nella loro generalità, non c'è alcuna informazione specifica sulle eventuali caratterizzazioni o rapporti tra le relazioni o sulle funzioni della struttura, così vanno prese come elementi non definiti (qui per definire si intende precisare mediante una frase che usa altre parole il cui significato è già noto), primitivi come si suol dire, per indicare i quali sarà necessario un apposito simbolo del linguaggio. Pertanto iniziamo introducendo nel linguaggio almeno un simbolo, che chiameremo **predicato**, in corrispondenza di ciascuna relazione della struttura, almeno un simbolo, che chiameremo **simbolo per funzione**, in corrispondenza di ciascuna funzione della struttura e almeno un simbolo, che chiameremo **simbolo per costante**, in corrispondenza di ciascuna costante della struttura, i simboli di quest'ultimo tipo possono anche essere detti i nomi dei corrispondenti elementi dell'universo che sono le costanti; ovviamente si intende che ad elementi diversi della struttura corrispondano simboli diversi. A ciascun simbolo così introdotto sarà associata un'arietà uguale a quella del predicato o della funzione a cui corrisponde (si ricordi che le costanti sono funzioni di arietà zero). (Si vedrà in seguito l'uso dell'arietà dei simboli). Un tal linguaggio verrà detto **adatto** o **adeguato** alla struttura.

Iniziamo anche ad indicare come si **interpretano** in una struttura gli elementi del linguaggio, cioè qual'è il loro significato, cominciando da quelli finora introdotti: i predicati si interpretano nelle relazioni a cui corrispondono, i simboli per funzione si interpretano nelle funzioni a cui corrispondono e i simboli per costante si interpretano nelle costanti a cui corrispondono. Si noti che i simboli del linguaggio finora introdotti non hanno, di per sé alcun significato, ma lo acquistano solo se collegati ad una struttura in cui vengono interpretati.

Detto come assegnare un significato, in una struttura, agli elementi del linguaggio finora introdotti, si vuol sottolineare subito un fatto molto importante. Si è partiti da una struttura e si sta cercando di costruire un linguaggio adatto a descrivere ciò che avviene in quella struttura. Ma lo stesso linguaggio è adatto anche a descrivere ciò che avviene in altre strutture che abbiano una certa analogia con quella data. Anzi questa possibilità deve essere una caratteristica del linguaggio che si sta costruendo. Per cercare di giustificare queste ultime affermazioni si considerino delle situazioni concrete che ne fanno emergere l'esigenza.

Sono molte, e tra loro diverse, le relazioni che si dicono "uguaglianza" nel linguaggio comune. Ad esempio, spesso si dice che due oggetti sono uguali per dire che hanno certe caratteristiche in comune pur essendo oggetti diversi. Anche se ciascuna relazione che chiamiamo uguaglianza sussiste tra due individui esattamente se tra questi ci sono delle ben precisate caratteristiche in comune (eventualmente quella di essere lo stesso elemento dell'universo), esse possono differire tra loro sia per l'insieme degli elementi a cui si applicano, che per quali caratteristiche devono essere condivise tra due elementi. Così si suole usare sempre lo stesso simbolo nel linguaggio artificiale in costruzione per indicare le varie relazioni che chiamiamo uguaglianza, ma quel simbolo, che è un predicato binario, sarà fatto corrispondere a (diremo interpretato in) relazioni diverse nelle varie strutture.

Pensiamo all'operazione addizione: è una funzione binaria che è diversa al variare dell'ambito numerico in cui viene considerata. Anche se l'operazione di addizione tra naturali è diversa da quella tra razionali, ad esempio, tuttavia le analogie presenti ci consigliano di usare lo stesso nome per entrambe le operazioni. Così quel simbolo sarà fatto corrispondere a funzioni binarie diverse nelle diverse strutture.

Ancora, a volte si vuol cogliere l'analogia di comportamento tra varie relazioni. Ad esempio si può voler considerare la relazione di immediato successore tra numeri naturali quasi come una generazione ed usare, in modo figurato, la relazione di figliolanza tra numeri dicendo, ad esempio, che tre è figlio di due. Questo uso in modo figurato di nomi si realizza dando allo stesso elemento del linguaggio interpretazioni diverse in strutture diverse.

Anche se negli esempi considerati ci sono dei particolari legami tra relazioni o funzioni in diverse strutture a cui si fa corrispondere lo stesso simbolo, non è opportuno richiedere la presenza di questi legami perché ciò limiterebbe, artificiosamente e dall'esterno, il modo di interpretare (assegnare un significato ai simboli, cioè far corrispondere ai predicati una relazione, ai simboli di funzione una funzione, ai simboli di costanti una costante mantenendo l'arietà) un linguaggio in una struttura.

C'è un altro ordine di motivazioni che giustificano il fatto che un simbolo possa essere interpretato in vari modi in varie strutture. Qualsiasi linguaggio è uno strumento comunicativo, e, anche se si vuole considerare un linguaggio atto a descrivere una struttura, oltre a chi descrive c'è anche chi riceve la comunicazione, e questi dovrebbe farsi un'idea della struttura descritta dalla descrizione. Ma perché l'immagine che l'ascoltatore si costruisce dalla descrizione della struttura dovrebbe coincidere con la struttura descritta? A priori bisogna supporre che l'immagine che l'ascoltatore si fa possa corrispondere ad una diversa interpretazione dei simboli del linguaggio. L'usuale esperienza di fraintendimenti conferma la possibilità di diverse interpretazioni in diverse strutture, anche se si potrebbe auspicare che un linguaggio opportunamente costruito debba permettere di individuare univocamente l'interpretazione voluta nella struttura che si intende descrivere. Alla fine si vedrà che ciò è chiedere troppo poiché si dimostrerà che un linguaggio non può individuare univocamente una interpretazione in un'unica struttura che abbia un universo infinito.

Così il linguaggio artificiale che stiamo costruendo non avrà solo l'interpretazione, in qualche modo privilegiata, che rende quel linguaggio atto a descrivere ciò che avviene nella struttura oggetto della nostra attenzione, ma potrà essere interpretato anche in altre strutture. Per queste ulteriori interpretazioni bisognerà specificare, oltre l'universo, quali relazioni, quali funzioni e quali costanti sono associate a ciascun predicato, a ciascun simbolo di funzione e a ciascun simbolo di costante rispettivamente, e gli enti nelle strutture corrispondenti allo stesso simbolo del linguaggio dovranno avere la stessa arietà. Sicché ci sarà un legame tra le varie strutture in cui può essere interpretato un certo linguaggio, che è il seguente: il medesimo linguaggio è adatto per ciascuna di quelle strutture (come detto, un linguaggio è adatto ad una struttura se c'è una corrispondenza che associa ad ogni predicato una relazione, ad ogni simbolo di funzione una funzione, ad ogni simbolo per costante una costante mantenendo l'arietà). In un certo senso si può dire che non solo un linguaggio è adatto a tutte le strutture che si prestano ad essere descritte con quel linguaggio, ma anche che quelle strutture sono adatte a quel linguaggio. Sicché la relazione tra strutture e linguaggi di essere adatti uno per l'altra può essere considerata simmetrica. Così si può parlare di strutture adatte allo stesso linguaggio, invece che di un unico linguaggio adatto a più strutture. Due strutture adatte per lo stesso linguaggio si dicono **strutture dello stesso tipo**.

4. I TERMINI.

Si è detto che ciascun simbolo per costante può essere considerato il nome della corrispondente costante. Attraverso le funzioni e i loro simboli, si può cercare di dar un nome anche ad altri elementi dell'universo che non sono costanti (l'immagine di funzioni 0-arie) della struttura: questo metodo è noto e lo si usa ad esempio quando si indica il numero 1 come il successore di 0, oppure una certa persona come il padre di un'altra. In effetti, se si applica una funzione n-aria ad un'n-upla di elementi dell'universo si ottiene un unico elemento dell'universo. Possiamo allora pensare di dare un nome a quell'elemento dell'universo sfruttando il simbolo per la funzione e i nomi per ciascuno degli elementi dell'n-upla. Di fatto si deve anzitutto precisare l'uso sintattico del simbolo di funzione, cioè come debba entrare in scritture (successioni finite di simboli) assieme ad altri simboli. Si ricordi anzitutto che le funzioni hanno una certa arietà: essa dovrà essere anche un elemento caratterizzante l'uso del simbolo per quella funzione per cogliere la dimensione della successione a cui è applicata la funzione. Così si decide che un simbolo di funzione debba essere seguito da tanti nomi di individui quanti sono previsti dall'arietà del simbolo di funzione, che è la stessa dell'arietà della funzione a cui il simbolo è associato.

Si sarà notato che è nostra intenzione ottenere nuovi nomi per elementi facendo seguire al simbolo per funzione nomi per elementi, ma non si sa cosa siano in generale i nomi per elementi. Sembra che ci sia una certa circolarità in quanto si sta per definire. Ma non è così perché si può partire da quei nomi per elementi che sono i simboli per costante, ed ottenerne degli altri usando il metodo che si sta delineando, ottenuti i quali si può riapplicare il metodo a quanto si ha a disposizione ora per ottenerne degli altri ancora, e così via iterando la procedura. Ciò porta a dare una definizione ricorsiva di questi primi nomi per elementi, che saranno chiamati **termini** (più avanti si introdurranno altri termini). Ciascun simbolo per costante è un termine; ed inoltre, se f è un simbolo di funzione n-ario e $t_1,..,t_n$ sono successioni finite di simboli già riconosciute come termini, allora anche la successione finita di simboli costituita da f seguito prima dai simboli che costituiscono t_1, poi dai simboli che costituiscono t_2,..., ed infine dai simboli che costituiscono t_n (che sarà indicata come $ft_1... t_n$) è un termine. Si noti che $t_1,..,t_n$ non sono simboli del linguaggio che si sta costruendo, ma indicano particolari successioni finite di simboli di detto linguaggio, quelle che possono essere riconosciute come termini proprio in base a quanto si è appena stabilito.

Si cercherà ora di interpretare nella struttura data, cioè dare significato a, queste prime scritture chiamate termini. L' interpretazione in una certa struttura $\mathfrak{A}$ di un termine che sia un simbolo per costante è la costante a cui quel simbolo è associato nella struttura $\mathfrak{A}$, e dunque è un elemento dell'universo di $\mathfrak{A}$. L'interpretazione del termine $ft_1...t_n$ è quell'elemento a dell'universo di $\mathfrak{A}$ che è immagine attraverso la funzione F, interpretazione in $\mathfrak{A}$ del simbolo f (cioè la funzione di $\mathfrak{A}$ cui è associato il simbolo f), dell'n-upla $(a_1,.. .,a_n)$ di elementi dell'universo di $\mathfrak{A}$ che sono le interpretazioni in $\mathfrak{A}$ dei termini $t_1,..., t_n$, cioè, se si indica con $(\ )^{\mathfrak{A}}$ l'operazione di interpretazione nella struttura $\mathfrak{A}$, $(ft_1...t_n)^{\mathfrak{A}}= (f)^{\mathfrak{A}}((t_1)^{\mathfrak{A}},.., (t_n)^{\mathfrak{A}})=F(a_1,...,a_n)=a$.

Chiaramente, anche questa è una definizione ricorsiva che ha la sua base nell'interpretazione in $\mathfrak{A}$ dei termini che sono simboli per costanti (se $\underline{c}$ è un simbolo per costante che è associato alla costante c nella struttura $\mathfrak{A}$, allora $(\underline{c})^{\mathfrak{A}}=c$), e prosegue supponendo che sia già precisata l'interpretazione, nella struttura $\mathfrak{A}$, di certi termini, $t_1,..., t_n$ (sia questa interpretazione l'n-upla $((t_1)^{\mathfrak{A}},..., (t_n)^{\mathfrak{A}})$ che è un'n-upla di elementi dell'universo, la si indichi con $(a_1,...,a_n)$), per dare quella di un termine, $ft_1...t_n$, ottenuto dai termini $t_1,.. ., t_n$ anteponendo alle loro scritture in successione un simbolo per funzione f della dovuta arietà (appunto, se $(f)^{\mathfrak{A}}$ è F e se $((t_1)^{\mathfrak{A}},..., (t_n)^{\mathfrak{A}})$ è $(a_1,...,a_n)$, allora $(ft_1...t_n)^{\mathfrak{A}}$ è $F(a_1,...,a_n)$).

5. LE FORMULE ATOMICHE.

Si cercherà ora di esprimere, attraverso il linguaggio, il fatto che una n-upla di individui dell'universo di una struttura appartenga ad una certa relazione n-aria della struttura, o, come si usa dire, che soddisfi quella relazione.
Si sono già introdotti i predicati, simboli per le relazioni. Per un motivo del tutto analogo a quello visto per i simboli per funzioni, anche a ciascun predicato si è assegnata un'arietà, quella della relazione a cui corrisponde.
Per ora ci si accontenterà di esprimere, nel linguaggio che si sta costruendo, quando un'n-upla $(a_1,...,a_n)$ di elementi che abbiano nome (al momento si considereranno solo tali elementi) soddisfi o meno una relazione n-aria R, si vuole cioè esprimere un legame tra una tale n-upla ed una relazione. Per fare ciò si comincia col convenire di usare la scrittura $Pt_1...t_n$ (cioè la scrittura che inizia con il simbolo P seguito dai simboli che costituiscono t_1, ..., seguiti dai simboli che costituiscono t_n) dove P è il predicato che si interpreta, nella struttura $\mathfrak{A}$, nella relazione R, e $t_1,..,t_n$ sono termini che si interpretano in $\mathfrak{A}$ rispettivamente negli elementi $a_1,...,a_n$ dell'universo di $\mathfrak{A}$, ed n è l'arietà della relazione e del predicato corrispondente.
Si chiamerà **formula atomica** una scrittura del tipo $Pt_1...t_n$: un predicato seguito da tanti termini quanti sono indicati dall'arietà del predicato.
Si noti che anche una formula atomica è una successione finita di simboli del linguaggio $\mathfrak{L}$.
Ci si pone ora il problema di interpretare in una struttura la scrittura $Pt_1...t_n$, di darle significato.
Si è abituati a dire che una affermazione è vera quando le cose stanno esattamente come l'affermazione le descrive, e si potrebbe adottare questa terminologia anche nel caso del linguaggio artificiale che si sta cercando di costruire. Si era detto che il nostro vuol essere un linguaggio per descrivere situazioni, ed ora si è proprio al punto di affermare se quanto dice l'espressione del linguaggio descrive o meno un aspetto della situazione.
Così si dirà che la scrittura $Pt_1..t_n$ è **vera** in una struttura $\mathfrak{A}$ se l'n-upla dei significati in $\mathfrak{A}$ dei termini $t_1,..,t_n$ appartiene alla relazione che è l'interpretazione in $\mathfrak{A}$ del predicato P, altrimenti si dirà che è **falsa**; cioè $(Pt_1...t_n)^{\mathfrak{A}}=V$ se $((t_1)^{\mathfrak{A}},...,(t_n)^{\mathfrak{A}}) \in (P)^{\mathfrak{A}}$, mentre $(Pt_1...t_n)^{\mathfrak{A}}=F$ se $((t_1)^{\mathfrak{A}},..., (t_n)^{\mathfrak{A}}) \notin (P)^{\mathfrak{A}}$. V ed F sono i segni metalinguistici che vengono usati per indicare il vero e il falso rispettivamente.
Si noti che V ed F non appartengono al linguaggio artificiale che si sta introducendo, chiamiamolo $\mathfrak{L}$, ma sono abbreviazioni dell'italiano, linguaggio che si sta usando per parlare della sintassi e della semantica (il modo di interpretare gli elementi della sintassi) delle espressioni linguistiche di $\mathfrak{L}$.
Ancora un'osservazione su qual'è l'accezione della parola vero che si sta usando. In italiano questa parola ha vari significati, tra i quali alcuni emergono in particolar modo.
In una prima accezione si parla di vero, del vero motivo, della vera causa, quando si vuole individuare il motivo principale, forse determinante, che ha generato una certa situazione.
In una seconda accezione si parla di vero, di cercare il vero, quando non si sa come stanno le cose e lo si vorrebbe scoprire: è la verità del giudice che cerca di scoprire come si sono svolti i fatti avendo a disposizione delle informazioni a volta anche contraddittorie. In questa circostanza il giudice si chiede qual'è la verità, volendo domandarsi cosa è avvenuto di fatto. In questo caso il linguaggio non è coinvolto nel concetto di verità. Questa riguarda solo dei fatti: si tratta di individuare, tra i fatti riportati dai testimoni, quelli che sono effettivamente accaduti.
Diverso è il significato nella terza accezione che si considererà. Sappiamo che si può cercare di nascondere ad altri il motivo di una scelta personale e giustificarla con delle scuse, cioè delle motivazioni corrette e plausibili ma che non sono la vera motivazione, quella che ha provocato la scelta fatta. Ecco un altro significato della parola vero: qui sta ad indicare la motivazione essenziale che ha determinato una scelta.
Così, finora, l'alternativa nello scegliere che significato da dare alla parola verità è almeno tra i seguenti significati: causa determinante, ricerca di come stanno le cose, e moti-

L'uso che si farà qui della parola vero è ancora diverso e sarà il seguente: si dirà vera una espressione del linguaggio se racconta i fatti esattamente come sono, cioè si dirà vera un'espressione del linguaggio se è una descrizione fedele di aspetti di una situazione nota. Questa è, in qualche modo, la verità del notaio che attesta e dichiara ciò che conosce. Nel caso che si sta ora considerando, i fatti devono essere completamente conosciuti, e anche quando non lo saranno si supporrà che lo siano. Inoltre si attribuisce la verità ad un'espressione del linguaggio, relativamente ad una interpretazione in una struttura ben precisata e completamente nota (e non ai fatti), e si dirà che quell'espressione è vera in quell'interpretazione in quella struttura esattamente nel caso in cui ciò che afferma è proprio come stanno effettivamente i fatti collegati all'espressione dall'interpretazione nella struttura, struttura che, ripeto, deve essere supposta perfettamente nota.

Nel proporre di accettare qui l'accezione appena precisata della nozione di vero, chiaramente si compie una ben precisa scelta che coinvolgerà gli sviluppi successivi. La logica studiata oggi non si limita al caso scelto, cioè all'ipotesi che la situazione sia completamente nota, ma quello scelto è l'ambito della logica classica, e ritengo che sia opportuno farsi un'idea più precisa di cosa sia la logica classica prima di passare alle logiche non classiche.

Si è così precisato un po' meglio cosa si intende per vero, e di conseguenza anche per falso (che vuol dire non vero), che sono i possibili significati di una formula atomica.

6. LE FORMULE.

Ma una formula atomica si limita a descrivere un aspetto della struttura in considerazione, mentre, in genere, sono molti gli aspetti di una struttura che si vogliono descrivere. Per far fronte a tale molteplicità di aspetti, si dovranno usare varie affermazioni, magari combinandole in un'unica espressione. Si può prendere lo spunto dal linguaggio naturale: in esso si formulano frasi del tipo "succede un fatto A ed anche un altro B" oppure "o succede una certo fatto C o non succede un altro D". Volendo dare una analoga potenzialità al linguaggio formale si dovranno introdurre varie modalità di combinare in un'unica descrizione descrizioni di aspetti di una struttura da descrivere. E' chiaro che anche il significato di quell'unica espressione, ottenuta componendone altre, dovrà essere il vero o il falso a seconda che l'espressione descriva la situazione come in effetti è o meno. Si chiamano **formule** queste espressioni del linguaggio $\mathfrak{L}$. Le formule atomiche saranno particolari formule e il significato di una qualsiasi formula, atomica o non atomica, dovrà essere o il vero o il falso.

Poiché una formula più complessa dovrebbe essere la combinazione in un'unica espressione di formule che colgono solo particolari aspetti, e quanto essa descrive dipende da cosa descrivono le componenti e da come sono combinate (possono esserlo in modi diversi come è indicato dai due diversi esempi dal linguaggio naturale sopra riportati), si vuole che il valore di verità (l'essere vera o falsa) di una formula, cioè il suo significato, dipenda da quali sono i valori di verità delle formule che la compongono e da come sono combinate tra loro, e soltanto da ciò.

Evidentemente ci sono vari modi di combinare tra loro n-uple di valori di verità per ottenere corrispondenti valori di verità. Così, nello scrivere una formula che vuole combinare in un'unica espressione varie espressioni parziali, bisognerà avere una notazione per indicare quale è il modo di combinare i valori di verità delle varie espressioni parziali, modo che viene adottato per ottenere il valore di verità dell'espressione complessiva.

Sempre nello spirito che la sintassi debba essere indipendente dai significati attribuiti ai simboli, il modo di mettere assieme dei valori di verità per ottenere un valore di verità deve andar bene qualunque siano le componenti, e, perciò, deve essere precisato qualunque siano i valori di verità delle componenti.

Poiché i valori di verità sono solo due (V e F) e si vogliono combinare in una formula un prefissato numero finito n di componenti, i possibili modi di mettere assieme n valori di verità per ottenere dei valori di verità sono in numero finito, e precisamente tanti quanti sono i modi di associare dei valori di verità ad n-uple di valori di verità, cioè tanti quante sono le funzioni da n-uple di valori di verità nei valori di verità, ovverosia $2^{(2^n)}$, perché 2^n

struttura in cui si vuole interpretare un linguaggio (non sono tra le funzioni o tra le relazioni di una struttura), e non sono neppure elementi del linguaggio (eventualmente lo saranno i loro nomi), ma sono modi di organizzare e accorpare le osservazioni su una struttura. Poiché i modi di mettere assieme n valori di verità per ottenere dei valori di verità sono, per ciascun numero naturale n, nel numero finito calcolato, ci vorrebbe una quantità numerabile di nomi per indicare queste funzioni sui valori di verità, ma non si riserverà un nome per quelle funzioni che possano essere generate da altre e che non siano di uso frequente.

Si chiameranno **connettivi** i simboli, che si aggiungeranno al linguaggio artificiale in costruzione $\mathfrak{L}$, che saranno nomi di funzioni da n-uple di valori di verità nei valori di verità, e l'interpretazione di un connettivo sarà la funzione di cui è nome, che, si noti, è una interpretazione indipendente da quale sia la struttura adottata per l'interpretazione di altri simboli del linguaggio.

Si comincino a considerare le funzioni da $\{V,F\}^n$ in $\{V,F\}$ quando n è 1. Esse sono quattro e possono essere descritte mediante la seguente tavola che dice, per ciascuna delle quattro funzioni, quale valore di verità la funzione associa al valore di verità della componente.

	f_1'	f_2'	f_3'	f_4'
V	V	V	F	F
F	V	F	V	F

Si noti che la funzione f_2' è la funzione identica ed è inutile avere un nome per essa: al posto della formula composta basta tenere la componente. Inoltre si potrà vedere, dopo l'introduzione delle funzioni binarie, che le funzioni f_1' e f_4' possono essere generate da altre funzioni, perciò non vale la pena di introdurre un nome neppure per queste. Infine, la funzione f_3' è quella che scambia i valori di verità; essa si comporta come l'usuale accezione del "non" in italiano: per essa si sceglierà il simbolo $\neg$, simbolo che verrà letto "non" ed interpretato, appunto, nella funzione f_3.

Si considerino ora le funzioni da $\{V,F\}^n$ in $\{V,F\}$ quando n è 2. Sono 16 e, come prima, possono essere rappresentate mediante una tavola

		f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F

La funzione f_2 ha un comportamento che ricorda quello del significato più usuale della disgiunzione "o" in italiano. Le si assegna il simbolo $\vee$, simbolo che sarà chiamato "o" e che si interpreta nella funzione f_2.

La funzione f_8 ha un comportamento che ricorda quello del significato più usuale della congiunzione "e" in italiano. Le si assegna il simbolo $\wedge$, simbolo che sarà chiamato "e" e che si interpreta nella funzione f_8.

Anche la funzione f_5 ha un comportamento particolare. Esso ricorda quello del significato a volte, in italiano, della locuzione "se ... allora ...", o della locuzione "ogniqualvolta ... allora succede anche che ...", oppure anche di una certa accezione della parola "implica". Attenzione che spesso, in italiano, implica indica una conseguenza, una causalità: qui non c'è niente di questo, il linguaggio artificiale che stiamo costruendo vuole solo descrivere situazioni, dire come stanno le cose, cosa succede quando altre cose succedono, senza darne i perché né una qualsiasi motivazione. Si assegna alla funzione f_5 il

Una ulteriore funzione a cui spesso si da un nome è la f_7. Il suo comportamento ricorda quello della locuzione in italiano "se e solo se", ma ancora nell'accezione puramente descrittiva, senza alcuna intenzione di causa reciproca tra due affermazioni. Si assegna alla funzione f_7 il simbolo $\leftrightarrow$, simbolo che sarà chiamato "equivalente a" e che si interpreta nella funzione f_7.

Non interessa andare oltre nell'attribuzione di nomi alle funzioni indicate nelle due tabelle perché si dimostra che esse (ed anche tutte le funzioni di qualsiasi arietà sui valori di verità) sono tutte generabili o dalle due funzioni di simboli $\neg$ ed $\vee$, o dalle due funzioni di simboli $\neg$ ed $\wedge$, o dalle due funzioni di simboli $\neg$ ed $\rightarrow$. Si può fare anche di meglio: ciascuna delle funzioni f_9 e f_{15} , a cui assegniamo i simboli | e |' rispettivamente, da sola genera tutte le funzioni delle due tabelle (ed anche tutte le funzioni di qualsiasi arietà sui valori di verità). Ma, usando una di queste due ultime funzioni, la lettura diverrebbe tanto difficoltosa da sconsigliare la loro adozione.

Per dimostrare il risultato appena menzionato si fa vedere che le funzioni di simboli $\neg$, $\wedge$ ed $\vee$ sono ottenibili dalle coppie di funzioni o dalle singole funzioni sopra menzionate, e poi si dimostra che ogni altra funzione dalle n-uple di valori di verità nei valori di verità si ottiene dalle tre di simboli $\neg$, $\wedge$ ed $\vee$. La prima parte segue dalle seguenti uguaglianze:

$$\wedge(x_1,x_2)=\neg(\vee(\neg(x_1),\neg(x_2))),\ \vee(x_1,x_2)=\neg(\wedge(\neg(x_1),\neg(x_2))),\ \wedge(x_1,x_2)=\neg(\rightarrow(x_1,\neg(x_2))),$$
$$\vee(x_1,x_2)=\rightarrow(\neg(x_1),x_2),$$
$$\neg(x_1)=|(x_1,x_1),\ \neg(x_1)=|'(x_1,x_1),$$
$$\wedge(x_1,x_2)=|(|(x_1,x_2),|(x_1,x_2)),\ \vee(x_1,x_2)=|'(|'(x_1,x_2),|'(x_1,x_2)),$$

dove x_1 e x_2 sono variabili sui valori di verità e si è usata la solita notazione per le funzioni e la composizione di funzioni nel metalinguaggio. La prima uguaglianza mostra che la funzione di simbolo $\wedge$ è ottenibile dalle funzioni di simboli $\neg$ ed $\vee$ (ovviamente $\neg$ ed $\vee$ sono ottenibili da loro stesse e non ripeteremo osservazione di questo tipo nel seguito). La seconda uguaglianza mostra che la funzione di simbolo $\vee$ è ottenibile dalle funzioni di simboli $\neg$ ed $\wedge$. La terza uguaglianza mostra che la funzione di simbolo $\wedge$ è ottenibile dalle funzioni di simboli $\neg$ ed $\rightarrow$. La quarta uguaglianza mostra che la funzione di simbolo $\vee$ è ottenibile dalle funzioni di simboli $\neg$ ed $\rightarrow$. La quinta e la sesta uguaglianza mostrano che la funzione di simbolo $\neg$ è ottenibile sia dalla funzione di simbolo | che dalla funzione di simbolo |'. La settima uguaglianza mostra che la funzione di simbolo $\wedge$ è ottenibile dalla funzione di simbolo |. L'ottava uguaglianza mostra che la funzione di simbolo $\vee$ è ottenibile dalla funzione di simbolo |'. Ciò completa la dimostrazione della prima parte di quanto si è asserito, mentre la seconda parte sarà affrontata dopo la prossima osservazione.

Le funzioni di simboli $\wedge$ ed $\vee$ sono sia associative che commutative, sicché avrà senso usare non ambiguamente le notazioni $\wedge(x_1,\ldots,x_n)$ e $\vee(x_1,\ldots,x_n)$, pur essendo $\wedge$ ed $\vee$ simboli di funzioni binarie, intendendo con queste notazioni, ad esempio, $\wedge(x_1,\wedge(x_2,\wedge(\ldots,\wedge(x_{n-1},x_n)\ldots)))$ e $\vee(x_1,\vee(x_2,\vee(\ldots,\vee(x_{n-1},x_n)\ldots)))$ rispettivamente. Così $\wedge$ ed $\vee$ sono divenuti anche simboli per particolari funzioni n-arie dai valori di verità nei valori di verità, che però sono ottenibili dalle funzioni binarie di simboli $\wedge$ ed $\vee$. Si osservi che la funzione n-aria $\wedge$ associa V solo all'n-upla costituita da soli V, mentre la funzione n-aria $\vee$ associa F solo all'n-pla costituita da soli F.

Per quanto riguarda poi tutte le funzioni da $\{V,F\}^n$ in $\{V,F\}$ con $n>0$, si dimostra che esse sono tutte generabili dalle funzioni $\neg$, $\wedge$, $\vee$, e perciò anche dalle funzioni che generano queste, per cui non introdurremo nel linguaggio $\mathfrak{L}$ alcun altro nuovo simbolo in corrispondenza alle funzioni che possono essere generate.

Per dimostrare questa affermazione si consideri, per un numero naturale n scelto ad arbitrio, una funzione n-aria f dalle n-uple dei valori di verità nei valori di verità. Si indichi con $(a_1,a_2,\ldots,a_i,\ldots,a_{n-1},a_n)$ una n-upla di valori di verità tale che $f(a_1,a_2,\ldots,a_i,\ldots,a_{n-1},a_n)=V$. Se si è in tale caso, si considerino poi le funzioni 1-arie g_i, $i=1,\ldots,n$, tali che g_i è la funzione identica se a_i è V mentre g_i è la funzione di simbolo $\neg$ se a_i è F. Si noti che la funzione n-aria $f_{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n}$ definita da

$$f_{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n)=\wedge(g_1(x_1),g_2(x_2),\ldots,g_{n-1}(x_{n-1}),g_n(x_n))$$

dà V se e solo se alle variabili $x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_{n-1},x_n$ vengono attribuiti i valori di verità $a_1,a_2,\ldots,a_i,\ldots, a_{n-1},a_n$ rispettivamente. Si consideri la funzione n-aria ottenuta applicando la funzione di simbolo $\vee$ di arietà opportuna alle funzioni n-arie $f_{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n}$ di indici tali che $f(a_1,a_2,...,a_i,...,a_{n-1},a_n)=V$. La funzione così ottenuta è uguale alla funzione f poiché a ciascuna n-upla di valori di verità le due funzioni associano lo stesso valore di verità.

A causa si questi risultati si decide di inserire nel linguaggio artificiale $\mathfrak{L}$, che si sta costruendo, solo i simboli $\neg$ ed $\wedge$, che, come detto, saranno chiamati connettivi.

Si noti che, al contrario dei predicati e dei simboli per funzioni e per costanti il cui numero e arietà cambia a secondo del tipo di struttura per cui il linguaggio è adatto, e la cui interpretazione cambia da struttura a struttura, i connettivi sono sempre gli stessi in ogni linguaggio e hanno sempre la stessa interpretazione in ogni struttura: pertanto saranno detti **costanti logiche**, mentre i primi simboli, che variano da linguaggio a linguaggio, saranno detti **simboli propri**.

Si sono introdotti i connettivi per poter combinare assieme delle formule in nuove formule, vediamo finalmente come fare ciò, dal punto di vista sintattico (prima si era solo espresso il desiderio di ottenere qualcosa, le formule, che avesse un certo comportamento).

Così si definirà cosa si intende per **formula**.

Anzitutto le formule atomiche saranno formule, e poi, se φ e ψ sono scritture (successioni finite di simboli) già riconosciute come formule, allora anche $\neg\varphi$ e $\wedge\varphi\psi$ sono formule. Questa è chiaramente una definizione ricorsiva (che viene lasciata aperta perché in seguito si vorranno aggiungere altre formule) e per la quale valgono osservazioni analoghe a quelle già presentate per la definizione di termine.

In altre trattazioni, queste formule vengono scritte, con notazione infissa, come $(\neg\varphi)$, $(\varphi\wedge\psi)$, ma allora ci vorrebbero le parentesi tra i simboli del linguaggio, cosa che non è necessaria, senza perdere in univocità di lettura, con la notazione prefissa precedente che si è adottata. Con questa seconda scrittura è più facile la lettura delle formule, anche se permangono opportune delle convenzioni sulla eliminazione delle parentesi, che altrimenti diventano troppo ingombranti. Inoltre spesso si usano anche le scritture

$$\vee\varphi\psi,\ \rightarrow\varphi\psi,\ \leftrightarrow\varphi\psi,$$

al posto delle scritture

$$\neg\wedge\neg\varphi\neg\psi,\ \neg\wedge\varphi\neg\psi,\ \wedge\neg\wedge\varphi\neg\psi\neg\wedge\psi\neg\varphi$$

rispettivamente, e le scritture $(\varphi\vee\psi)$, $(\varphi\rightarrow\psi)$, $(\varphi\leftrightarrow\psi)$ per indicare le prime. Sicché sarà adottato questo criterio: si useranno le scritture introdotte (con le usuali convenzioni sulle parentesi) come scritture nel metalinguaggio per indicare le corrispondenti scritture nel linguaggio $\mathfrak{L}$ (che così non avrà parentesi).

L'interpretazione di una formula può essere definita ancora ricorsivamente. L'interpretazione delle formule atomiche è già stata data. L'interpretazione delle formule del tipo $\neg\varphi$ è il vero se l'interpretazione della formula φ è il falso, il falso altrimenti. L'interpretazione delle formule del tipo $\varphi\wedge\psi$ è il vero se le interpretazioni di φ e ψ sono entrambe il vero, il falso altrimenti.

Usando la simbologia $(\ )^{\mathfrak{A}}$ per indicare l'operazione di interpretazione nella struttura $\mathfrak{A}$, è naturale convenire che, qualunque sia la struttura $\mathfrak{A}$, $(\neg)^{\mathfrak{A}} = f_3'$ e $(\wedge)^{\mathfrak{A}} = f_8$. Così le clausole precedenti possono essere riscritte nel modo seguente:

$$(\neg\varphi)^{\mathfrak{A}}=(\neg)^{\mathfrak{A}}((\varphi)^{\mathfrak{A}})=f_3'((\varphi)^{\mathfrak{A}});$$
$$(\varphi\wedge\psi)^{\mathfrak{A}}=(\wedge)^{\mathfrak{A}}((\varphi)^{\mathfrak{A}},(\psi)^{\mathfrak{A}})=f_8((\varphi)^{\mathfrak{A}},(\psi)^{\mathfrak{A}});$$

L'interpretazione delle altre scritture che abbiamo deciso essere abbreviazioni si ottiene interpretando la formula non abbreviata indicata da ciascuna di tali scritture, cioè interpretando la corrispondente formula di $\mathfrak{L}$.

Si osservi ancora che le definizioni dei connettivi del linguaggio artificiale in costruzione $\mathfrak{L}$ sono state possibili grazie alla conoscenza dei connettivi in italiano, che è il metalinguaggio che stiamo usando per descrivere il linguaggio. Ad esempio per individuare la funzione f_8, che è l'interpretazione di $\wedge$, si deve dire che è la funzione che se applicata alla coppia (V,V) allora dà V e se applicata alle coppie ordinate di valori di verità che non sono (V,V) allora dà il falso: si sono sottolineate le due occorrenze del connettivo se...allora l'occorrenza del connettivo non e l'occorrenza del connettivo e nel metalinguaggio per definire la funzione f_8; se il significato di tali connettivi non fosse già noto pretesa di fondazione del significato dei connettivi a partire dalle tavole viste precedentemente (che vengono chiamate tavole di verità).

Ciò non vuol dire che le tavole di verità non possano essere utili, magari per aiutare la comprensione del linguaggio naturale. Infatti esse colgono il comportamento dei connettivi anche in certe accezioni usate nel linguaggio naturale, e così possono permettere un facile controllo anche di espressioni complesse del linguaggio naturale, magari per poterle riformulare in forma equivalente.

Le tavole di verità non sono che un facile modo per descrivere delle funzioni totali sui valori di verità. Così, anche se non sono intese per definire i significati dei connettivi della lingua naturale, sono essenziali per definire il significato dei connettivi del linguaggio formale.

Ci si potrebbe domandare perché ci si limita a funzioni totali. Si ricordi che si sta costruendo un linguaggio per descrivere situazioni, e le descrizioni o descrivono le cose come sono o non lo fanno. Così, se non si usassero solo funzioni totali, si sarebbe in difficoltà già nel definire la costruzione sintattica delle formule perché non dovrebbe essere corretto permettere il formarsi di formule nei casi in cui il connettivo non trova interpretazione, altrimenti la costruzione sintattica di una formula composta dovrebbe dipendere dal significato delle componenti, impedendo di separare il ruolo della sintassi da quello della semantica.

7. LE VARIABILI.

Di proposito finora non si è parlato di variabili perché si sono volute separare le difficoltà e presentare la prima parte in modo che già avesse una sua significatività e comprensibilità autonome.

Tante volte, anche nel linguaggio ordinario, ci si riferisce ad un individuo non ben precisato, vuoi perché è ben noto e non è il caso di ricitarlo continuamente, vuoi perché non interessa individuarlo più che tanto, vuoi perché non si è in grado di precisarlo, magari pur conoscendone l'esistenza. Il nome di un oggetto non precisato viene detto **variabile**. E' opportuno introdurre le variabili anche nel linguaggio artificiale che si sta costruendo. Poiché può succedere di voler indicare in modo non preciso più di un individuo, ci vorranno più variabili, addirittura un numero illimitato, non volendo porre alcun limite aprioristico al numero di variabili che si possono voler usare, anche se in una formula se ne useranno sempre solo un numero finito.

Che il numero delle variabili da usare in una espressione (espressione è una qualsiasi scrittura del linguaggio che viene o verrà riconosciuta sintatticamente corretta, ad esempio, un termine, una formula, eccetera) sia un numero finito dipende da una caratteristica del linguaggio che è molto importante e che si vuol mantenere: si vuol sempre sapere cosa sono le espressioni, si vuol poter riconoscere quando una certa scrittura è una espressione del linguaggio formale, quindi bisogna poterla leggere per intero e non restare nel mezzo della lettura senza sapere quando la lettura sarà completata. Così una espressione deve essere una scrittura finita, non solo finita, ma anche riconoscibile come espressione, cioè ci deve essere un criterio effettivo per dire che una certa scrittura è o meno una espressione del linguaggio formale. Questo è un requisito irrinunciabile. Ci potranno essere formule con molti simboli, con più simboli di un prefissato numero naturale, il numero dei simboli di una qualsiasi formula non è limitato a priori (come potrebbe essere nel linguaggio di un computer che ha una memoria con un limite ben fissato, anche se molto grande). Così il dotarsi di un numero numerabile di variabili risponde alle esigenze del linguaggio che si vuol costruire.

Quindi si decide di inserire nel linguaggio $\mathfrak{L}$ in costruzione una infinità numerabile di simboli, v_0, v_1, ... , v_n, ... , con n numero naturale, come **variabili**.

Volendo essere nomi di individui, le variabili vanno annoverate tra i termini. Più precisamente si modifica la definizione ricorsiva di termine aggiungendo alla base della definizione la clausola che le variabili sono termini. Non si modificherà ulteriormente la definizione ricorsiva di termine, per cui si può aggiungere anche la clausola che nient'altro è un termine.

A questo punto pare opportuno ridare esplicitamente l'intera **definizione di termine**.

Una successione finita di simboli di un linguaggio formale $\mathfrak{L}$ è un termine se:
- o è costituita da un singolo simbolo che è una variabile,
- o è costituita da un singolo simbolo che è un simbolo di costante,
- o è della forma $ft_1...t_n$ dove f è un simbolo di funzione n-ario e $t_1,...,t_n$ sono successioni finite di simboli del linguaggio già riconosciute come termini;
- nient'altro è un termine.

Si noti che nelle scritture usate la giustapposizione di scritture che stanno per successioni di simboli indica la giustapposizione delle successioni indicate.

Se dopo l'introduzione delle variabili si è sistemata facilmente la definizione sintattica di termine, più delicato è il problema di interpretare i termini nella nuova accezione: la struttura non precisa, e non deve precisare, come interpretare le variabili. Si deve introdurre nella descrizione dei rapporti tra struttura e linguaggio, cioè nel metalinguaggio, una funzione che dica come interpretare ciascuna variabile, cioè quale elemento di un certo universo associare a ciascuna variabile. Questa funzione è ovviamente legata in parte alla struttura in quanto il suo codominio è contenuto nell'universo della struttura, ma il legame tra variabili e struttura non dovrà estendersi più di tanto perché si vuole mantenere la possibilità di cambiare l'interpretazione delle variabili pur mantenendo fissa l'interpretazione degli altri simboli già precisata in una certa struttura.

Si suppone, quindi, di disporre di una funzione che ad ogni variabile assegni un elemento dell'universo di una certa struttura. Chiameremo **attribuzione di valori alle variabili** una tale funzione. Data così una struttura, la si indichi con $\mathfrak{A}$, e una attribuzione di valori alle variabili, la si indichi con $\underline{a}$, si ottiene la coppia ordinata $(\mathfrak{A},\underline{a})$ che sarà chiamata **realizzazione** e indicata con σ, $\sigma= (\mathfrak{A},\underline{a})$, e questa sarà l'ambiente corretto per interpretare termini con variabili. L'interpretazione in una realizzazione σ di un termine è definita per induzione integrando la precedente definizione con la clausola che se il termine è una variabile allora la sua interpretazione è il valore che la funzione attribuzione di valori alle variabili $\underline{a}$ assegna a quella variabile.

In analogia con la precedente notazione $(\ )^{\mathfrak{A}}$, si può ora introdurre la notazione $(\ )^{\sigma}$, cioè $(\ )^{(\mathfrak{A},\underline{a})}$, per indicare le interpretazioni nella realizzazione $\sigma=(\mathfrak{A},\underline{a})$. Così si può ridare esplicitamente l'intera **definizione di interpretazione di un termine in una realizzazione**.

Date una struttura $\mathfrak{A}$ e una attribuzione di valori alle variabili $\underline{a}$, cioè data una realizzazione $\sigma=(\mathfrak{A},\underline{a})$, l'interpretazione di un termine t in tale realizzazione è data per induzione sulla costruzione del termine come segue:
- se il termine t è la variabile v_i allora la sua interpretazione $(t)^{\sigma}= (v_i)^{\sigma}$ nella realizzazione σ è $\underline{a}(v_i)$, che è un elemento dell'universo della struttura;
- se il termine t è un simbolo per costante, diciamo c, la sua interpretazione $(t)^{\sigma}=(c)^{\sigma}$, è la costante $\underline{c}$ (che è $(c)^{\mathfrak{A}}$) a cui quel simbolo è associato nella struttura $\mathfrak{A}$, cioè $(c)^{\sigma}$ è $\underline{c}$ (è $(c)^{\mathfrak{A}}$), che è ancora un elemento dell'universo;
- se il termine t è del tipo $ft_1...t_n$, con f simbolo di funzione n-aria e $t_1,...,t_n$ termini, la sua interpretazione $(t)^{\sigma}= (ft_1...t_n)^{\sigma}$ nella realizzazione σ è quell'elemento a dell'universo che è immagine attraverso la funzione F, che è l'interpretazione in $\mathfrak{A}$ del simbolo f, dell'n-upla $(a_1,...,a_n)$ di elementi dell'universo che sono le interpretazioni in σ dei termini $t_1,...,t_n$, cioè è $(f)^{\sigma}((t_1)^{\sigma}, ..,(t_n)^{\sigma}) = (f)^{\mathfrak{A}}((t_1)^{\sigma}, ..,(t_n)^{\sigma}) = F(a_1,..., a_n)$, che è un elemento dell'universo.

E' evidente la forte analogia tra variabili e simboli per costanti, entrambi sono termini ed entrambi si interpretano in elementi dell'universo. Ma vale la pena sottolineare anche la differenza tra di loro. Mentre l'interpretazione di un simbolo per costante viene data nel precisare una struttura associata al linguaggio, ciò non avviene per una variabile, la cui interpretazione è precisata in un secondo momento, riservandosi così la possibilità di cambiare l'interpretazione della variabile senza cambiare l'interpretazione dei simboli che non sono variabili nel passare da una realizzazione ad un'altra, pur mantenendo, in entrambe le realizzazioni, la stessa struttura associata al linguaggio, e cambiando solo l'attribuzione di valori alle variabili. In qualche modo, le variabili sono simboli per elementi dell'universo per i quali ci si riserva di dare l'interpretazione in un secondo momento, potendola variare senza dover variare la struttura in cui si interpreta il resto.

E' evidente che, fissata una struttura $\mathfrak{A}$, l'elemento dell'universo interpretazione di un termine dipende solo dai valori che la funzione $\underline{a}$ assegna alle variabili che occorrono nel termine (queste saranno sicuramente in numero finito perché un termine è una successione finita di simboli); detto altrimenti, data una struttura $\mathfrak{A}$ e due attribuzioni di valori alle variabili $\underline{a}$ e $\underline{a'}$ che coincidano sulle variabili che occorrono in un termine t, entrambe le realizzazioni σ, dipendente da $\mathfrak{A}$ e da $\underline{a}$, e σ', dipendente da $\mathfrak{A}$ e da $\underline{a'}$, interpretano t nello stesso elemento dell'universo di $\mathfrak{A}$. La dimostrazione di quanto appena affermato si può agevolmente svolgere per induzione sulla costruzione dei termini ed è lasciata al lettore come utile esercizio.

L'ultima osservazione porta a considerare l'interpretazione di un termine in una struttura non solo come elemento dell'universo precisato dall'attribuzione di valori alle variabili, ma anche come una funzione dall'interpretazione delle variabili che occorrono in esso nell'universo, prescindendo così dalle attribuzioni di valori alle variabili. Detto altrimenti, si può ancora pensare all'interpretazione in una struttura $\mathfrak{A}$ di un termine in cui occorrano variabili, ma questa non è più un elemento dell'universo della struttura, bensì una funzione, determinata dal termine, che fa corrispondere un elemento dell'universo alla successione ordinata degli elementi dell'universo assegnati alle variabili che occorrono nel termine.

Supponendo che le variabili che occorrono in un termine t siano tra le prime k, si può dare un nuovo significato alla notazione $(t)^{\mathfrak{A}}$ e precisamente $(t)^{\mathfrak{A}}$ indica la funzione che ad una k-upla ordinata $(a_0,...,a_{k-1})$ di elementi dell'universo assegna l'elemento dell'universo a tale che $a=(t)^{(\mathfrak{A},\underline{a})}$, dove $\underline{a}$ è una attribuzione di valori alle variabili che assegna alle prime k variabili rispettivamente proprio i valori $a_0,...,a_{k-1}$. Per indicare detto elemento a dell'universo si userà anche la notazione $(t)^{\mathfrak{A}}[a_0,...,a_{k-1}]$.

L'ampliamento introdotto a proposito di termini con l'introduzione delle variabili coinvolge anche le formule. Pur rimanendo formalmente inalterate le definizioni sintattiche di formula atomica e di formula, variano le successioni finite di simboli accettate dalle due definizioni per la possibilità di includere termini secondo la definizione ampliata di questi.

Per l'interpretazione delle formule si ripropone la stessa problematica vista con i termini. Da una parte si può continuare a pretendere che le formule debbano essere o vere o false, ma per dire questo bisogna precisare non solo l'interpretazione in una struttura dei simboli che non sono variabili, ma anche, indipendentemente, l'interpretazione delle variabili: solo se si saranno precisati entrambi questi elementi si potrà dire se una formula è vera o falsa. In questo contesto, continueremo ad usare la notazione $(\ )^{\sigma}$ per indicare un'interpretazione in una realizzazione σ.

Ancora il valore di verità dell'interpretazione di una formula in una certa struttura con una certa attribuzione di valori alle variabili dipende solo dai valori assegnati alle variabili che occorrono nella formula, cioè se si considerano una struttura $\mathfrak{A}$ e due attribuzioni di valori alle variabili $\underline{a}$ e $\underline{a'}$ che coincidano sulle variabili occorrenti in una certa formula, entrambe le realizzazioni σ, dipendente da $\mathfrak{A}$ e da $\underline{a}$, e σ', dipendente da $\mathfrak{A}$ e da $\underline{a'}$, interpretano la formula nello stesso valore di verità.

Si noti che la struttura $\mathfrak{A}$ con l'attribuzione di valori alle variabili $\underline{a}$ da luogo ad una interpretazione $(\ )^{\sigma}$ in una realizzazione σ diversa dall'interpretazione, chiamiamola $(\ )^{\sigma'}$, nella realizzazione σ' che si ottiene dalla stessa struttura $\mathfrak{A}$ ma abbinata alla attribuzione di valori alle variabili $\underline{a'}$. Comunque, come appena detto, le due valutazioni indicate sono abbastanza simili da interpretare in ugual modo le formule le cui variabili sono interpretate ugualmente da $(\ )^{\sigma}$ e da $(\ )^{\sigma'}$, o, equivalentemente, da $\underline{a}$ e da $\underline{a'}$.

Altro atteggiamento è quello di non considerare più una formula φ come vera o falsa in una interpretazione in una certa realizzazione, ma vera, relativamente ad una certa struttura $\mathfrak{A}$, in funzione dell'attribuzione di valori alle prime k variabili se queste includono quelle occorrenti nella formula. Quindi il significato che si attribuisce ad una formula φ, relativamente ad una certa struttura $\mathfrak{A}$, è una funzione h_{φ} dalle k-uple ordinate di elementi di A (dove A è l'universo di $\mathfrak{A}$) delle interpretazioni delle prime k variabili (che contengono quelle occorrenti nella formula φ) nei valori di verità, h_φ: $A^k \rightarrow \{V,F\}$. Più precisamente $h_\varphi(a_0, \ldots , a_{k-1})=V$ se φ è vera quando è interpretata nella realizzazione σ dipendente dalla struttura $\mathfrak{A}$ e da una attribuzione di valori alle variabili $\underline{a}$ che assegni alle prime k variabili proprio i valori $a_0, \ldots , a_{k-1}$; mentre $h_\varphi(a_0, \ldots , a_{k-1})=F$ altrimenti. Anche ora, per indicare la funzione h_φ, si potrà usare la notazione $(\varphi)^{\mathfrak{A}}$, e per indicare il valore di verità che questa funzione fa corrispondere alla k-upla ordinata $(a_0, \ldots , a_{k-1})$ si potrà scrivere $(\varphi)^{\mathfrak{A}}[a_0, \ldots , a_{k-1}]$.

8. LA QUANTIFICAZIONE.

A volte si è interessati a sapere se l'interpretazione di una formula in una realizzazione è sempre la stessa al variare dell'interpretazione di una variabile, o se, invece di essere sempre la stessa, ha un qualche altro ben precisato comportamento, ancora al variare dell'interpretazione di una variabile. Nel linguaggio comune tale esigenza viene manifestata da affermazioni del tipo: per ogni individuo è vera una certa affermazione che coinvolge quell'individuo, ad esempio ogni numero naturale è maggiore od uguale a zero.

Vogliamo dare anche al linguaggio che stiamo costruendo la possibilità di esprimere affermazioni del tipo visto.

Così sia φ una formula in cui compaiano al più le variabili $v_0,v_1,\ldots,v_{k-1}$, indichiamola con $\varphi(v_0,v_1,\ldots,v_{k-1})$. La formula $\varphi(v_0,v_1,\ldots,v_{k-1})$ può essere vera o falsa, quando è interpretata in una realizzazione basata su di una struttura $\mathfrak{A}$, a seconda dell'attribuzione di valori data alle variabili $v_0,v_1,\ldots,v_{k-1}$. Con la notazione prima introdotta si può dire che il significato della formula $\varphi(v_0,v_1,\ldots,v_{k-1})$ relativamente ad una struttura $\mathfrak{A}$, è la funzione k-aria $h_\varphi=(\varphi)^{\mathfrak{A}}=\{(a_0,a_1,\ldots,a_{k-1},V): (\varphi)^{\mathfrak{A}}[a_0,\ldots,a_{k-1}]=V\}\cup\{(a_0,a_1,\ldots,a_{k-1},F): (\varphi)^{\mathfrak{A}}[a_0, \ldots,a_{k-1}]=F\}$

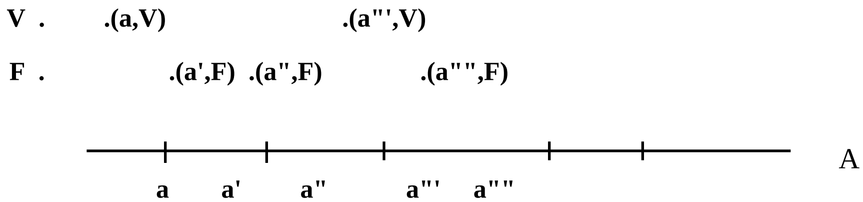
Si può essere interessati a vedere il comportamento di questa funzione h_φ al variare dell'attribuzione di valore alla variabile v_i, tenendo fissa l'attribuzione di valori delle altre variabili. Così si può definire una funzione unaria $h_{\varphi a_0,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_{k-1}}$ mediante la seguente uguaglianza $h_{\varphi a_0,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_{k-1}}(x) = h_\varphi(a_0,\ldots,a_{i-1},x,a_{i+1},\ldots, a_{k-1}) = (\varphi)^{\mathfrak{A}}[a_0,\ldots,a_{i-1},x,a_{i+1},\ldots,a_{k-1}]$, dove x indica un qualsiasi elemento dell'universo di $\mathfrak{A}$.

Si sta intravedendo una operazione che al significato di una formula φ, come funzione h_φ dalle attribuzioni di valore alle prime k variabili (che contengono quelle occorrenti nella formula) nei valori di verità, fa corrispondere una nuova formula il cui significato è ancora una funzione dall'interpretazione delle sue variabili nei valori di verità, ma questa volta dipende non dall'interpretazione di tutte le variabili, ma dall'interpretazione delle variabili eccetto una. Più precisamente, tale operazione fa ottenere una nuova formula il cui valore di verità non dipende più dall'interpretazione di una delle variabili, diciamo della variabile v_i, ma, fissata ad arbitrio l'interpretazione delle altre variabili, è il vero se la dipendenza del valore della formula iniziale dall'interpretazione della variabile scelta per non essere fissata è di un certo tipo (o di certi tipi), il falso altrimenti.

Detto altrimenti, data una formula φ il cui valore di verità dipenda dalla interpretazione di certe variabili $v_0,\ldots,v_{n-1}$, si consideri una di queste variabili, v_i, e la funzione $h_{\varphi a_0,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_{n-1}}$ che fa dipendere il valore di verità della formula φ dall'interpretazione della variabile v_i, fissata l'interpretazione delle altre $v_0,\ldots,v_{i-1},v_{i+1}, \ldots,v_{n-1}$ in $a_0,\ldots,a_{i-1}, a_{i+1},\ldots,a_{n-1}$, si vuole ottenere una nuova formula il cui valore di verità, sempre fissata l'interpretazione delle variabili $v_0,\ldots, v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_{n-1}$ in $a_0,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_{n-1}$, colga il comportamento globale della funzione $h_{\varphi a_0,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_{n-1}}$, cioè sia il vero se la funzione $h_{\varphi a_0,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_{n-1}}$ presenta un comportamento voluto, il falso altrimenti.

Forse un grafico può aiutare a cogliere quanto si è detto. Nel seguente disegno la retta orizzontale rappresenta l'universo delle struttura, e su tale retta sono indicati alcuni suoi elementi che rappresentano alcuni elementi dell'universo A della struttura. L'interpretazione della formula φ nella realizzazione la cui struttura è $\mathfrak{A}$ e l'attribuzione di valori alle variabili assegna alle variabili $v_0,\ldots, v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_{n-1}$ gli elementi $a_0,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots, a_{n-1}$ rispettivamente e alla variabile v_i un arbitraio valore x dell'universo A è $(\varphi)^{\mathfrak{A}}[a_0,\ldots, a_{i-1},x,a_{i+1},\ldots,a_{k-1}]$, che è o V o F. Nel grafico si è supposto che queste interpretazioni siano

V quando l'elemento arbitrario dell'universo indicato da x è o a o a''', e che siano F quando l'elemento arbitrario dell'universo indicato da x è o a' o a'' o a'''': ciò è rappresentato dai punti indicati nel grafico con le rispettive coordinate.



Nel caso ipotizzato nel grafico si può notare ad esempio un certo comportamento globale della funzione $h_{\varphi a_0,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots,a_{n-1}}$: non è costante, a volte assume il valore V, a volte assume il valore F. Ma i comportamenti globali di una tale funzione possono essere anche tanti altri. Eccone alcuni ad esempio: il valore V è assunto tante volte quanto il valore F; il valore V è assunto 50 volte; il valore F è assunto infinite volte. Si noti come in tutti questi esempi si colga sempre una caratteristica globale della funzione $h_{\varphi a_0,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots,a_{n-1}}$, e non il valore che essa fa corrispondere ad un singolo elemento dell'universo

Questa operazione che fa cogliere il tipo di dipendenza globale del valore di verità di una formula dalle interpretazioni di una certa sua variabile, ossia dal comportamento della funzione $h_{\varphi a_0,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots,a_{n-1}}$ nella sua globalità, viene chiamata **quantificazione** Così la quantificazione "lega", in un certo modo, una variabile che non dovrà più essere considerata nel computo delle variabili da cui dipende l'interpretazione della nuova formula, interpretazione ancora intesa come funzione dalle interpretazione delle altre variabili nei valori di verità, sempre relativamente ad una certa fissata struttura.

Le varie operazioni di quantificazione corrispondono ai vari tipi di comportamento della funzione $h_{\varphi a_0,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots,a_{n-1}}$, e sono infinite se l'universo della struttura è infinito.

Ancora ci si potrebbe domandare, come si è fatto per le funzioni da n-uple di valori di verità nei valori di verità, se ci sono alcuni tipi di comportamento che, se opportunamente applicati più volte e in combinazione, eventualmente anche con i connettivi, hanno lo stesso effetto di un particolare tipo di comportamento comunque prefissato. Questa volta, però, non si ha un tale risultato, e, d'altra parte, non si possono considerare tutti questi infiniti tipi di comportamento. Si sceglie allora di privilegiare uno di questi tipi di comportamento particolarmente semplice, e precisamente il caso in cui la funzione $h_{\varphi a_0,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots,a_{n-1}}$ sopra ricordata è la funzione costante vero. Si sceglie così una operazione di quantificazione, chiamata quantificazione universale che, fissata l'interpretazione di tutte le variabili diverse da v_i, dà alla formula che dovrà rappresentare questo aspetto della struttura (cioè il comportamento globale della $h_{\varphi a_0,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots,a_{n-1}}$), e che, come sarà detto più dettagliatamente in seguito, sarà indicata con $\forall v_i \varphi(v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$ il valore vero se la formula $\varphi(v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$ è vera comunque si interpreti la variabile v_i e mantenendo fissa l'interpretazione degli altri simboli, naturalmente il tutto relativamente ad una fissata struttura.

Da un punto di vista sintattico, si vuole ampliare il concetto di formula consentendo cittadinanza anche a nuove formule che rispondano all'esigenza di poter quantificare. Allo scopo si introdurrà tra i simboli del linguaggio in costruzione il seguente: $\forall$, da chiamarsi **quantificatore universale**. A questo punto è abbastanza naturale ampliare la definizione ricorsiva di formula con la seguente clausola: se φ è una formula e v_i una variabile allora anche la successione finita di simboli $\forall v_i \varphi$ è una formula. Poiché non si estenderà ulteriormente la nozione di formula, almeno in questa presentazione, si può aggiungere alla definizione ricorsiva di formula, che abbiamo appena ampliata, un'ultima clausola affermante che qualsiasi cosa che sia diversa dalle successioni finite di simboli che possono essere riconosciute come formule in base alle condizioni già precisate non è una formula.

9. FORMULE E LORO INTERPRETAZIONE.

A questo punto pare opportuno ridare esplicitamente l'intera **definizione di formula**, Una successione finita di simboli di un linguaggio formale $\mathfrak{L}$ è una formula se;
- o è una formula atomica, cioè un predicato di arietà n seguito da n termini,
- o è del tipo $\neg\varphi$ o $\wedge\varphi\psi$ dove φ e ψ sono successioni finite di simboli del linguaggio già riconosciute come formule,
- oppure è del tipo $\forall v_i\varphi$ dove v_i è una variabile e φ è una successione finita di simboli del linguaggio già riconosciuta come formula;
- nient'altro è una formula.

Si ripropone, anche in presenza di quantificatori, il problema di determinare l'interpretazione di una formula in una realizzazione, cioè in una struttura con una certa attribuzione di valori alle variabili.

Si dispone già di $(\ )^\sigma$, un'interpretazione in una realizzazione, e questa non dipende soltanto dalla struttura $\mathfrak{A}$, ma anche dall'attribuzione di valori alle variabili $\underline{a}$. Ci sarà bisogno di attribuzioni di valori alle variabili che differiscano da $\underline{a}$ solo per il fatto che attribuiscono ad una certa variabile v_i un fissato valore b indipendentemente dal valore che $\underline{a}$ attribuisce a v_i. Si usa la notazione $\underline{a}(v_i/b)$ per indicare una attribuzione di valori alle variabili $\underline{a}'$ coincidente con l'attribuzione $\underline{a}$ su tutte le variabili diverse da v_i e che attribuisce alla variabile v_i il valore b, cioè $\underline{a}'(v_j)=\underline{a}(v_i/b)(v_j)=\underline{a}(v_j)$ se $j \neq i$, mentre $\underline{a}'(v_i)=\underline{a}(v_i/b)(v_i)=b$. Si introduce la possibilità di variare di poco l'interpretazione nella realizzazione σ, e si indica con $(\ )^{\sigma(v_i/b)}$, dove v_i è una variabile, la nuova interpretazione nella realizzazione costruita a partire dalla struttura $\mathfrak{A}$ e dall'attribuzione $\underline{a}(v_i/b)$. Essa differisce dalla precedente per il solo fatto che ci si riserva di interpretare la variabile v_i nell'elemento b dell'universo (indipendentemente da come $(\ )^\sigma$ interpreta la variabile v_i), e per quanto consegue da ciò.

Ora si dice che la formula $\forall v_i\varphi$ è vera nell'interpretazione $(\ )^\sigma$ se per ogni elemento b nell'universo della realizzazione σ è vera la formula φ nell'interpretazione $(\ )^{\sigma(v_i/b)}$. Detto altrimenti, $(\forall v_i\varphi)^\sigma=V$ se per ogni b nell'universo di $\mathfrak{A}$ risulta che $(\varphi)^{\sigma(v_i/b)}=V$. Quindi per valutare una formula quantificata in una certa interpretazione bisogna far ricorso a molte altre interpretazioni che differiscono da quella che interessa solo per la diversa valutazione della variabile che segue il segno di quantificazione.

A questo punto pare opportuno ridare esplicitamente l'intera **definizione di interpretazione di una formula**.

L'interpretazione di una formula può essere solo V o F. Date una struttura $\mathfrak{A}$ e una attribuzione di valori alle variabili $\underline{a}$, l'interpretazione di una formula φ è data per induzione sulla costruzione della formula come segue:
- se φ è una formula atomica, cioè del tipo $Pt_1...t_n$, allora $(Pt_1...t_n)^\sigma$ è V se e solo se l'n-upla delle interpretazioni dei termini appartiene alla relazione che interpreta il predicato, $((t_1)^\sigma,...,(t_n)^\sigma) \in (P)^\sigma$;
- se φ è una formula del tipo $\neg\psi$ allora $(\neg\psi)^\sigma=(\neg)^\sigma((\psi)^\sigma)$, cioè $(\neg\psi)^\sigma=V$ se $(\psi)^\sigma=F$, altrimenti $(\neg\psi)^\sigma=F$;
- se φ è una formula del tipo $\wedge\varphi_1\varphi_2$ allora $(\wedge\varphi_1\varphi_2)^\sigma=(\wedge)^\sigma((\varphi_1)^\sigma,(\varphi_2)^\sigma)$, cioè $(\wedge\varphi_1\varphi_2)^\sigma= V$ se $(\varphi_1)^\sigma=V$ e $(\varphi_2)^\sigma=V$, altrimenti $(\wedge\varphi_1\varphi_2)^\sigma=F$;
- se φ è una formula del tipo $\forall v_i\psi$ allora $(\forall v_i\psi)^\sigma=V$ se e solo se per ogni b nell'universo di $\mathfrak{A}$ risulta che $(\psi)^{\sigma(v_i/b)}=V$.

Così è ben precisata la nozione di formula e quando una formula è vera in una struttura con una certa attribuzione di valori alle variabili, brevemente, in una certa realizzazione.

Ha un certo interesse considerare anche le formule del tipo $\neg\forall v_i\neg\varphi$, che più sinteticamente saranno indicate con la scrittura $\exists v_i\varphi$. Si osservi che $\exists v_i\varphi$ è vera nella realizzazione σ se esiste un elemento b dell'universo della realizzazione σ per cui la formula φ è vera quando è interpretata nella realizzazione $\sigma(v_i/b)$. Detto altrimenti $(\exists v_i\varphi)^\sigma=V$ se esiste un elemento b nell'universo di $\mathfrak{A}$ tale che $(\varphi)^{\sigma(v_i/b)}=V$. Infatti $\neg\forall v_i\neg\varphi$ è vera nell'interpretazione $(\ )^\sigma$ se $\forall v_i\neg\varphi$ è falsa nell'interpretazione $(\ )^\sigma$, cioè se non è vero che per ogni b nell'universo di $\mathfrak{A}$ risulta che $(\neg\varphi)^{\sigma(v_i/b)}$=V, ovvero se esiste un b nell'universo di $\mathfrak{A}$ tale che $(\neg\varphi)^{\sigma(v_i/b)}$=F, cioè, infine, se esiste un b nell'universo di $\mathfrak{A}$ tale che $(\varphi)^{\sigma(v_i/b)}$= V.

Si noti che la formula $\exists v_i\varphi$ interpretata nella realizzazione σ coglie un particolare comportamento globale della formula φ rispetto alle interpretazioni nelle realizzazioni σ(x/a) con a nell'universo della struttura, e precisamente quello in cui per almeno un certo elemento b dell'universo $(\varphi)^{\sigma(v_i/b)}$=V. Questo nuovo comportamento globale è una quantificazione, diversa dalla quantificazione universale, che viene chiamata quantificazione esistenziale, a cui non e' stato fatto corrispondere alcun simbolo nel linguaggio perché questa quantificazione si può ottenere da quella universale mediante operazioni per cui ci sono già dei simboli. Si sarebbero anche potute fare delle scelte diverse, ad esempio non introdurre il simbolo $\forall$ che rappresenta la quantificazione universale, ma il simbolo $\exists$ che rappresenta la quantificazione esistenziale, dal momento che, come si vede facilmente, anche la quantificazione universale può essere ottenuta da quella esistenziale mediante operazioni di negazione per la quale è già stato introdotto un simbolo: di fatto, in ogni realizzazione, la formula $\forall v_i\varphi$ si interpreta nello stesso modo della formula $\neg\exists v_i\neg\varphi$, come si può facilmente vedere ricordando quali quantificazioni indicano i simboli $\forall$ e $\exists$, oppure notando che $\neg\exists v_i\neg\varphi$ è una abbreviazione di $\neg\neg\forall v_i\neg\neg\varphi$, che banalmente si interpreta nello stesso modo di $\forall v_i\varphi$ in ogni realizzazione. Ma si sarebbero potuti introdurre entrambi i simboli $\forall$ ed $\exists$ dando nome ad entrambe le quantificazioni universale ed esistenziale, anche se queste sono tra loro legate, come si e' visto, e non permettono di descrivere ogni altra quantificazione. Per il momento si vuole insistere sul fatto che nel linguaggio introdotto c'e' il solo simbolo per quantificazione $\forall$, e ciò sarà utile quando, dovendo fare dimostrazioni con vari casi a secondo dei tipi discrittura delle formule, il lavoro sarà facilitato dall'aver il minor numero possibile di tipi di formule.

Prima di introdurre la quantificazione si era notato che il valore di verità di una formula in una struttura dipende dall'attribuzione di valori alle sole variabili che occorrono nella formula, cioè due diverse attribuzioni di valori alle variabili che però coincidano sulle variabili della formula fanno assumere a questa lo stesso valore di verità. Ora in una formula possono comparire occorrenze di variabili da cui non dovrà più dipendere l'interpretazione della formula stessa, come, ad esempio, le occorrenze della variabile v_i nella formula $\forall v_i\varphi$. Chiameremo vincolate queste occorrenze di variabili e libere le altre occorrenze. La distinzione tra le occorrenze delle variabili ora accennata fa' riferimento al significato ed ha, pertanto, un carattere semantico.

Ricorrendo alla definizione sintattica ricorsiva ampliata di formula si può dire, in modo puramente sintattico, quali occorrenze di variabili sono **libere** e quali **vincolate** in una formula: il successivo teorema mostrerà che la definizione sintattica di variabili libere e vincolate coglie esattamente la corrispondente distinzione semantica. Ecco la definizione sintattica di occorrenze libere o vincolate di una variabile in una formula, per ricorsione sulla costruzione della formula.

Ogni occorrenza di una variabile in una formula atomica è libera. Le occorrenze libere e vincolate di variabili nelle formule φ_1 e φ_2 restano tali anche nelle formule $\neg\varphi_1$ e $\wedge\varphi_1\varphi_2$. Le occorrenze della variabile v_i in una formula del tipo $\forall v_i\varphi$ sono tutte vincolate, mentre le occorrenze delle variabili diverse da v_i in una tale formula sono libere o vincolate a seconda che lo siano in φ. Si noti che questa distinzione tra occorrenze libere e vincolate di variabili è puramente sintattica in quanto dipende esclusivamente dalla scrittura della formula.

Ora che si è introdotta la quantificazione e si sono distinte le variabili in libere e vincolate, si può affinare il risultato sulla dipendenza del valore di verita' di una formula in una realizzazione dalle sole variabili che occorrono nella formula, dicendo che il valore di verità di una formula in una realizzazione dipende solo dall'attribuzione di valori alle variabili che occorrono libere nella formula. Di fatto dimostriamo il seguente

Teorema. Se $\underline{a}$ e $\underline{a}'$ sono due attribuzioni di valori alle variabili che coincidono su tutte le variabili che occorrono libere in una formula α, allora $(\alpha)^{\sigma}=(\alpha)^{\sigma'}$ dove σ e σ' sono rispettivamente le realizzazioni $(\mathfrak{A},\underline{a})$ e $(\mathfrak{A},\underline{a}')$.

DIMOSTRAZIONE. Argomentiamo per induzione sulla costruzione della formula α.

- Se α è atomica, del tipo $Pt_1...t_n$, tutte le occorrenze di variabili nella formula (e nei termini) sono libere. Per quanto già visto, per ogni i compreso tra 1 e n, $(t_i)^\sigma=(t_i)^{\sigma'}$, dal momento che le variabili occorrenti in t_i occorrono libere in α e quindi sono interpretate in ugual modo dalle due interpretazioni $()^\sigma$ e $()^{\sigma'}$. Poiché $(P)^\sigma$ è $(P)^{\sigma'}$, segue che $(Pt_1.. .t_n)^\sigma = (P)^\sigma(t_1{}^\sigma,...,t_n{}^\sigma) = (P)^{\sigma'}(t_1{}^{\sigma'},...,t_n{}^{\sigma'}) = (Pt_1...t_n)^{\sigma'}$.
- Se α è del tipo $\neg\beta$, allora, sfruttando l'ipotesi induttiva e il fatto che le occorrenze libere di variabili in α sono esattamente le occorrenze libere di variabili in β, si ha che $(\alpha)^\sigma = (\neg\beta)^\sigma = (\neg)^\sigma((\beta)^\sigma) = (\neg)^{\sigma'}((\beta)^{\sigma'}) = (\neg\beta)^{\sigma'}= (\alpha)^{\sigma'}$.
- Se α è del tipo $\wedge\beta\gamma$, allora, sfruttando l'ipotesi induttiva e il fatto che le occorrenze libere di variabili in α sono esattamente le occorrenze libere di variabili in β o in γ, $(\alpha)^\sigma = (\wedge\beta\gamma)^\sigma = (\wedge)^\sigma((\beta)^\sigma,(\gamma)^\sigma) = (\wedge)^{\sigma'}((\beta)^{\sigma'},(\gamma)^{\sigma'}) = (\wedge\beta\gamma)^{\sigma'}= (\alpha)^{\sigma'}$.
- Se α è del tipo $\forall x\beta$, allora $(\alpha)^\sigma = V$ se e solo se per ogni elemento $a\in A$ si ha $(\beta)^{\sigma(x/a)} = V$. Ma, per ipotesi induttiva, per ogni $a\in A$, $(\beta)^{\sigma(x/a)}=(\beta)^{\sigma'(x/a)}$, dal momento che le due interpretazioni $()^{\sigma(x/a)}$ e $()^{\sigma'(x/a)}$ coincidono su x e anche su tutte le variabili diverse da x che occorrono libere in β (poiché queste occorrono libere anche in α). Ciò significa che $(\alpha)^{\sigma'} = V$ se e solo se $(\alpha)^\sigma = V$.

ESERCIZIO. Di fatto il teorema appena dimostrato può essere ulteriormente rinforzato osservando che il valore di verità di una formula α non dipende neppure da tutti i simboli propri che non occorrono nella formula. Per far vedere ciò si deve dimostrare che, se $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ sono strutture con lo stesso universo e che interpretano ugualmente i simboli propri che occorrono in α, e $\underline{a}$ e $\underline{a'}$ sono due attribuzioni di valori alle variabili che coincidono su tutte le variabili che occorrono libere in α, e $\sigma = (\mathfrak{A},\underline{a})$ e $\sigma' = (\mathfrak{B},\underline{a'})$, allora $(\alpha)^\sigma=(\alpha)^{\sigma'}$. Questa dimostrazione si svolge in modo del tutto analogo a quanto fatto finora ripartendo dall'inizio e considerando le dovute modifiche.

Si osservi che una quantificazione, dal momento che vincola una variabile, ha anche l'effetto di ridurre di uno il numero delle variabili da cui dipende il valore di verità di una formula.

Il Teorema dimostrato permette di introdurre la nuova notazione $\mathfrak{A}|=\varphi[a_o,...,a_{n-1}]$ per indicare che una formula φ, le cui variabili libere sono tutte tra $v_o,...,v_{n-1}$, è vera se interpretata in una realizzazione dipendente da una struttura $\mathfrak{A}$ e da una attribuzione alle variabili che assegni alle variabili $v_o,...,v_{n-1}$ gli elementi $a_o,..., a_{n-1}$ dell'universo di $\mathfrak{A}$. Se poi nella formula non occorrono variabili libere, in tal caso la formula viene detta **enunciato**, allora essa è o vera o falsa in una struttura indipendentemente dall'attribuzione di valori alle variabili, e nella nuova notazione si scriverà $\mathfrak{A}|=\varphi$. Possiamo dire che un enunciato descrive ciò che avviene in una struttura in cui è vero.

Attenzione, si è definita l'interpretazione del simbolo $\forall$ e della formula $\forall v_i\varphi$ del linguaggio formale, ma per fare ciò bisogna già conoscere il significato di "per ogni" in italiano: in quanto fatto non si è detto finalmente cosa vuol dire "per ogni", ma si è detto cosa vuol dire $\forall$ nel linguaggio formale se si sa già cosa vuol dire "per ogni" in italiano, e, se non si sa questo, non si è detto niente. Se si fosse preteso di spiegare mediante la logica, meglio mediante un linguaggio formale, cosa vuol dire "per ogni" si sarebbero fatte delle affermazioni senza senso, perché il significato della locuzione "per ogni" non si spiega con la logica, ma si impara con l'uso della lingua materna fin dall'infanzia. Ma ora non interessa il processo di apprendimento della lingua materna.

Quella data è una definizione nel metalinguaggio del significato del simbolo $\forall$ del linguaggio formale. Si deve supporre di sapere cosa vuol dire "per ogni" nel metalinguaggio. Non è detto che lo si sappia effettivamente in modo completo, ma si suppone di saperlo. Solo allora, mediante la definizione precedente nel metalinguaggio, si è detto cosa si intende per significato del simbolo $\forall$ del linguaggio.

Ciò che può provocare confusione è l'uso dello stesso nome sia per la frase "per ogni" che per il simbolo $\forall$; forse le cose sarebbero più facili se chiamassi "sgorbio" il simbolo $\forall$. In tal caso direi che la formula da leggersi "sgorbio $v_i\varphi$" è vera nei casi precisati dalla precedente definizione. $\forall$ (sgorbio) è una cosa totalmente differente da "per ogni"; $\forall$ è un simbolo del linguaggio oggetto che ha un suo comportamento sintattico, permette di costruire delle formule nel modo detto prima, ed ha anche un suo comportamento semantico, un suo significato, che è esattamente quello detto prima.

Con la notazione introdotta si può affrontare il problema avviato di dare una interpretazione di una formula non solo in una realizzazione, ma anche in una struttura, di dare cioè un significato alla notazione $\varphi^{\mathfrak{A}}$ dove φ è una formula e $\mathfrak{A}$ una struttura. Come per l'interpretazione dei termini, il significato da dare a $\varphi^{\mathfrak{A}}$ è quello di una funzione, che sarà indicata da f_φ , questa volta dalle attribuzioni di valori alle prime, diciamo n, variabili, che includono quelle che possono occorrere libere nella formula, nei valori di verità, e precisamente $f_\varphi(a_o,..., a_{n-1})=V$ se $\mathfrak{A}|=\varphi[a_o,...,a_{n-1}]$, altrimenti $f_\varphi(a_o,..., a_{n-1})=F$.

10. STENOGRAFIA E LINGUAGGIO FORMALE.

In matematica si fa spesso un uso stenografico di certi simboli. Si usa il simbolo $\forall$ semplicemente per abbreviare la scrittura di "per ogni", e "sse" per abbreviare "se e solo se": sono stenografie. Spesso, il simbolismo preso dalla logica è usato solo come una stenografia. Non è che ciò sia proibito, basta aver coscienza che si usa quel simbolismo come stenografia, e che non sono simboli di un linguaggio formale. Il linguaggio formale non è la stenografia, non è una scrittura abbreviata, il linguaggio formale è un nuovo linguaggio, è una nuova costruzione, è un nuovo oggetto di cui ci interessa il comportamento per verificare i suoi limiti e le sue potenzialità descrittive. Analogamente, quando ad esempio si introducono i numeri complessi, si costruisce un nuovo oggetto per fare certe operazioni. Qui, invece, l'oggetto che si costruisce e si studia è un linguaggio formale.

Una certa dose di stenografia può essere utile fin dalle prime fasi dello studio della matematica. Non così per il linguaggio formale. Questo va introdotto solo quando se ne sente l'esigenza. Ma quando se ne è sentita l'esigenza? Da un punto di vista storico, in modo particolare in questo secolo, dopo la crisi dei fondamenti, dopo l'introduzione dell'informatica, perché entrambe richiedono un linguaggio formale, cioè un sistema simbolico, su cui operare meccanicamente in corrispondenza delle operazioni sui significati che si vogliono controllare o elaborare. Così le operazioni puramente sintattiche sul simbolismo possono essere eseguite anche da una macchina che sarà utile all'uomo che conosce la corrispondenza tra le operazioni sintattiche e le operazioni sui significati delle formule.

11. LA TRASMISSIONE E L'ASCOLTO DI MESSAGGI. ISOMORFISMO ED ELEMENTARE EQUIVALENZA TRA STRUTTURE.

Al punto 3., si è già osservato che un linguaggio, anche formale, può essere visto come uno strumento comunicativo, e, come tale, può essere soggetto a interpretazioni in varie realizzazioni. Allora questa affermazione si riferiva all'interpretazione dei simboli del linguaggio; ora che il concetto di interpretazione in una realizzazione è stato introdotto anche per insiemi di formule è opportuno ritornare con più attenzione su quell'osservazione.

Chi vuol descrivere una situazione, più precisamente una struttura con una attribuzione di valori alle variabili, o almeno certi suoi aspetti, può usare un messaggio, cioè un insieme di formule, che siano vere appunto quando sono interpretate in quella struttura con quella attribuzione di valori alle variabili. Ovviamente, chi vuol trasmettere un messaggio parte da una realizzazione, che deve conoscere, e individua un insieme di formule vere quando sono interpretate in quella realizzazione: per lui la realizzazione è unica e prefissata.

Dall'altra parte, chi riceve un insieme di formule può non conoscere la realizzazione in cui il mittente intende interpretare dette formule. Il suo problema non è tanto quello di vedere se le formule ricevute sono vere o meno se interpretate in una prefissata realizzazione (possibilmente quella intesa dal mittente), ma piuttosto determinare l'insieme (che può anche essere vuoto) delle realizzazioni in cui quelle formule sono interpretabili nel vero. Detto altrimenti, egli vuole verificare se è accettabile l'assunzione che quelle formule siano vere se interpretate in una realizzazione e riconoscere in quali realizzazioni ciò avviene: per lui la realizzazione in cui interpretare delle formule non è detto sia unica e sicuramente non è prefissata, ma è l'obiettivo della sua ricerca.

Tutto ciò ribadisce l'importanza di considerare tutte le possibili realizzazioni di un insieme di formule in un linguaggio, e si nota ancora che non si può parlare semplicemente di verità di una formula, ma solo di verità di una formula quando è interpretata in una realizzazione.

Rimane il problema se chi vuol descrivere una realizzazione può trovare un insieme di formule che sono vere se e solo se vengono interpretate in quella realizzazione: ciò permetterebbe di individuare univocamente quella realizzazione, e consentirebbe la comunicazione più esatta tra mittente e ricevente. La risoluzione di questo problema è una delle motivazioni principali per lo studio che si sta intraprendendo, e la soluzione apparirà ben più avanti, quando si saranno sviluppati gli strumenti necessari per arrivarvi.

Ma fin da ora è possibile una osservazione: già nel momento dell'invio di un messaggio, cioè nel descrivere una realizzazione mediante formule che siano vere in quella realizzazione, ciò che viene descritto è il comportamento della struttura e dell'attribuzione di valori alle variabili, e non l'essenza degli elementi dell'universo e l'essenza delle relazioni, eccetera. (Questo atteggiamento è anche consono al generale atteggiamento estensionale della matematica). Così due strutture che si comportino esattamente nello stesso modo (ciò comporta tra l'altro che le due strutture sono dello stesso tipo) dovranno essere considerate sostanzialmente la stessa e non potranno essere distinte mediante enunciati (cioè formule senza variabili libere che richiederebbero il ricorso ad una realizzazione) del linguaggio. Per precisare questa importante nozione di avere lo stesso comportamento, si introduce la nozione di isomorfismo.

Due strutture, $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$, dello stesso tipo si dicono **isomorfe**, e si scriverà $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, se esiste una biiettività (detta **isomorfismo**) dall'universo della prima sull'universo della seconda che preserva la struttura. Una funzione f dall'universo di una struttura nell'universo di un'altra **preserva la struttura** se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1) per ogni relazione n-aria R della prima struttura, una qualsiasi n-upla $a_1,...,a_n$ del suo universo appartiene alla relazione R se e solo se l'n-upla $f(a_1),...,f(a_n)$, che le corrisponde attraverso la funzione, appartiene alla corrispondente relazione (cioè la relazione, nella seconda struttura, associata al predicato associato alla relazione R); e inoltre

2) per ogni funzione n-aria F della prima struttura che fa corrispondere ad una qualsiasi data n-upla $a_1,...,a_n$ del suo universo l'elemento a, la corrispondente funzione (cioè la funzione, nella seconda struttura, associata al simbolo di funzione associato alla funzione F) fa corrispondere all'n-upla $f(a_1),..., f(a_n)$ l'elemento $f(a)$; ed infine

3) ad ogni costante c della prima struttura la funzione f fa corrispondere la corrispondente costante (cioè la costante, nella seconda struttura, associata al simbolo di costante associato alla costante c).

La nozione di isomorfismo tra strutture collega strutture che non si distinguono per il comportamento degli elementi (elementi corrispondenti si comportano nello stesso modo), ma si distinguono solo per l'identità degli elementi, cioè per chi sono gli elementi, fatto questo difficilmente accertabile specie per elementi astratti (cioè costruiti nella mente), e, spesso, di scarsa rilevanza. Si può dire che due strutture isomorfe non sono distinguibili dal loro manifestarsi, e sono sostanzialmente la stessa struttura.

Un esempio non banale di isomorfismo è il seguente. Si considerino la struttura ordinata addittiva dei reali e la struttura ordinata moltiplicativa dei reali positivi, cioè le strutture $(|R,\{=,<\},\{+\},\{0\})$ e $(|R^+,\{=,<\}.\{\times\}.\{1\})$, dove |R indica l'insieme dei numeri reali, |R+ l'insieme dei reali positivi e gli altri simboli si spiegano da sè stessi. Le funzioni esponenziali a^x, con a numero reale maggiore di 1 e x variabile sui numeri reali, sono isomorfismi (lo si dimostri per esercizio).

Si osservi che due strutture isomorfe hanno universi equinumerosi (di uguale cardinalità), poiché un isomorfismo è anzitutto una biiettività tra gli universi delle strutture. Così è naturale introdurre la nozione di **cardinalità di una struttura** $\mathfrak{A}$, che si indica con $||\mathfrak{A}||$, come la cardinalità del suo universo, |A| se A è l'universo di $\mathfrak{A}$.

Si è detto che due struture isomorfe non dovrebbero essere distinguibili mediante enunciati. Ora si vuol dimostrare questo risultato, notando però che la nozione di enunciato non è stata presentata direttamente, magari per induzione, ma è stata ottenuta da quella di formula. Così per arrivare alla dimostrazione si farà vedere qualcosa di più generale, e precisamente che:

TEOREMA. Siano date due strutture $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ tra loro isomorfe di isomorfismo f, una qualsiasi attribuzione di valori alle variabili $\underline{a}$ sulla prima struttura e la corrispondente attribuzione di valori alle variabili $\underline{b}$ sulla seconda struttura così definita $\underline{b}(v_i) = \mathit{f}(\underline{a}(v_i))$ per ogni variabile v_i. Si considerino le realizzazioni $\sigma = (\mathfrak{A},\underline{a})$ e $\sigma' = (\mathfrak{B},\underline{b})$. Allora per ogni formula φ la sua interpretazione nella realizzazione σ concide con la sua interpretazione nella realizzazione σ', $\varphi^\sigma = \varphi^{\sigma'}$.

DIMOSTRAZIONE. Anzitutto serve un analogo risultato per i termini, e precisamente: per ogni termine t risulta che $\mathit{f}(t^\sigma) = t^{\sigma'}$. Infatti, per induzione sulla costruzione del termine, se t è un simbolo per costante l'uguaglianza segue dalla definizione di isomorfismo tra le due strutture, se t è una variabile l'uguaglianza è giustificata dalla definizione dell'attribuzione di valori alle variabili $\underline{b}$, se infine t è del tipo $\mathrm{f}t_1...t_n$, con f simbolo di funzione n-ario,ancora dalla definizione di isomorfismo e dall'ipotesi induttiva si ha che $\mathit{f}(t^\sigma)=\mathit{f}((\mathrm{f}t_1...t_n)^\sigma)=\mathit{f}(\mathrm{f}^\sigma(t_1^\sigma,...,t_n^\sigma))=\mathrm{f}^{\sigma'}(\mathit{f}(t_1^\sigma),...,\mathit{f}(t_n^\sigma))=\mathrm{f}^{\sigma'}(t_1^{\sigma'},...,t_n^{\sigma'})=(\mathrm{f}t_1...t_n)^{\sigma'}=t^{\sigma'}$.

Da quanto appena visto si ottiene il risultato voluto per le formule atomiche. Infatti se φ è $Pt_1...t_n$ (P predicato n-ario) allora $\varphi^\sigma = (Pt_1...t_n)^\sigma = V$ se e solo se $(t_1^\sigma,...,t_n^\sigma)\in P^\sigma$ se e solo se $(\mathit{f}(t_1^\sigma),...,\mathit{f}(t_n^\sigma))\in P^{\sigma'}$ (grazie alla definizione di isomorfismo) se e solo se (per quanto dimostrato prima) $(t_1^{\sigma'},...,t_n^{\sigma'})\in P^{\sigma'}$ se e solo se $(Pt_1...t_n)^{\sigma'} = \varphi^{\sigma'} = V$, cioè $\varphi^\sigma = \varphi^{\sigma'}$ se φ è una formula atomica.

I casi dell'induzione che riguardano le formule che iniziano con i simboli $\neg$ o $\wedge$ sono banali e lasciati al lettore.

Per concludere la dimostrazione resta da considerare il caso in cui la formula φ sia del tipo $\forall x\psi$. Si noti che $(\forall x\psi)^\sigma=V$ se e solo se per ogni elemento a appartenente all'universo di σ si ha che $\psi^{\sigma(x/a)} = V$. Per ipotesi induttiva, sempre per ogni tale a, e ricordando che per definizione la realizzazione corrispondente alla realizzazione $\sigma(x/a)$ è $\sigma'(x/\mathit{f}(a))$, $\psi^{\sigma(x/a)} = V$, se e solo se $\psi^{\sigma'(x/\mathit{f}(a))} = V$, cioè, dal momento che f è suriettiva, se e solo se per ogni b appartenente all'universo di σ' si ha che $\psi^{\sigma'(x/b)} = V$, che equivale a dire che $(\forall x\psi)^{\sigma'}=V$, il che conclude la dimostrazione per induzione e la dimostrazione del teorema.

Come banale conseguenza del teorema appena dimostrato si ha che, per ogni enunciato φ, se $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ allora $\mathfrak{A}\models\varphi$ se e solo se $\mathfrak{B}\models\varphi$, come si prevedeva.

Tornando al problema di riuscire a caratterizzare univocamente una struttura specificando degli enunciati che deve interpretare nel vero, come conseguenza di quanto dimostrato si devono correggere un po' le aspettative nel senso che la struttura sarà precisata al più a meno di isomorfismi, nel senso che sarà già un risultato notevole poter dire che tutte le strutturre in cui sono veri tutti gli enunciati di un insieme sono tra loro isomorfe.

Un altro modo (più debole) per due struttture di avere un analogo comportamento è quello di non essere distinguibili mediante enunciati di un certo linguaggio.

Due strutture, $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$, che non possono essere distinte mediante gli enunciati di un linguaggio $\mathfrak{L}$ (cioè ogni enunciato del linguaggio è vero in una struttura se e solo se è vero nell'altra) si dicono **elementarmente equivalenti**. Ciò si indica con la notazione $\mathfrak{A}\equiv_{\mathfrak{L}}\mathfrak{B}$. Detto altrimenti, $\mathfrak{A}\equiv_{\mathfrak{L}}\mathfrak{B}$ se per ogni enunciato φ in un linguaggio $\mathfrak{L}$ si ha che $\mathfrak{A}\models\varphi$ se e solo se $\mathfrak{B}\models\varphi$. Se è noto a che linguaggio ci si riferisce, si usa la notazione $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$. Th($\mathfrak{A}$) indica la **teoria della struttura** $\mathfrak{A}$, cioè l'insieme di tutti gli enunciati nel linguaggio $\mathfrak{L}$ veri nella struttura $\mathfrak{A}$: $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})=\{\varphi\colon \varphi$ è un $\mathfrak{L}$-enunciato tale che $\mathfrak{A}\models\varphi\}$. Usando tale nozione la condizione $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$ può essere espressa dicendo che Th($\mathfrak{A}$) =

Th($\mathfrak{B}$). Si noti che per un qualsiasi enunciato φ del linguaggio $\mathfrak{L}$ adatto alla struttura $\mathfrak{A}$ o lui o la sua negazione appartiene alla Th($\mathfrak{A}$).

Dal facile corollario al teorema prima dimostrato segue che se $\mathfrak{A}\simeq\mathfrak{B}$ allora $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$. In generale non vale il viceversa di quanto ora asserito, cioè esistono strutture elementarmente equivalenti ma non isomorfe, ma ciò sarà visto più oltre quando si saranno sviluppati gli stumenti necessari per dimostrare tale affermazione. I due ultimi risultati giustificano l'asserzione che la nozione di elementare equivalenza è più debole di quella di isomorfismo.

12. SOSTITUZIONI.

Si è già visto che un motivo per introdurre una variabile individuale può essere quello di voler indicare un individuo più o meno definitivamente ben precisato. In qualche modo la formula in cui ci sono occorrenze libere di una variabile parla dell'individuo associato alla variabile. Può anche darsi che, ad un certo punto, si voglia menzionare esplicitamente il nome dell'individuo, nome che dovrà essere messo al posto della variabile; o si voglia fare la stessa affermazione riguardo ad un individuo che ha un diverso nome, nel qual caso un altro termine dovrà essere messo al posto della variabile. Si vogliono ora studiare le problematiche connesse ad una tale operazione di cambiamento di un termine in una formula, sia dal punto di vista sintattico che semantico.

Sia, dunque, α una formula in cui può occorrere una variabile, diciamo la variabile x. Sia t un termine. Indichiamo con $\alpha(x/t)$ la formula ottenuta dalla formula α sostituendo nella sua scrittura il termine t al posto delle occorrenze libere della variabile x. Così, ad esempio, se α è la formula Pv_0, dove P è un predicato unario, e t è il termine costituito dal simbolo di costante c, allora $Pv_0(v_0/c)$ è la formula Pc, come ci si aspetta, e non si intravedono difficoltà, neppure rispetto ad una possibile interpretazione in una realizzazione. Infatti se l'attribuzione di valori alle variabili della realizzazione assegna alla variabile v_0 lo stesso elemento dell'universo che è la costante della struttura della realizzazione corrispondente al simbolo di costante c, allora il significato delle due formule interpretate in quella realizzazione sarà lo stesso; se invece l'elemento dell'universo non è lo stesso, allora il significato può essere diverso.

Per parlare più agevolmente di ciò che seguirà, è opportuno introdurre i concetto di **sottoformula** di una formula α. Questa vuole essere la successione di simboli che è una formula e che è compresa tra due simboli della formula α. Ciò è ben precisato dalla seguente definizione di sottoformula di α per induzione sulla costruzione della formula α: l'unica sottoformula di una formula atomica è la formula atomica stessa; le sottoformule di una formula del tipo $\neg\beta$ sono la stessa formula e anche le sottoformule di β; le sottoformule di una formula del tipo $\wedge\beta\gamma$ sono la stessa formula e anche le sottoformule di β e di γ, le sottoformule di una formula del tipo $\forall v_i\beta$ sono la stessa formula e anche le sottoformule di β. Si dimostra che la definizione coglie proprio ciò che si voleva indicare. In questo contesto si può definire cosa si intende per il **raggio d'azione** di una occorrenza di un quantificatore in una formula α: esso è la sottoformula di α che inizia con quel quantificatore.

Si consideri ora la formula $\forall v_0\wedge Pv_0Pv_1$. Si coglie immediatamente il motivo per cui si è limitata la sostituzione solo alle variabili che occorrono libere: se infatti si sostituisse un termine al posto di una variabile vincolata il significato della formula interpretata in una qualsiasi realizzazione non cambierebbe solo nell'attribuire un certo comportamento ad un individuo piuttosto che ad un altro, ma sarebbe completamente stravolto, perché quel termine sarebbe interpretato in un elemento dell'universo e non via via in tutti gli elementi per studiare il comportamento globale dell'interpretazione nella realizzazione della sottoformula che segue la quantificazione, come è richiesto da questa, e non è ciò che si vuole. La stessa ultima formula introdotta ci permette di notare anche un altro pericolo: se infatti in essa si volesse sostituire il termine fv_0 (dove f è un simbolo di funzione unario) alla occorrenza della variabile v_1, che è libera, si otterrebbe la formula $\forall v_0\wedge Pv_0Pfv_0$ che, interpretata in una qualsiasi realizzazione, ha ancora un significato molto diverso da quello che si vorrebbe, perché nel termine fv_0 occorre la variabile v_0 che

Nel caso descritto si parla di cattura di variabili, nel senso che una occorrenza di una variabile, la v_1, che è libera, pur essendo nel raggio d'azione di un quantificatore, ma che è seguito immediatamente dalla diversa variabile v_0, viene sostituita da un termine in cui occorre la stessa variabile v_0 che seguiva immediatamente quel quantificatore, sicché, in quella posizione, l'occorrenza della variabile v_0, inserita con la sostituzione, diventa vincolata, venendo "catturata" dal quantificatore, cioè essendo nel raggio d'azione di quel quantificatore seguito immediatamente proprio dalla variabile v_0.

Per evitare la cattura di variabili appena evidenziata si introduce la seguente definizione. Un termine t è detto **libero per una variabile** x **in una formula** α se nessuna occorrenza libera della variabile x è nel raggio d'azione di un quantificatore seguito immediatamente da una variabile che occorre nel termine t. Poi, se t è libero per x in α, si indica con $\alpha(x/t)$ la formula ottenuta dalla formula α sostituendo nella sua scrittura il termine t al posto delle occorrenza libere della variabile x. Per mostrare che in questo caso la sostituzione coglie il significato che si intendeva, si dimostrerà che, rispetto ad una qualsiasi realizzazione σ, $\alpha(x/t)^\sigma = \alpha^{\sigma(x/t^\sigma)}$.

Per arrivare a dimostrare questo risultato, si dimostra prima qualcosa di analogo per i termini. Sia t' un termine in cui può occorrere la variabile x, si indichi con t'(x/t) il termine ottenuto dal termine t' sostituendo in esso al posto di ogni occorrenza delle variabile x il termine t. In tale situazione $t'(x/t)^\sigma=t'^{\sigma(x/t^\sigma)}$. Si può dimostrare questa affermazione per induzione sulla costruzione di t'. Se t' è un simbolo per costante o una variabile diversa da x allora t'(x/t) è t' e l'uguaglianza da dimostrare è banale. Se t' è la variabile x allora t'(x/t) è t e chiaramente $t'(x/t)^\sigma=t^\sigma=x^{\sigma(x/t^\sigma)}=t'^{\sigma(x/t^\sigma)}$. Infine se t' è del tipo $ft_1...t_n$, allora t'(x/t) è $ft_1(x/t)..\,.t_n(x/t)$ e $t'(x/t)^\sigma = \big(ft_1(x/t)...t_n(x/t)\big)^\sigma = f^\sigma((t_1(x/t))^\sigma,..\,.,(t_n(x/t))^\sigma)$ = (per ipotesi induttiva) $f^\sigma(t_1{}^{\sigma(x/t^\sigma)},...,t_n{}^{\sigma(x/t^\sigma)}) = (ft_1...t_n)^{\sigma(x/t^\sigma)} = t'^{\sigma(x/t^\sigma)}$. Così, avendo provato la base nei vari casi e il passo della dimostrazione per induzione, si può concludere con la tesi.

Si può ora dimostrare che, se α è una formula atomica del tipo $Pt_1...t_n$, allora $\alpha(x/t)^\sigma= \alpha^{\sigma(x/t^\sigma)}$. Infatti $\alpha(x/t)^\sigma=(Pt_1(x/t)...t_n(x/t))^\sigma=V$ se e solo se $((t_1(x/t))^\sigma,...,(t_n(x/t))^\sigma)\in P^\sigma$ se e solo se (per quanto visto precedentemente) $(t_1{}^{\sigma(x/t^\sigma)},...,t_n{}^{\sigma(x/t^\sigma)})\in P^\sigma$ se e solo se $V=(Pt_1...t_n)^{\sigma(x/t^\sigma)} = \alpha^{\sigma(x/t^\sigma)}$. Si noti che, non essendoci quantificatori in questo caso, ogni termine è libero per qualsiasi variabile in α.

Se poi α è una formula del tipo $\neg\beta$ o del tipo $\wedge\beta_1\beta_2$ o del tipo $\forall y\beta$, dove β, β_1, β_2 sono formule e y è una variabile diversa da x, allora, dal momento che i termini liberi per x in α sono liberi per x anche in β o β_1 o β_2 rispettivamente, si ha che

$((\neg\beta)(x/t))^\sigma = (\neg(\beta(x/t)))^\sigma = \neg^\sigma((\beta(x/t))^\sigma)$ = (per ipotesi di induzione) $\neg^\sigma((\beta)^{\sigma(x/t^\sigma)}) = (\neg\beta)^{\sigma(x/t^\sigma)}$,

e $((\wedge\beta_1\beta_2)(x/t))^\sigma = \wedge^\sigma((\beta_1(x/t))^\sigma,(\beta_2(x/t))^\sigma)$ = (per ipotesi di induzione) $\wedge^\sigma(\beta_1{}^{\sigma(x/t^\sigma)}, \beta_2{}^{\sigma(x/t^\sigma)}) = (\wedge\beta_1\beta_2)^{\sigma(x/t^\sigma)}$,

e $((\forall y\beta)(x/t))^\sigma$ = (poiché o x non occorre in β, caso banale che non si considererà ulteriormente, o y non occorre in t, essendo t libero per x in $\forall y\beta$) $(\forall y(\beta(x/t)))^\sigma = V$ se e solo se $(\beta(x/t))^{\sigma(y/a)} = V$ per ogni $a\in A$ (con A universo della struttura della realizzazione σ), se e solo se (per ipotesi di induzione) $\beta^{\sigma(y/a)(x/t^{\sigma(y/a)})} = V$ per ogni $a\in A$, se e solo se (poiché y non è x e $t^\sigma=t^{\sigma(y/a)}$ non occorrendo y in t) $\beta^{\sigma(x/t^\sigma)(y/a)} = V$ per ogni $a\in A$, se e solo se $(\forall y\beta)^{\sigma(x/t^\sigma)} = V$.

Infine se α è una formula del tipo $\forall x\beta$, dove β è una formula, allora $(\forall x\beta)(x/t)$ è $\forall x\beta$, non essendoci occorrenze libere di x, e, per lo stesso motivo, $(\forall x\beta)^\sigma = (\forall x\beta)^{\sigma(x/t^\sigma)}$.

Avendo esaurito i casi della dimostrazione per induzione, si è conclusa la dimostrazione che $\alpha(x/t)^\sigma=\alpha^{\sigma(x/t^\sigma)}$, rispetto ad una qualsiasi realizzazione σ.

Abbiamo fin qui visto il significato della sostituzione di un termine libero per una variabile in una formula, al posto delle occorrenze libere di quella variabile nella formula.

Al contrario delle occorrenze libere di una variabile, che indicano un elemento dell'universo della realizzazione, le variabili vincolate indicano il fatto che si vuole vedere se c'è una caratteristica del comportamento globale di una certa affermazione riguardo a tutti gli individui dell'universo. Qui il nome usato per essere interpretato nei vari individui dell'universo sembra irrilevante, purché non si generino confusioni. Ci si può allora domandare quali sono i pericoli, le conseguenti attenzioni, e cosa succede se si cambia il nome alle occorrenze vincolate di una variabile? Ovviamente al suo posto bisognerà mettere ancora una variabile se si vuole che rimanga un nome da interpretare in tutti i modi possibili. Cosi pare che non dovrebbe succedere nulla di particolare poiché una variabile quantificata sta ad indicare un qualsiasi individuo, non uno specifico, e, cambiandogli nome, non dovrebbe cambiare il significato della formula interpretata in una qualsiasi realizzazione, al contrario della sostituzione di un termine al posto delle occorrenze libere di una variabile. Ad esempio sostituendo al posto delle occorrenze vincolate della variabile v_0 la variabile v_1 nella formula $\forall v_0 P v_0$, dove P è un predicato unario, si ottiene la formula $\forall v_1 P v_1$ che, come si dimostrerà, interpretata in una qualsiasi realizzazione, ha lo stesso significato della prima formula.

Ma il seguente esempio mostra che anche per le sostituzioni di occorrenze vincolate di variabili ci vogliono delle attenzioni. Sia Q un predicato binario e si consideri la formula $\forall v_0 \wedge Q v_0 v_1 \forall v_1 Q v_0 v_1$, in cui la prima occorrenza della variabile v_1 è libera. Se in questa formula si sostituisce al posto delle occorrenze vincolate della variabile v_0 proprio la variabile v_1 si ottiene $\forall v_1 \wedge Q v_1 v_1 \forall v_1 Q v_1 v_1$ che si intuisce debba avere un significato abbastanza diverso da quello della formula di partenza dal momento che ora l'occorrenza di v_1 che prima era libera è diventata vincolata e quella che prima era l'ultima occorrenza di v_0 che era vincolata dal primo quantificatore ora è una occorrenza di v_1 vincolata dall'altro quantificatore (c'è stata ancora una cattura di variabili anche se di tipo diverso). Un modo per evitare queste anomalie è supporre che la variabile v_j che si vuole mettere al posto delle occorrenze vincolate di un'altra variabile v_i in una formula α non abbia, in una sottoformula δ di α che inizi con $\forall v_i$, occorrenze che sono libere relativamente alla sottoformula δ, e che v_i non abbia, in una sottoformula δ' di α che cominci con $\forall v_j$, occorrenze libere relativamente alla sottoformula δ'. L'ultima condizione implica che v_j è libera per v_i in δ'. Una sostituzione delle occorrenze vincolate di una variabile che rispetti le condizioni appena enunciate è detta un cambio alfabetico. Ma si può precisare meglio la nozione di formula α' ottenuta dalla formula α per **cambio alfabetico** della variabile v_i con la variabile v_j, dandone una definizione per induzione sulla costruzione della formula α. Così, se α è una formula atomica ogni cambio alfabetico su α dà ancora α. Se α è $\neg\beta$ oppure $\wedge\gamma\lambda$, o $\forall v_k \delta$, con k diverso da i, e β', γ', λ' e δ' sono le formule ottenute da β, γ_1, γ_2 e δ rispettivamente per cambio alfabetico della variabile v_i con la variabile v_j, allora α' sarà rispettivamente o $\neg(\beta')$ o $\wedge(\gamma')(\lambda')$ o $\forall v_k(\delta')$. Se, infine, α è $\forall v_i \delta$ e la variabile v_j non occorre libera in δ ed è un termine libero per v_i in δ, allora α' è $\forall v_j(\delta(v_i/v_j))$, mentre, se v_j non soddisfa dette condizioni, non si può effettuare il cambio alfabetico e α' è α. In particolare se si sostituisce, al posto delle occorrenze vincolate di una variabile, un'altra variabile che non occorre né libera né vincolata in una formula, questa variabile sicuramente soddisfa le condizioni per poter effettuare il cambio alfabetico.

Mostriamo ora che una formula α e una formula α' ottenuta da α per cambio alfabetico hanno lo stesso valore di verità quando sono interpretate in una stessa arbitraria realizzazione, cioè

TEOREMA Per ogni realizzazione σ, e per ogni formula α, se la formula α' ottenuta da α per cambio alfabetico allora $\alpha^\sigma=\alpha'^\sigma$.

DIMOSTRAZIONE. Al solito si argomenta per induzione sulla costruzione delle formule. Se la formula è atomica il risultato è banale perché l'esecuzione di un cambio alfabetico non cambia la formula. Se la formula α è del tipo $\neg\beta$ o del tipo $\wedge\gamma\lambda$ o del tipo $\forall x\delta$, in cui il cambio alfabetico riguarda le occorrenze vincolate di una variabile diversa da x, e se β', γ', λ' e δ' sono ottenute mediante lo stesso cambio alfabetico da β, γ, λ e δ rispettivamente, poiché per ipotesi induttiva, qualsiasi sia la realizzazione σ, si ha che $\beta^\sigma=\beta'^\sigma$, $\gamma^\sigma=\gamma'^\sigma$, $\lambda^\sigma=\lambda'^\sigma$, e $\delta^\sigma=\delta'^\sigma$, risulta anche che $\alpha^\sigma=\alpha'^\sigma$. Infine, si consideri l'eventualità che la

stituire con la variabile y. In tal caso, qualunque sia la realizzazione σ, $\forall x\beta^{\sigma}$=V se e solo se per ogni a appartenente all'universo della realizzazione σ si ha che $\beta^{\sigma(x/a)}$=V. Ma $\beta^{\sigma(x/a)}$= (poiché y non occorre libera in β) $\beta^{\sigma(y/a)(x/a)}$= (poiché $y^{\sigma(y/a)}$=a) $\beta^{\sigma(y/a)(x/y^{\sigma(y/a)})}$ = (per il risultato sulla sostituzione di occorrenze libere di variabili, dal momento che le occorrenze di x vincolate da $\forall x$ in $\forall x\beta$ sono libere in β, e che y è libera per x in β) $\beta(x/y)^{\sigma(y/a)}$. Così, per ogni a appartenente all'universo della realizzazione σ, si ha che $\beta^{\sigma(x/a)}$=V se e solo se $\beta(x/y)^{\sigma(y/a)}$ = V, se e solo se $\forall y\beta(x/y)^{\sigma}$ = V, che è ciò che si voleva far vedere per concludere la dimostrazione per induzione sulla costruzione delle formule.
Si chiama **variante** di una formula α una formula ottenuta da α mediante cambi alfabetici. Dal risultato precedente segue immediatamente che una formula e una sua variante sono vere nelle stesse realizzazioni sicché, dal punto di vista delle realizzazioni, si può considerare l'una invece dell'altra.

I cambi alfabetici permettono anche di definire le **sostituzioni di un termine al posto delle occorrenze libere di una variabile in una formula** anche se il termine non è libero per quella variabile in quella formula. Di fatto con opportuni cambi alfabetici si può rendere un qualsiasi termine libero per una variabile, non tanto in una formula, ma in una variante di quella formula. Così si può convenire che la scrittura $\alpha(x/t)$ indica la sostituzione del termine t al posto delle occorrenze libere della variabile x nella formula α se t è libero per x in α, altrimenti $\alpha(x/t)$ indica la sostituzione del termine t per x in una variante di α in cui t è libero per x.

13. UGUAGLIANZA COME SIMBOLO LOGICO.

Il simbolo = (uguale) è il simbolo di un predicato binario. Ciò è però insufficiente per dire in quale relazione binaria deve essere interpretato. In genere si vorrebbe che fosse interpretato nella relazione binaria costituita dalle coppie ordinate di elementi dell'universo in cui il primo e il secondo elemento coincidono. Si può dimostrare (sfruttando strumenti che verranno eleborati più avanti) che non è possibile precisare attraverso insiemi di enunciati del linguaggio una struttura in cui l'interpretazione del predicato = debba essere necessariamente la relazione identica sull'universo di quella struttura. Per struttura precisata attraverso un insieme di enunciati del linguaggio si intende una struttura in cui tutti gli enunciati dell'insieme siano interpretati nel valore di verità V.
Un tentativo di precisare mediante il linguaggio una struttura in cui l'interpretazione di = debba essere la relazione identica si può fare scegliendo opportuni enunciati. Tra questi enunciati, ad esempio, si possono inserire $\forall x$ =xx, $\forall x\forall y\forall z(=xy\rightarrow(=yz\rightarrow=xz))$, $\forall x\forall y(=xy\rightarrow=yx)$. Ma si vede subito che interpretando = in una qualsiasi relazione di equivalenza sull'universo di una struttura gli enunciati indicati sarebbero veri. Si potrebbero aggiungere le formule del tipo $\forall x\forall y\ (=xy\rightarrow(\alpha(x)\leftrightarrow\alpha(x/y))$, per ogni formula α. Le formule di tale tipo sono infinite ed ancora, come si è detto non sono sufficienti perché si sia forzati ad interpretare = nella relazione identica.
Si può decidere, al di là di quanto permette di precisare il linguaggio, di voler considerare solo le interpretazioni in cui il predicato uguale è interpretato nella relazione identica sull'universo.
Se si adotta tale scelta, si dice che si considera il predicato = come una costante logica, o che si considera = **come simbolo logico**: in effetti al predicato = si dà una interpretazione che è pressoché sempre la stessa, costante, come alle altre costanti logiche. In effetti le relazioni di identità sono diverse su insiemi diversi, ma possono, comunque, essere tutte caratterizzate come le relazioni costituite da tutte le coppie ordinate di elementi dell'universo in cui il primo elemento coincide con il secondo.

14. RICCHEZZA DI UN LINGUAGGIO E STRUTTURE A CUI E' ADATTO.

Inizialmente si è introdotto il concetto di struttura e si è osservato come l'insieme non vuoto delle relazioni della struttura contiene solo le relazioni che si intendono considerare, non necessariamente tutte le relazioni. Analoghe osservazioni valgono per l'insieme delle funzioni totali non costanti e per l'insieme delle costanti.

Il problema che si vuole ora analizzare è cosa succede se si amplia o si riduce l'insieme delle relazioni o delle funzioni o delle costanti che si vogliono considerare.

Ovviamente si passa ad un'altra struttura, ma con naturali legami con la struttura di partenza.

Si dirà che una struttura $\mathfrak{A}_1=(A_1,\mathcal{R}_1,\mathcal{F}_1,\mathcal{C}_1)$ è una **espansione** di una struttura $\mathfrak{A}_0=(A_0,\mathcal{R}_0,\mathcal{F}_0,\mathcal{C}_0)$ se le due strutture hanno lo stesso universo ($A_1=A_0$) e $\mathcal{R}_1\supseteq\mathcal{R}_0$ e $\mathcal{F}_1\supseteq\mathcal{F}_0$ e $\mathcal{C}_1\supseteq\mathcal{C}_0$, cioè l'insieme $\mathcal{R}_1$ di relazioni include l'insieme $\mathcal{R}_0$ di relazioni, l'insieme $\mathcal{F}_1$ di funzioni include l'insieme $\mathcal{F}_0$ di funzioni, e l'insieme $\mathcal{C}_1$ di costanti include l'insieme $\mathcal{C}_0$ di costanti. Si può dire che tutte le relazioni, le funzioni e le costanti della struttura $\mathfrak{A}_0$ si ritrovano nella struttura $\mathfrak{A}_1$ dove ci sono eventualmente anche delle altre o relazioni o funzioni o costanti. In tale situazione si dirà anche che $\mathfrak{A}_0$ è una **riduzione** di $\mathfrak{A}_1$. L'espansione e la riduzione si diranno proprie se $\mathfrak{A}_0$ non è $\mathfrak{A}_1$.

Se una struttura $\mathfrak{A}_1$ è un'espansione propria di un'altra struttura $\mathfrak{A}_0$ allora le due strutture non sono dello stesso tipo. Infatti lo stesso linguaggio non è adatto ad entrambe le strutture, poiché se $\mathfrak{L}_0$ è un linguaggio adatto alla struttura $\mathfrak{A}_0$, in esso tutti i simboli sono impegnati per interpretare le relazioni o le funzioni o le costanti di $\mathfrak{A}_0$ e non ci saranno i simboli per interpretare le relazioni o le funzioni o le costanti di $\mathfrak{A}_1$ che non sono nella struttura $\mathfrak{A}_0$. A partire dal linguaggio $\mathfrak{L}_0$, per ottenere un linguaggio adatto alla struttura $\mathfrak{A}_1$ bisogna aggiungere dei nuovi simboli della dovuta arietà in corrispondenza alle relazioni, alle funzioni e alle costanti in $\mathfrak{A}_1$ e non in $\mathfrak{A}_0$; si otterrà così un nuovo linguaggio $\mathfrak{L}_1$ che si può indicare come $\mathfrak{L}_0+\Lambda$ dove Λ è l'insieme dei nuovi simboli. Si usa dire che $\mathfrak{L}_1$ è un **arricchimento** del linguaggio $\mathfrak{L}_0$. Spesso capiterà di considerare espansioni in cui si aggiungono solo costanti, e in tal caso il linguaggio $\mathfrak{L}_1$ adatto alla struttura espansa sarà indicato mediante la scrittura $\mathfrak{L}_0+C$, con C insieme di simboli di costante non in $\mathfrak{L}_0$, di cardinalità almeno uguale al numero delle costanti in $\mathfrak{A}_1$ non in $\mathfrak{A}_0$.

Abbiamo già introdotto il concetto di realizzazione; le realizzazioni sono caratterizzate da una coppia di elementi: una struttura e una attribuzione di valori alle variabili. Anche per le realizzazioni possiamo parlare di espansioni e riduzioni; più precisamente si dirà che una realizzazione $\sigma_1=(\mathfrak{A}_1,\underline{a}_1)$ è una **espansione** di una realizzazione $\sigma_0=(\mathfrak{A}_0,\underline{a}_0)$ quando $\mathfrak{A}_1$ è un'espansione di $\mathfrak{A}_0$ e $\underline{a}_1$ è uguale ad $\underline{a}_0$. In tal caso si dirà anche che σ_0 è una **riduzione** di σ_1.

Quando si considera una formula, si pensa che essa sia scritta in un linguaggio che in genere è costituito da più simboli di quelli che occorrono nella formula. Così è naturale pensare che la formula può appartenere a più linguaggi che contengono i simboli occorrenti nella formula. Quando si interpreta la formula si deve utilizzare una interpretazione adatta a un certo linguaggio, sicché è necessario precisare in quale linguaggio la formula è considerata, anche se spesso tale precisazione non viene esplicitata essendo sottinteso il linguaggio a cui ci si riferisce.

Anche quando si considera un insieme di formule si incorre in una situazione analoga: bisognerebbe sempre specificare il linguaggio in cui si intendono scritte quelle formule anche ai fini di trovare una realizzazione che sia adatta a quel linguaggio. E' opportuno ribadire che spesso è sottinteso a quale linguaggio si fa riferimento: quando non è diversamente specificato, si intende che il linguaggio di riferimento sia il minimo linguaggio in cui si possono esprimere le formule che si considerano.

A volte però (e in seguito spesso sarà fatto così), per riuscire a specificare meglio certe caratteristiche di una realizzazione in cui si vuole che certe formule siano interpretate in vero, si utilizza un linguaggio più ricco adatto ad una espansione della realizzazione cercata e, con maggiore facilità, si trova una tale espansione. Questa è già una realizzazione in cui le formule che interessano sono interpretate in vero, anche se è adatta ad un linguaggio più ricco e non al linguaggio considerato inizialmente.

Si potrebbe essere già contenti di tale risultato, ma si può anche essere più pignoli nel richiedere che la struttura cercata debba essere proprio adatta al linguaggio inizialmente precisato. Fortunatamente questa ulteriore richiesta non presenta difficoltà ad essere soddisfatta. Infatti raggiunta una interpretazione adatta ad un linguaggio più ricco che rende vere certe formule, per averne una che è sostanzialmente quella trovata, ma che è adatta al linguaggio minimo di quelle formule, e in cui queste continano ad essere vere, basta considerare la riduzione della precedente struttura al linguaggio voluto: sostanzialmente si sta considerando la stessa struttura, solo tralasciando di interpretare i simboli in più che non occorrono nelle formule considerate. Che le formule date continuino ad essere vere dipende dal risultato, già visto come esercizio, che la loro verità in una realizzazione dipende solo da come vengono interpretati i simboli propri che in esse occorrono e non dipende da come vengono interpretati gli altri simboli propri.

15. VALIDITA', CONSEGUENZA LOGICA E SODDISFACIBILITA'.

Anche se inizialmente l'interesse era rivolto a stabilire la verità o meno di una formula interpretata in una certa realizzazione, tuttavia spesso non è meno interessante determinare, grazie proprio alla nozione di verità o meno di una formula in una realizzazione, se esiste una realizzazione tale che quella formula è vera quando è interpretata in essa. La rilevanza di questa nuova nozione dipende anche dal suo legame con altre molto importanti che ora si considereranno.

Intanto è opportuno introdurre un po' di terminologia. Si dice che una formula φ è **valida** se è interpretata in vero in ogni realizzazione. Per indicare ciò si userà la notazione $|=\varphi$.

Si dice che una formula φ è **conseguenza logica** di un'altra formula ψ se φ è interpretata in vero in ogni realizzazione che interpreta in vero la formula ψ. In tal caso si userà la notazione $\psi|=\varphi$. Similmente si dice che una formula φ è **conseguenza logica** di un insieme di formule Φ se φ è interpretata in vero in ogni realizzazione che interpreta in vero ciascuna delle formule di Φ. Ora la notazione sarà $\Phi|=\varphi$. Se Φ è costituito da una sola formula si ricade nel caso precedente (salvo il tralasciare le parentesi graffe per indicare l'insieme di un solo elemento nella notazione), mentre, se Φ è l'insieme vuoto, dire che φ è conseguenza logica di $\varnothing$ equivale a dire che φ è valida poiché riteniamo che in ogni realizzazione siano interpretate in vero le formula (che non ci sono) dell'insieme vuoto, cioè $\varnothing|=\varphi$ se e solo se $|=\varphi$.

Ancora si dice che un insieme Φ di formule è **soddisfacibile** se esiste una realizzazione nella quale si interpretano in vero tutte le formule dell'insieme Φ. L'insieme Φ può essere costituito anche da una sola formula, e in tal caso si parlerà di soddisfacibilità di quella formula.

Le nozioni introdotte sono tra loro legate, nel senso che valgono i seguenti risultati:
- φ è valida se e solo se $\neg\varphi$ è non soddisfacibile;
- $\neg\varphi$ è valida se e solo se φ è non soddisfacibile;
- $\Phi\cup\{\psi\}|=\varphi$ se e solo se $\Phi|=\psi\rightarrow\varphi$; in particolare se Φ sia l'insieme vuoto, $\psi|=\varphi$ se e solo se $|=\psi\rightarrow\varphi$;
- $\Phi|=\varphi$ se e solo se $\Phi\cup\{\neg\varphi\}$ è non soddisfacibile.

Le prime due affermazioni sono banali conseguenze delle definizioni. Per dimostrare il terzo risultato da sinistra a destra, si consideri una qualsiasi realizzazione σ che renda vere (cioè interpreti in vero) le formule di Φ. Può succedere che $(\psi)^\sigma$=F, allora $(\psi\rightarrow\varphi)^\sigma$ =V, e per queste realizzazioni si è mostrato ciò che si voleva, oppure $(\psi)^\sigma$=V, ma allora, per ipotesi, anche $(\varphi)^\sigma$=V, sicché $(\psi\rightarrow\varphi)^\sigma$=V, e anche per queste realizzazioni si è mostrato ciò che si voleva. Per l'altra direzione dello stesso risultato, sia σ una realizzazione tale che $(\Phi\cup\{\psi\})^\sigma$=V; poiché, per ipotesi, per ogni realizzazione che rende vere le formule di Φ, e dunque anche per σ (sicché $(\psi)^\sigma$=V), pure $(\psi\rightarrow\varphi)^\sigma$=V, e così dovrà essere $(\varphi)^\sigma$=V, che è ciò che si voleva dimostrare.

Per dimostrare l'ultimo risultato da sinistra a destra, si consideri una qualsiasi realizzazione σ, se questa non rende vere tutte le formule di Φ, allora non renderà vere neppure le formule di $\Phi\cup\{\neg\varphi\}$, mentre se rende vere tutte le formule di Φ, per ipotesi, dovrà rendere vera anche φ, sicché $\{\neg\varphi\}^{\sigma}$=F, e anche in questo caso σ non rende vere tutte le formule dell'insieme $\Phi\cup\{\neg\varphi\}$ che risulterà non soddisfacibile vista l'arbitrarietà di σ. Per l'altra direzione di questo risultato, sia σ una interpretazione che rende vere le formule di Φ, essa non può rendere vera $\neg\varphi$ altrimenti $\Phi\cup\{\neg\varphi\}$ sarebbe soddisfacibile, contro l'ipotesi, e pertanto dovrà essere $(\varphi)^{\sigma}$= V, il che prova quanto si voleva dimostrare.

16. DIFFICOLTA' NEL RICONOSCIMENTO DI VERITA' E VALIDITA'.

Si è vista la definizione di interpretazione di una formula in una realizzazione. In un certo senso si dovrebbe essere contenti di tale definizione, perché dice in modo esplicito e preciso cosa vuol dire che una formula è vera quando è interpretata in una certa realizzazione. Tuttavia, se la struttura ha un universo infinto, non è agevole, secondo la definizione, rendersi conto se una formula con quantificatori è vera o meno quando è interpretata in una certa realizzazione. Infatti in molte occasioni bisognerebbe effettuare infinite verifiche prima di poter decidere.

Ad esempio, per vedere se una formula che inizia con un quantificatore universale è vera quando è interpretata nella realizzazione σ, secondo la definizione data, si deve controllare la verità della formula che si ottiene togliendo la quantificazione a quella data in tutte le realizzazioni ottenute da σ variando, in tutti i modi possibili, solo la attribuzione di valore alla variabile che segue il quantificatore. Così queste prove sono tante quante gli elementi dell'universo. Come si potrà mai decidere che quella formula è vera in quella realizzazione se l'universo è infinito? Si dovranno fare infinite prove prima di poter concludere che quella formula è vera in quella realizzazione. Se l'universo fosse finito la situazione sarebbe sostanzialmente diversa in quanto, ad un certo momento, si potrebbe dire che sono state completate tutte le verifiche, anche se potrebbe occorrere qualche secolo, nonostante l'aiuto di tutte le possibilità di calcolo esistenti al mondo, quando la cardinalità dell'universo, pur finito, fosse molto grande.

Per quanto fosse attraente la definizione di verità di una formula interpretata in una realizzazione, la sua verifica è poco pratica, se non impossibile. Anche se si sa quali sono le operazioni da eseguire per arrivare a conoscere l'interpretazione di una formula in una realizzazione, in genere quelle operazioni non possono essere completate a causa della loro quantità infinita.

Però ci sono delle formule un po' particolari per le quali è facile stabilire il loro valore di verità. Si pensi ad una formula del tipo $\varphi\to\varphi$, dove $\to$ ha il significato che abbiamo già introdotto. Qualunque sia l'interpretazione di φ, che sarà la stessa nelle due occorrenze, dall'interpretazione di $\to$ segue che la formula $\varphi\to\varphi$ è sempre vera, cioè vera in ogni realizzazione, o valida, secondo la definizione introdotta. Si sa decidere che $\varphi\to\varphi$ è valida anche se in φ ci sono tutte le quantificazioni che si vuole, anche se non si sa decidere se φ è valida o meno.

Si noti che il riconoscimento della validità di una formula, dal punto di vista della definizione data, è ancora meno effettuabile del riconoscimento della verità in una realizzazione, che già poteva richiedere infinite verifiche. Infatti ora bisognerà fare tutte quelle verifiche per ciascuna realizzazione, e queste costituiscono una quantità largamente infinita, talmente infinita da essere una classe propria (infatti per ogni insieme, considerato come universo, si possono costruire varie strutture e quindi realizzazioni, sicché queste saranno almeno tante quante gli insiemi, cioè appunto una classe propria che è' una quantità maggiore di ogni cardinalità). In base alla definizione data, non si può decidere la validità di una qualsiasi formula.

Ma per certe formule si è già riusciti a stabilire la loro validità.

Notiamo meglio cosa si è fatto nel caso esaminato: si è osservata la scrittura della formula data ed si è concluso che quella formula è vera in ogni realizzazione conoscendo il significato di alcuni elementi della sua scrittura.

Visto il successo, ottenuto nel caso in esame, nel determinare la validità mediante lo studio della sola scrittura di una formula, sorge spontanea la seguente domanda: anche per le altre formule ci sono altri criteri, basati solamente sulla scrittura della formula, che permettano di concludere con la validità o meno della formula?

Se si è interessati alla validità di una formula, alla sua verità in ogni realizzazione, il risultato non dovrà più dipendere da come vengono interpretati i predicati, i simboli di funzione o le variabili, cioè non dipende dalle relazioni o dalle funzioni della struttura o dagli individui associati alle variabili libere (appunto poiché dovrà andar bene in ogni realizzazione), ma dovrà dipendere da come si sono aggregati i vari elementi della formula, il che può essere visto dal linguaggio: da qui la speranza che ci possa essere un controllo della validità di una formula che sia puramente sintattico, basato sulla sola scrittura.

Le formule vere in ogni realizzazione, in un certo senso, non dicono assolutamente niente, sono nulle di potere informativo sulla realizzazione in cui sono vere, su cosa descrivono: infatti non distinguono una realizzazione da un'altra perché non sono vere in una e non nell'altra.

L'essere sempre vera (in ogni realizzazione) di una formula dovrebbe dipendere esclusivamente da come si è organizzato il linguaggio. Se dipende solamente dal linguaggio diventa interessante cercare dei controlli sulla scrittura di una formula che permetteranno di riconoscere se è valida o meno, oppure, ed equivalentemente come si è già visto, se la sua negazione è non soddisfacibile o meno.

Il problema diviene: c'è un modo puramente sintattico per riconoscere se una formula è valida? Oppure, c'è un modo puramente sintattico per riconoscere se una formula è soddisfacibile? Inoltre, dal momento che la nozione di soddisfacibilità non riguarda solo formule ma anche insiemi di formule, la domanda può divenire: c'è un modo puramente sintattico per riconoscere se un insieme di formule è soddisfacibile?

Ecco un capitolo centrale della logica: cercare un metodo formale, che opera solo sulle scritture, per vedere se una formula è valida, o se è soddisfacibile, o se un insieme di formule è soddisfacibile. Così si realizza una potenzialità molto importante del linguaggio formale.

Prima di affrontare il tema individuato, al di là della quantità di passi che possono essere necessari per vedere se le formule di un insieme sono interpretate nel vero in una realizzazione, e della quantità di realizzazioni bisogna considerare per decidere sulla soddisfacibilità dell'insieme di formule, quantità così grandi da motivare la scelta di ricercare un metodo formale per vedere se un insieme di formule è soddisfacibile, può essere opportuno considerare anche quante possono essere le formule su cui si dovrà applicare un eventuale opportuno metodo formale.

La quantità delle formule dipende dal linguaggio utilizzato per scriverle. Si è già stabilito che ogni linguaggio ha un numero numerabile di variabili (cioè tante variabili quanti sono i numeri naturali), ma ci sono anche altri simboli, alcuni che sono stati chiamati costanti logiche, e precisamente $\neg$, $\wedge$, $\forall$, $=$, e altri che sono stati chiamati simboli propri del linguaggio che si sta considerando, e precisamente i predicati, i simboli per funzione e i simboli per costante. La quantità dei simboli propri può cambiare da linguaggio a linguaggio, e di conseguenza può cambiare anche il numero delle formule da linguaggio a linguaggio. Dal momento che le formule sono particolari successioni finite di simboli, e che pertanto in ciascuna di esse occorrono un numero finito, ma non limitato da un fissato numero naturale, di simboli propri, potrebbe sembrare naturale fissare l'attenzione solo su linguaggi con un numero al più numerabile di simboli propri. Tuttavia potrebbe nascere il sospetto che, accettando anche quantità più che numerabile di simboli propri e considerando insiemi di formule, si possano ottenere linguaggi più espressivi, anche se non si potrebbe arrivare a sapere bene chi sono esattamente i singoli simboli propri, proprio perché sono troppi, cioè una quantità più che numerabile. Pertanto, in quanto si farà in seguito, e fintantoché non si raggiungeranno motivi per una scelta diversa, si considereranno linguaggi con una quantità di cardinalità arbitraria di simboli propri, quantità che potrà essere diversa da linguaggio a linguaggio. Per questa discussione si indichino rispettivamente con $k_{1\mathfrak{L}}$, $k_{2\mathfrak{L}}$ e $k_{3\mathfrak{L}}$ le cardinalità dell'insieme dei predicati, dell'insieme dei simboli per funzione e dell'insieme dei simboli per costante del linguaggio $\mathfrak{L}$.

Prima di arrivare a calcolare la quantità delle formule, è necessario calcolare quanti sono i termini. Se non ci sono né simboli per costanti né simboli per funzioni, i termini sono solo le variabili che sono una quantità numerabile; sicché in ogni linguaggio i termini sono in una quantità almeno numerabile. Se poi ci sono anche simboli per funzioni e simboli per costanti, ma entrambi i rispettivi insiemi sono al più numerabili (cioè $k_{2\mathfrak{L}}$ e

$k_{3\mathfrak{L}}$ sono minori od uguali ad $\aleph_0$), il numero dei termini rimane numerabile. Infatti i termini costituiscono un sottinsieme dell'insieme delle successioni finite i cui elementi sono o simboli per funzioni, o simboli per costanti o variabili, e queste successioni finite sono una quantità numerabile. Ciò perché, per ogni naturale n, le successioni finite di lunghezza n fatte con simboli presi da un elenco numerabile sono numerabili, dal momento che la loro quantità è il prodotto dei modi di scegliere il primo elemento della successione per i modi di scegliere il secondo elemento, per ..., per i modi di scegliere l'n-esimo elemento, cioè $\aleph_0\times\aleph_0\times..\,.\times\aleph_0$ n volte, ma questa quantità è proprio $\aleph_0$, come si sa. Così, poiché tutte le successioni finite di tali simboli sono l'unione degli insiemi (che sono disgiunti) delle successioni di lunghezza n al variare della lunghezza n (e ciascuno di questi insiemi ha cardinalità $\aleph_0$), l'insieme delle successioni finite avrà cardinalità $\aleph_0\times\aleph_0$, cioè $\aleph_0$. Quanto osservato mostra che, nel caso considerato, i termini sono in una quantità al più numerabile. Di fatto questa quantità è esattamente numerabile perché, oltre che essere al più numerabile, lo è anche almeno, contendo almeno i termini costituiti da un'unica variabile e questi sono già $\aleph_0$, come si è visto.

Affinché i termini siano in numero più che numerabile, bisognerà allora che o l'insieme dei simboli per funzione o l'insieme dei simboli per costante sia più che numerabile. Si supponga che il massimo tra le cardinalità dell'insieme dei simboli per funzione e dell'insieme dei simboli per costante (cioè $\max\{k_{2\mathfrak{L}},k_{3\mathfrak{L}}\}$) sia k, con $k>\aleph_0$. In entrambi i casi si possono esibire almeno k termini. Infatti se sono i simboli per costante ad essere nel numero di k il risultato è immediato essendo un termine ciascuno degli stessi singoli simboli per costante, mentre, se sono i simboli di funzione ad essere in quantità k, si possono ottenere tanti termini, tra loro diversi, in corrispondenza a simboli per funzione tra loro diversi, nel modo seguente: si fa seguire ciascun simbolo di funzione da tante volte la variabile v_0 quant'è l'arietà del simbolo di funzione. D'altra parte, in questo caso, la quantità dei termini è al più k. Infatti, la quantità delle successioni di lunghezza n di simboli che sono o simboli per costante o simboli per funzione o variabili (cioè simboli scelti tra $k=k_{2\mathfrak{L}}+k_{3\mathfrak{L}}$ elementi) è il prodotto di k per sé stesso n volte che, essendo k un cardinale infinito, è ancora k, sicché l'insieme delle successioni finite di tali simboli (che è l'unione degli insiemi delle successioni di lunghezza n al variare del naturale n) avrà cardinalità $\aleph_0\times k$ che è k essendo questo maggiore di $\aleph_0$. Concludendo, se il massimo tra le cardinalità dell'insieme dei simboli per funzione e dell'insieme dei simboli per costante è k, con $k>\aleph_0$, allora la cardinalità dell'insieme dei termini è esattamente k, mentre, se $k\leq\aleph_0$, allora la cardinalità dell'insieme dei termini è $\aleph_0$, sicché la cardinalità dell'insieme dei termini è comunque $\max\{\aleph_0,k\}$

Stabilita la quantità dei termini si può affrontare il problema della quantità delle formule. Ancora, dal momento che le formule sono particolari successioni finite si simboli scelti in un insieme di $h=4+\aleph_0+k_{1\mathfrak{L}}+k_{2\mathfrak{L}}+k_{3\mathfrak{L}}=\max\{4,\aleph_0,k_{1\mathfrak{L}},k_{2\mathfrak{L}},k_{3\mathfrak{L}}\}$ elementi, la cardinalità dell'insieme delle formule sarà minore od uguale ad h. D'altra parte si vede che questa cardinalità è almeno h dalle seguenti considerazioni. Se $k_{1\mathfrak{L}}$ è minore di h allora deve essere $h=k(=\max\{\aleph_0,k_{2\mathfrak{L}},k_{3\mathfrak{L}}\})$, che è il numero dei termini. Sia ora P un predicato di arietà n, e si considerino le formule atomiche inizianti con il predicato P seguito da n volte il termine t. Si ottengono così h diverse formule atomiche al variare di t tra gli h termini. Se invece h è uguale a $k_{1\mathfrak{L}}$, si ottengono h formule atomiche facendo seguire ciascuno degli h predicati da tante volte la variabile v_0 quant'è l'arietà del predicato. Così si può concludere che le formule del linguaggio $\mathfrak{L}$ sono esattamente $h=\max\{\aleph_0,k_{1\mathfrak{L}},k_{2\mathfrak{L}},k_{3\mathfrak{L}}\}$, cioè tante quante il numero dei simboli del linguaggio $\mathfrak{L}$, ovvero $|\mathfrak{L}|$.

17. IL METODO DEGLI ALBERI DI CONFUTAZIONE.

E' possibile tradurre il comportamento del significato di un connettivo in un'opportuna regola sulla scrittura della formula, un po' come si è visto che si fa con i calcoli con i numeri naturali?

Si vuole cercare un metodo per poter controllare la validità o meno di una formula in modo sintattico, cioè in base ad un'analisi di come è scritta, senza ricorrere ad alcuna sua interpretazione.

Poiché, come si è già visto, una formula è valida se e solo se la sua negazione non è soddisfacibile, ed anche una formula è conseguenza logica di un insieme di formule se e solo se la sua negazione aggiunta all'insieme di formule dà un insieme non soddisfacibile, invece di cercare di vedere se una formula è valida o conseguenza logica o meno, si può indagare se un opportuno insieme di formule è soddisfacibile o meno. Allora il problema della ricerca di criteri sintattici di validità o di conseguenza logica può divenire un problema si ricerca di criteri sintattici di soddisfacibilità.

Il problema di controllare la soddisfacibilità di un insieme di formule può essere visto come il problema di controllare la credibilità di un racconto: in base a ciò che viene raccontato uno dovrebbe costruirsi un'immagine della situazione che viene descritta, ma in modo critico, cioè analizzando, nel contempo, se in ciò che viene detto non ci siano delle affermazioni non credibili (come, ad esempio, sia una affermazione che la sua negazione) o che non siano implicitamente contenute delle affermazioni non credibili. Si noti che la presenza di una formula e della sua negazione in un insieme di formule, fatto che rende l'insieme non soddisfacibile, è un qualcosa di puramente sintattico, cioè rilevabile dal solo controllo della scrittura delle formule dell'insieme. Così si può formulare un primo criterio sintattico di non soddisfacibilità di un insieme di formule: la presenza in esso di una formula e della sua negazione. Ma non è detto che questo criterio sia sufficiente perché anche un insieme che non contiene una formula e la sua negazione potrebbe essere non soddisfacibile. Allora ritorna l'importanza di studiare quando, più in generale, un insieme di formule è non credibile per motivi non così espliciti come la presenza di una formula e della sua negazione. Per vedere se in un insieme di affermazioni sono implicitamente contenute delle affermazioni non credibili, si può cercare di "smontare" le affermazioni date per vedere se le componenti, che dovrebbero essere giudicate più facilmente, sono pure credibili o meno. Cioè si può passare dalla considerazione di certe affermazioni complesse alla considerazione anche di loro opportune componenti da cui dipende il loro significato, per vedere se nella totalità di questo più ampio insieme di affermazioni ce ne sono di non credibili.

Si noti anche che per provare la soddisfacibilità di un insieme di formule bisognerà arrivare, ad un certo punto, a costruire una realizzazione nella quale siano vere tutte le formule dell'insieme.

Una realizzazione in cui sono vere delle formule viene detta un **modello** di quelle formule.

Ma prima di arrivare al punto di dover costruire una realizzazione, si cercherà di ridurre la complessità delle formule per le quali si vuole esibire un modello. In effetti se si crede che certe formule più elaborate siano soddisfacibili, bisognerà credere che anche certe altre formule, dalle quali le prime sono ottenute, siano soddisfacibili, e può essere più facile dover esibire un modello di queste (che sarà eventualmente un modello anche dell'insieme di formule dato inizialmente se questo nuovo insieme è stato sviluppato opportunamente); sicché possono essere opportuni successivi passi di riduzione del problema prima di dover esibire un modello o convincersi che ciò non è possibile.

E' opportuno essere più precisi su quali formule, che entrano nella costruzione di una certa formula φ in un insieme Γ ipoteticamente ritenuto soddisfacibile, vanno pure ritenute vere in un'interpretazione che rende vere le formule di Γ, e possono essere aggiunte a Γ per ottenere un nuovo insieme Γ' ancora soddisfacibile come Γ. Con tali aggiunte, d'altra parte, la non soddisfacibilità di Γ' (come avviene, ad esempio, quando in Γ' dovessero esserci una formula e la sua negazione) implicherà la non soddisfacibilità di Γ.

Quali siano queste altre formule da aggiungere dipenderà dalla scrittura di φ. I casi che si possono presentare sono i seguenti: 0) φ è atomica, 1) φ è del tipo $\wedge\alpha\beta$, 2) φ è del tipo $\neg\alpha$, 3) φ è del tipo $\forall x\alpha$.

Nel caso 0) non si può ridurre ulteriormente l'analisi della formula data poiché non ci sono altre formule che concorrono alla sua costruzione.

Nel caso 1) è banale che la verità di $\wedge\alpha\beta$ in una realizzazione implica la verità sia di α che di β nella stessa realizzaazione, sicché se l'insieme Γ, che include $\wedge\alpha\beta$, è soddisfacibile dovrà esserlo anche l'insieme $\Gamma'=\Gamma\cup\{\alpha,\beta\}$. Ciò giustifica l'introduzione di una prima modalità d'analisi sintattica, e precisamente: se Γ è un insieme di formule cui appartiene una formula del tipo $\wedge\alpha\beta$, questa modalità d'analisi fa passare dall'insieme Γ all'insieme $\Gamma'=\Gamma\cup\{\alpha,\beta\}$.

Nel caso 2) l'ipotesi che $\neg\alpha$ sia vera in una certa realizzazione non ci permette di passare alla conseguente verità in una opportuna realizzazione anche di α, l'unica formula di cui al momento si dispone dalla quale possa essere stata costruita φ. L'idea allora è di andare a vedere come è stata scritta α, e si presentano i seguenti sottocasi: 2a) α è atomica e φ è una negazione di atomica, 2b) α è del tipo $\neg\beta$ e φ è del tipo $\neg\neg\beta$, 2c) α è del tipo $\forall x\beta$ e φ è del tipo $\neg\forall x\beta$, 2d) α è del tipo $\wedge\beta\gamma$ e φ è del tipo $\neg\wedge\beta\gamma$.

Nel caso 2a) la situazione è del tutto analoga a quella del caso 0): ora la sola formula che può concorrere alla costruzione della formula $\neg\alpha$ è α, ma questa non deve essere vera in una realizzazione che rende vere le formula di Γ, sicché non si sa quale altra formula considerare come sottoformula da rendere vera per una analisi della soddisfacibilità di $\neg\alpha$.

Nel caso 2b) è banale che la verità di $\neg\neg\beta$ in una realizzazione implica la verità di β nella stessa realizzazione, sicché se l'insieme Γ, che include $\neg\neg\beta$, è soddisfacibile dovrà esserlo anche l'insieme $\Gamma'=\Gamma\cup\{\beta\}$. Ciò giustifica l'introduzione di una seconda modalità d'analisi sintattica, e precisamente: se Γ è un insieme di formule cui appartiene una formula del tipo $\neg\neg\beta$, questa modalità d'analisi fa passare dall'insieme Γ all'insieme $\Gamma'=\Gamma\cup\{\beta\}$.

Nel caso 2c) si suppone che una formula del tipo $\neg\forall x\alpha$ appartenga all'insieme soddisfacibile di formule Γ. In questo caso la definizione base di verità di una formula coinvolge la semantica e non può essere utilizzata direttamente per elaborare una modalità d'analisi sintattica. Infatti una formula del tipo $\neg\forall x\alpha$ è vera in una realizzazione σ se esiste un elemento a dell'universo della realizzazione tale che la formula $\neg\alpha$ è vera nella realizzazione $\sigma(x/a)$. Tuttavia si può richiamare una abitudine del linguaggio naturale: dopo aver affermato che c'è un certo individuo che ha una una certa proprietà, ogniqualvolta lo si vuole menzionare non si continua a ripetere che c'è un individuo con quella certa proprietà e che è quello notato prima, ma si inventa un nome per lui e lo si indica mediante quel nome. Può darsi che nell'insieme di formule Γ ci sia una formula del tipo $\neg\alpha(x/t)$, per un certo termine t, che sarebbe già il nome di un individuo con le caratteristiche volute, senza la necessità di inventare un nuovo nome, e nell'insieme Γ ci sarebbe già l'analisi della formula $\neg\forall x\alpha$. Attenzione però che, se non si è nel caso fortunato appena descritto, e bisogna inventare un nome, il nome inventato per quell'individuo non deve essere già stato usato per indicare un altro individuo b (eventualmente mediante una invenzione precedente dello stesso tipo di quella presente) perché non è detto che quell'altro individuo b sia uno che ha la proprietà di rendere vera la formula $\neg\alpha$ nella realizzazione $\sigma(x/b)$.Per rispettare la precauzione appena osservata, si può decidere di utilizzare un nome nuovo per indicare l'elemento a, cioè un nuovo simbolo per costante, scelto apposta per la formula $\neg\forall x\alpha$, non occorrente nel linguaggio formale fin qui usato (quello di Γ) se la formula non è già stata analizzata. Per tale simbolo per costante si userà la scrittura $c_{\neg\forall x\alpha}$. Allora la verità della formula $\neg\forall x\alpha$ in una realizzazione σ ha per conseguenza la verità della formula $\neg\alpha(x/c_{\neg\forall x\alpha})$ nella realizzazione σ' che espande σ interpretando il nuovo simbolo per costante $c_{\neg\forall x\alpha}$ in a. Ciò giustifica l'introduzione di una terza modalità d'analisi sintattica, e precisamente: se Γ è un insieme di formule cui appartiene una formula del tipo $\neg\forall x\alpha$ e $c_{\neg\forall x\alpha}$ è un simbolo di costante non occorrente in Γ e specificamente scelto per la formula $\neg\forall x\alpha$, questa modalità d'analisi fa passare dall'insieme Γ all'insieme $\Gamma' = \Gamma\cup\{\neg\alpha(x/c_{\neg\forall x\alpha})\}$. Si noti che nella esplicitazione della modalità d'analisi non è rimasto alcun riferimento al fatto che una formula del tipo $\neg\alpha(x/t)$ sia presente o meno in Γ. Di fatto, se ci fosse con un termine t diverso da $c_{\neg\forall x\alpha}$, la modalità d'analisi proposta potrebbe introdurre un secondo nome per uno stesso elemento (il che non provoca alcuna difficoltà); mentre se ci fosse proprio con t che è $c_{\neg\forall x\alpha}$, per ottenere Γ' si aggiungerebbe a Γ una formula che gli appartiene e si avrebbe

$\Gamma'=\Gamma$; infine se non ci fosse in Γ allora è proprio il caso di aggiungerla: così in ogni caso la modalità d'analisi espressa va bene.

Riserviamo a dopo il caso 2d), e consideriamo ora il caso 3)

Nel caso 3) si suppone che una formula del tipo $\forall x\alpha$ appartenga all'insieme soddisfacibile Γ, sicché $\forall x\alpha$ sarà vera in una opportuna realizzazione σ. La definizione di verità di una formula del tipo $\forall x\alpha$ porta alla verità di α in ciascuna delle realizzazioni del tipo $\sigma(x/a)$ al variare di a nell'universo della realizzazione σ. Ma questa definizione coinvolge nozioni semantiche e suggerisce poco per una regola sintattica. Tuttavia se a è l'interpretazione mediante σ di un termine t ($a=t^{\sigma}$), sappiamo che $\alpha^{\sigma(x/a)}=\alpha^{\sigma(x/t^{\sigma})}=\alpha(x/t)^{\sigma}$. Insomma se una formula è vera per ogni interpretazione di una variabile è vera anche la formula ottenuta mediante sostituzione di un termine a quella variabile, cioè se qualche affermazione è vera per tutti è vera anche per un certo individuo. Certo che la formula $\alpha(x/t)$ dice molto meno della formula $\forall x\alpha$, ma la sua soddisfacibilità segue dalla soddisfacibilità della seconda. Ciò giustifica l'introduzione di una quarta modalità d'analisi sintattica, e precisamente: se Γ è un insieme di formule cui appartiene una formula del tipo $\forall x\alpha$ e t è un termine qualsiasi, questa modalità d'analisi fa passare dall'insieme Γ all'insieme $\Gamma'=\Gamma\cup\{\alpha(x/t)\}$. Anche se l'analisi esposta è corretta, se ne potrebbe suggerire un'altra che colga maggiormente quanto segue dalla soddisfacibilità di $\forall x\alpha$, e cioè la modalità d'analisi che fa passare dall'insieme Γ all'insieme $\Gamma'=\Gamma\cup\{\alpha(x/t)$: t è un termine di $\mathfrak{L}\}$ dove $\mathfrak{L}$ è il linguaggio di Γ. Tuttavia neppure così si coglie appieno quanto comporta la soddisfacibilità di $\forall x\alpha$ poiché non è detto che ogni elemento dell'universo di σ sia l'interpretazione di un termine. Di più, come si è visto al punto 2c), c'è la necessità di considerare simboli per costante mai utilizzati prima, sicché l'insieme dei termini non potrà essere definitivo dal momento che il linguaggio potrà essere successivamente arricchito.

Rimane il caso 2d). In questo caso si suppone che una formula del tipo $\neg\wedge\alpha\beta$ appartenga all'insieme soddisfacibile di formule Γ. Ora l'analisi della soddisfacibilità di questa formula porta a due situazioni diverse. Infatti, se la formula $\neg\wedge\alpha\beta$ è vera in una realizzazione σ, nella stessa realizzazione o è vera $\neg\alpha$ o è vera $\neg\beta$ (eventualmente entrambe), ma non si può dire a priori quale delle due, cioè la soddisfacibilità della formula $\neg\wedge\alpha\beta$ implica anche o quella della formula $\neg\alpha$, o quella della formula $\neg\beta$. Così si dovrà proseguire l'analisi considerando separatamente le due possibilità. Ciò giustifica l'introduzione di una quinta modalità d'analisi sintattica, e precisamente: se Γ è un insieme di formule cui appartiene una formula del tipo $\neg\wedge\alpha\beta$, questa modalità d'analisi fa passare dall'insieme Γ a due insiemi $\Gamma'=\Gamma\cup\{\neg\alpha\}$ e $\Gamma''=\Gamma\cup\{\neg\beta\}$ per ciascuno dei quali l'analisi proseguirà separatamente. Questa è l'unica modalità d'analisi che porta alla considerazione separata di più di un insieme di formule.

Si noti che le formule, che sono state via via aggiunte per analizzare un insieme di formule dato, sono o sottoformule o negazioni di sottoformule delle formule dell'insieme. Si denomineranno **sottoformule generalizzate** di una formula φ sia le sottoformule che le negazioni di sottoformule di φ.

Poiché si sta considerando un linguaggio in cui l'uguaglianza è un simbolo logico, non solo la presenza in un insieme di formule di una formula e della sua negazione non è accettabile se si vuole che l'insieme dato sia soddisfacibile, ma neppure di una singola formula del tipo $\neg t=t$. Invece di formulare un nuovo criterio di non accettabilità di un insieme di formule come soddisfacibile, ci si può ricondurre al criterio di rifiuto già espresso aggiungendo ad un insieme di formule Γ le formule del tipo $t=t$. Di fatto, se un insieme di formule Γ è soddisfacibile, allora lo è anche l'insieme di formule $\Gamma\cup\{t=t\}$, mentre, se in Γ c'è la formula $\neg t=t$, allora in $\Gamma\cup\{t=t\}$ c'è una formula e la sua negazione. Ciò giustifica l'introduzione di una sesta modalità d'analisi sintattica, e precisamente: se Γ è un insieme di formule e t un termine, questa modalità d'analisi fa passare dall'insieme Γ all'insieme $\Gamma'=\Gamma\cup\{t=t\}$.

C'è una ulteriore situazione da considerare nel caso di linguaggi in cui l'uguaglianza è un simbolo logico. Può succedere che in un insieme di formule, pur non occorrendo alcuna formula assieme alla sua negazione, occorrano sia una formula del tipo $t_1=t_2$ che le formule $\alpha(x/t_1)$ e $\neg\alpha(t_1/t_2)$ (con questa ultima scrittura si vuol significare che alcune (da nessuna a tutte) occorrenze libere della variabile x in α sono state sostituite dal termine t_1

mini non deve provocare catture di variabili). Anche in questa situazione l'insieme di formule non è soddisfacibile, anche se non ci sono una formula e la sua negazione. Ancora ci si può ricondurre alla presenza di una formula e della sua negazione se si conviene di aggiungere la formula $\alpha(t_1/t_2)$ all'insieme di formule dato. Si noti che se in un insieme soddisfacibile di formule Γ occorrono sia la formula $t_1=t_2$ che la formula $\alpha(x/t_1)$ allora anche l'insieme $\Gamma\cup\alpha(t_1/t_2)$ è soddisfacibile. Ciò giustifica l'introduzione di una settima modalità d'analisi sintattica, e precisamente: se Γ è un insieme di formule in cui occorrono sia la formula $t_1=t_2$ che la formula $\alpha(x/t_1)$, questa modalità d'analisi fa passare dall'insieme Γ all'insieme $\Gamma'=\Gamma\cup\{\alpha(t_1/t_2)\}$.

Di fatto, il più delle volte, in un insieme Γ di formule non compare una sola formula, e tutte vanno analizzate. Il voler analizzare tante formule assieme comporta delle ulteriori difficoltà per l'analisi di certi tipi di formule.

Si è già visto che per le formule del tipo $\neg\forall x\alpha$ ci si deve inventare un nuovo nome, ma, se le formule di questo tipo sono molte, bisogna inventarne di diversi per ciascuna formula analizzata per rispettare il fatto che, dal punto di vista semantico, gli elementi dell'universo, in cui interpretare le variabili quantificate esistenzialmente perché le varie formule siano vere in una realizzazione, possono essere tutti diversi, e diversi dovranno essere i loro nomi.

Le formule del tipo $\neg\wedge\alpha\beta$ sono le uniche che portano a due insiemi da analizzare uno con l'aggiunta di una alternativa, l'altro con l'altra, sicché sarà naturale considerare questa analisi separatamente dalle altre. Se in un insieme Γ ci sono più formule di questo tipo, ma in numero finito, ad esempio due $\neg\wedge\alpha_1\beta_1$ e $\neg\wedge\alpha_2\beta_2$, potrebbero essere analizzate in successione portando al seguente sviluppo: dall'insieme Γ a due insiemi $\Gamma'=\Gamma\cup\{\neg\alpha_1\}$ e $\Gamma''=\Gamma\cup\{\neg\beta_1\}$ e poi da ciascuno di questi ai quattro insiemi $\Gamma'_a=\Gamma'\cup\{\neg\alpha_2\}=\Gamma\cup\{\neg\alpha_1,\neg\alpha_2\}$, $\Gamma'_b=\Gamma'\cup\{\neg\beta_2\}=\Gamma\cup\{\neg\alpha_1,\neg\beta_2\}$, $\Gamma''_a=\Gamma''\cup\{\neg\alpha_2\}=\Gamma\cup\{\neg\beta_1,\neg\alpha_2\}$ e $\Gamma''_b=\Gamma'\cup\{\neg\beta_2\}=\Gamma\cup\{\neg\beta_1,\neg\beta_2\}$. Si vede che i quattro insiemi sono ottenuti in corrispondenza ai modi di scegliere l'una o l'altra alternativa da ciascuna delle due formule considerate. Così per analizzare tutte le formule di un insieme di formule del tipo $\neg\wedge\alpha\beta$ bisognerà considerare tutti gli insiemi che si ottengono aggiungendo in tutti i vari modi possibili o l'una o l'altra alternativa per ciascuna delle formule considerate.

Allora diventa naturale introdurre le due seguenti regole sintattiche, che riassumono tutte le precedenti modalità d'analisi.

Regola 1 (n)

Sia Γ un insieme di formule. L'applicazione della regola 1 a Γ, relativamente ad un numero naturale n, brevemente la regola $R_{1,n}$, dà un nuovo insieme Γ' di formule così definito:

$\Gamma'=\Gamma\cup\{\varphi\text{: }\neg\neg\varphi\in\Gamma\}\cup\{\varphi_1,\varphi_2\text{: }\wedge\varphi_1\varphi_2\in\Gamma\}\cup\{\varphi(x/t)\text{: }\forall x\varphi\in\Gamma$ e t è un termine occorre in qualche formula di Γ (anche come sottotermine di un termine)$\}\cup\{\neg\varphi(x/c_{\neg\forall x\varphi})\text{: }\neg\forall x\varphi\in\Gamma\}\cup\{\varphi(t_1/t_2)\text{: }\varphi(x/t_1)\in\Gamma$ e $t_1=t_2\in\Gamma\}\cup$ {t=t: t è un termine con simboli di costante e simboli di funzione occorrenti in Γ, variabili entro v_n, a profondità al più n}, dove, per ogni formula del tipo $\neg\forall x\varphi$ occorrente in Γ, $c_{\neg\forall x\varphi}$ è un simbolo di costante non occorrente in Γ (a meno che la formula $\neg\varphi(x/c_{\neg\forall x\varphi})$ occorra già in Γ) e tali simboli per costanti sono tutti tra loro a due a due diversi (detto altrimenti c'è una biiettività tra le formule del tipo $\neg\forall x\varphi$ occorrenti in Γ e i nuovi simboli per costante $c_{\neg\forall x\varphi}$).

Qui con $\varphi(t_1/t_2)$ si intende, come già detto, la sostituzione in $\varphi(x/t_1)$ del termine t_2 al posto di alcune occorrenze del termine t_1.

Si noti che se Γ è finito, allora anche Γ' è finito, poiche', essendo le formule di lunghezza finita, sono finiti sia il numero dei simboli che quello dei termini che occorrono nelle formule dell'insieme. Appunto per ottenere questo risultato sono state introdotte le limitazioni precisate sui termini delle formule del tipo t=t aggiunte dalla regola, che, per questo, dipende da n. Infatti, se Γ è finito, saranno finiti pure sia il numero di simboli di costante, che il numero di simboli di funzione in esso contenuti, che il numero delle variabili se queste si fermano all'n-eima; tuttavia il numero dei termini costruibili con questi simboli, in numero finito, sarebbe infinito se non ci fosse l'ulteriore limitazione sulla profondità dei termini. La **profondità di un termine** è definita per induzione sulla costruzione del termine come segue: se il termine è un simbolo di costante o una variabile la sua profondità è zero, altrimenti il termine è del tipo un simbolo di funzione m-ario seguito da m termini e la sua profondità è uno più del massimo delle profondità dei termini che seguono il simbolo di funzione. La profondità coglie il numero di iterazioni del passo induttivo nella costruzione di un termine. I termini costruiti con un numero finito di simboli iterando il passaggio induttivo della costruzione dei termini un numero finito di volte sono in numero finito; e ciò completa la giustificazione dell'osservazione che la regola $R_{1,n}$ preserva la finitezza.

Si osservi inoltre che, se $\mathfrak{L}$ è il linguaggio di Γ, il linguaggio $\mathfrak{L}'$ di Γ' si ottiene da $\mathfrak{L}$ aggiungendo i nuovi simboli per constante $c_{\neg\forall x\varphi}$, uno per ciascuna formula del tipo $\neg\forall x\varphi$ di Γ.

Regola 2

Sia Γ un insieme di formule. Sia $\mathfrak{F}$ l'insieme delle funzioni che ad ogni formula del tipo $\neg\wedge\varphi_1\varphi_2$ in Γ associano o $\neg\varphi_1$ o $\neg\varphi_2$. L'applicazione della regola 2, brevemente R_2, a Γ dà tanti insiemi di formule Γ_f quante sono le funzioni $f\in\mathfrak{F}$ così definiti:

$\Gamma_f = \Gamma\cup\{f(\neg\wedge\varphi_1\varphi_2): \neg\wedge\varphi_1\varphi_2\in\Gamma\}$.

Si osservi che se Γ è finito allora anche $\mathfrak{F}$ è finito, come pure ciascun Γ_f.

Lemma 1. Se Γ è soddisfacibile, allora lo è anche l'insieme Γ' ottenuto da Γ applicandogli la regola $R_{1,n}$ qualunque sia il numero naturale n.

Dimostrazione. Sia σ una realizzazione che rende vere le formule di Γ. Sia C l'insieme dei simboli di costante $c_{\neg\forall x\varphi}$ non nel linguaggio $\mathfrak{L}$ dell'insieme dato, ma nel linguaggio, diciamo $\mathfrak{L}'$, di Γ'. La regola $R_{1,n}$ introduce questi simboli per costante $c_{\neg\forall x\varphi}$ nelle formule $\neg\varphi(x/c_{\neg\forall x\varphi})$ di Γ' in corrispondenza delle formule $\neg\forall x\varphi$ di Γ. Si espanda la $\mathfrak{L}$-realizzazione σ interpretando ciascun nuovo simbolo di costante $c_{\neg\forall x\varphi}$ occorrente in Γ' in una formula del tipo $\neg\varphi(x/c_{\neg\forall x\varphi})$ in un elemento $a_{\neg\forall x\varphi}$ dell'universo di σ tale che la formula $\neg\varphi$ sia vera nella realizzazione $\sigma(x/a_{\neg\forall x\varphi})$ (per ciascuna formula del tipo $\neg\forall x\varphi$ in Γ tale elemento deve esistere poiché ciascuna formula $\neg\forall x\varphi$ è vera nella realizzazione σ). Questa nuova $\mathfrak{L}'$-realizzazione, chiamiamola σ', rende vere le formula di Γ'. Infatti quelle in cui non occorrono nuovi simboli di costanti sono vere nella realizzazione σ' se e solo se sono vere nella realizzazione σ, e ciò segue dal fatto che in σ sono vere le formule di Γ ed anche quelle ulteriori di Γ' senza nuovi simboli per costante, come si è già visto considerando la modalità d'analisi con l'aggiunta di una sola formula nei vari casi previsti dalla regola $R_{1,n}$. Inoltre σ' è stata ottenuta espandendo σ proprio in modo che siano vere le formule di Γ' con nuovi simboli per costante, come si è appena visto.

Lemma 2. Se Γ è soddisfacibile, allora esiste una funzione f, appartenente ad $\mathfrak{F}$, tale che il particolare insieme Γ_f, ottenuto da Γ applicandogli la regola R_2 utilizzando la funzione f, è soddisfacibile.

Dimostrazione. Sia σ una realizzazione che rende vere le formule di Γ. In particolare σ rende vere le formule di Γ del tipo $\neg\wedge\alpha\beta$. Pertanto, o $\neg\alpha^\sigma$=V o $\neg\beta^\sigma$=V. Si consideri ora la funzione g con dominio l'insieme delle formule del tipo $\neg\wedge\alpha\beta$ occorrenti in Γ tale che $g(\neg\wedge\alpha\beta)=\neg\alpha$ se $\neg\alpha^\sigma$=V e $g(\neg\wedge\alpha\beta)=\neg\beta$ altrimenti (in questo caso $\neg\beta^\sigma$=V). La funzione g è una di quelle che la regola R_2 usa per individuare gli insiemi che si ottengono applicando la regola all'insieme Γ. Tutte le formule dell'insieme Γ_g che la regola R_2 fa ottenere quando applicata all'insieme Γ in corrispondenza della funzione g sono vere nella realizzazione σ. Così almeno uno degli insiemi Γ_f è soddisfacibile (almeno quello che si ottiene prendendo come indice f la funzione g prima definita).

Un insieme di formule Γ si dice **chiuso** se contiene una formula e la sua negazione, altrimenti si dice **aperto**.

Dopo aver introdotto delle regole che fanno passare dall'analisi di certi insiemi di formule ad insiemi di formule con formule meno complesse di quelle originariamente date (loro sottoformule generalizzate), bisogna stabilire un modo di proseguire l'analisi della soddisfacibilità di un certo insieme di formule stabilendo come e fino a quando iterare il processo avviato. Per descrivere questa costruzione si farà uso della nozione matematica di albero.

Un **albero** è una struttura costituita da un insieme non vuoto, i cui elementi vengono detti **nodi**, e da una relazione d'ordine su questo (si usa dire che è un insieme ordinato) (l'ordine in generale sarà parzialle), che ha le seguenti proprietà:

a) esiste un unico nodo, detto **radice** dell'albero, che non ha predecessori, mentre ogni altro nodo ha esattamente un predecessore immediato;

b) ad ogni nodo è associato un **livello**, che sarà detto anche **profondità** del nodo, che è un numero naturale e precisamente 0 per la sola radice e n+1 per gli immediati successori di un nodo a livello n.

Si dirà **foglia** di un albero un nodo senza successori, **ramo** un sottinsieme massimale totalmente ordinato (ogni ramo include la radice), e profondità di un albero l'estremo superiore delle profondità dei nodi.

Si dirà **profondità di un albero** l'estremo superiore delle profondità delle foglie dell'albero. Si noti che non sempre questo estremo superiore è un numero naturale, ma, a volte, è l'estremo superiore dell'insieme dei numeri naturali (che non è un numero naturale) che è il più piccolo cardinale infinito, indicato con $\aleph_0$.

Si avrà occasione di considerare vari alberi che sono uno **estensione finale** di un altro. Dicendo che un albero T'' è estensione finale di un altro albero T' si intende dire che T'' contiene T', che la relazione d'ordine su T'' estende la relazione d'ordine su T', e che i nodi di T'' che non sono in T' seguono, nell'ordine di T'', i nodi che erano foglie in T'.

Gli alberi che si considereranno avranno come nodi insiemi di formule, e saranno detti anche **alberi di confutazione** perché mirano ad esaminare in modo sintattico se un insieme di formule non è soddisfacibile (è confutabile) o meno.

Esplicitato il concetto di albero, si può proseguire nell'organizzazione dell'analisi della soddisfacibilità di un insieme di formule che sarà precisata nella seguente

STRATEGIA

Sia dato un insieme di formule Γ in un linguaggio $\mathfrak{L}$.

Si costruisce una successione di alberi $T_0, T_1, ..., T_n, ...$ nel modo seguente:

a) T_0 è l'albero con la sola radice costituita dall'insieme Γ.

b) Se n è pari, l'albero T_{n+1} si ottiene dall'albero T_n aggiungendo come immediato successore di ciascuna foglia aperta ν di T_n un nuovo nodo ottenuto da ν applicandogli la regola 1 (n/2).

c) Se n è dispari, l'albero T_{n+1} si ottiene dall'albero T_n aggiungendo come immediati successori di ciascuna foglia aperta ν di T_n i nuovi nodi ottenuti da ν applicandogli la regola 2.

Si noti che, se l'albero T_i, con i numero naturale, ha almeno una foglia aperta, allora la sua profondità è esattamente i, altrimenti minore od uguale ad i. Infatti, nel passare da un albero al prosssimo, la profondità dell'albero aumenta esattamente di uno, se ci sono foglie aperte, altrimenti non aumenta.

Si noti ancora che, quando n è pari e si apllica la regola 1 (n/2) per passare dall'albero T_n all'albero T_{n+1}, il linguaggio può essere arricchito per l'introduzione di nuovi simboli per costante, ma questi sono al più tanti quanti le formule del tipo $\neg\forall$ nel linguaggio, lo si chiami $\mathfrak{L}_{n/2}$, dell'albero T_n. Poiché le formule sono tante quante la cardinalità del loro linguaggio, il linguaggio $\mathfrak{L}_{n/2+1}$ ottentuto per l'albero T_{n+1} avrà cardinalità uguale a $|\mathfrak{L}_{n/2}+\{c_{\neg\forall x\varphi}: \neg\forall x\varphi$ occorre in una foglia aperta di $T_n\}| = |\mathfrak{L}_{n/2}|$ che sarà uguale a $|\mathfrak{L}|$ dal momento che la cardinalità dei linguaggi non cambia dal passare da un albero

18. CARATTERISTICHE DEL METODO DEGLI ALBERI DI CONFUTAZIONE.

E' qui opportuno fermarsi a riflettere su quanto abbiamo ottenuto.
Anzitutto le regole appena introdotte sono regole puramente sintattiche, nel senso che, se si trovano certe scritture, si è autorizzati ad aggiungere altre scritture di un certo tipo, indipendentemente dal significato che hanno. Ma sono anche regole buone nel senso che, se sono state applicate ad un albero per estenderlo ad un altro e se il primo ha una foglia soddisfacibile, allora anche il secondo ha almeno una foglia soddisfacibile che segue immediatamente quella dell'albero precedente. Così, se un primo insieme di formule era soddisfacibile, anche quelli che le regole autorizzano a scrivere dopo lungo almeno un ramo saranno soddisfacibili. Sono regole non pensate a caso ma che ricalcano e che vanno ad analizzare di volta in volta il significato dei connettivi o dei quantificatori o dell'uguale. Usando queste regole si costruiscono degli alberi. Può darsi che tutte le foglie di un certo albero della successione siano chiuse, ma, a volte, non succede così.
Se tutte le foglie di un albero sono chiuse, l'insieme di formule analizzato non è soddisfacibile perché, come si è visto, le regole 1 e 2 preservano la soddisfacibilità. Infatti, se il nodo iniziale fosse stato soddisfacibile, ossia vero in qualche modello, sarebbe soddisfacibile anche l'insieme di tutte le formule (via via introdotte) di almeno un ramo. Se in ogni foglia di un albero della successione compaiono una formula e la sua negazione, ogni foglia non può essere soddisfatta, e la contraddizione raggiunta mostra che non è soddisfacibile l'insieme di formule iniziale.
E se nessun albero della successione si chiude, cioè se ognuno ha foglie che non sono chiuse?
In tal caso, almeno agli stadi pari, gli alberi sono estensioni finali proprie degli alberi precedenti. Così si può considerare l'albero T^{∞} unione della successione di alberi T_i, con i numero naturale, $T^{\infty}=\cup\{T_i$: i e' un numero naturale$\}$. Le formule occorrenti in T^{∞} saranno tutte nel linguaggio, chiamiamolo $\mathfrak{L}^{\infty}$, unione dei linguaggi dei vari alberi della successione, e, poiché tutti questi linguaggi hanno la cardinalità del linguaggio della radice, anche $\mathfrak{L}^{\infty}$ avrà tale cardinalità.
T^{∞} sarà un albero con nodi di profondità maggiore di ogni numero naturale prefissato. Inoltre se l'insieme Γ da cui si parte per la costruzione della successione degli alberi è soddisfacibile, proprio in virtù dei lemmi dimostrati affermanti che le regole 1 e 2 preservano la soddisfacibilità, T^{∞} avrà un ramo infinito costituito da nodi tutti soddisfacibili. Quindi tutti i nodi di quel ramo saranno aperti, non solo ma anche l'insieme di tutte le formule occorrenti nei nodi di quel ramo sarà aperto: altrimenti tale insieme conterrebbe una formula e la sua negazione, e una di queste sarebbe in un nodo e l'altra in un altro nodo e uno dei due nodi conterrebbe l'altro (essendo nello stesso ramo) sicché uno dei due sarebbe già chiuso, contro l'ipotesi di aver considerato un ramo i cui nodi sono tutti soddisfacibili.
Così si è pervenuti al seguente risultato centrale:

Teorema di validità. Se l'insieme di formule Γ è soddisfacibile, l'albero T^{∞} costruito a partire da Γ ha almeno un ramo infinito aperto. Equivalentemente (forma contronominale), se T^{∞} ha tutti i rami chiusi (e dunque finiti) allora Γ non è soddisfacibile.

Si noti che, anche se T^{∞} ha tutti i rami chiusi e finiti, per quanto si può dire al momento, potrebbe essere che, per ogni numero naturale i, l'albero T_i fosse aperto. Infatti i vari rami chiusi e finiti di T_i potrebbero essere in quantità infinita e l'insieme delle loro lunghezze potrebbe non avere per estremo superiore un numero naturale (la profondità di T^{∞} sarebbe $\aleph_0$), come invece dovrebbe avere se T_i fosse chiuso (la profondità di T_i è al più i) per un numero naturale opportuno i.

Nel caso che T^{∞} abbia almeno un ramo che non contiene alcuna formula con la sua negazione si vorrebbe mostrare che l'insieme delle formule di partenza e delle sottoformule introdotte nell'analisi è soddisfacibile. Per fare ciò bisogna esibire una realizzazione in cui le formule dell'insieme sono vere.

Prima di esibire una tale interpretazione, cerchiamo di cogliere alcuni aspetti dell'insieme delle formule che occorrono in un ramo aperto di T^{∞}.

Ovviamente in tale insieme non possono esserci una formula e la sua negazione, altrimenti, come si è già visto, una occorrerebbe in un nodo e l'altra in un altro nodo e uno dei due nodi contiene l'altro, sicché un nodo sarebbe chiuso, contro l'ipotesi che il ramo sia aperto.

Inoltre se nel ramo c'è una formula né atomica né negazione di atomica, essa occorrerà in un certo nodo, e in un nodo successivo, ma sempre nel ramo, occorrerà l'analisi di quella formula secondo le regole che abbiamo già visto. Così l'insieme delle formule di un ramo aperto di T^{∞} sarà chiuso rispetto all'operazione di contenere anche le sottoformule generalizzate di una formula dell'insieme precisate dalle regole indicate. Così un tale insieme di formule rispetta le clausole precisate nella seguente definizione di insieme di Hintikka.

Un insieme Σ di formule è detto un insieme di Hintikka se soddisfa le seguenti condizioni:

0) per ogni formula φ, o $\varphi\notin\Sigma$ o $\neg\varphi\notin\Sigma$;
1) se $\neg\neg\varphi\in\Sigma$ allora $\varphi\in\Sigma$;
2) se $\wedge\varphi_1\varphi_2\in\Sigma$ allora sia $\varphi_1\in\Sigma$ che $\varphi_2\in\Sigma$;
3) se $\neg\wedge\varphi_1\varphi_2\in\Sigma$ allora o $\neg\varphi_1\in\Sigma$ o $\neg\varphi_2\in\Sigma$;
4) se $\forall x\varphi\in\Sigma$ allora per ogni termine t del linguaggio $\varphi(x/t)\in\Sigma$;
5) se $\neg\forall x\varphi\in\Sigma$ allora c'è un termine t del linguaggio per cui $\neg\varphi(x/t)\in\Sigma$;
6) per ogni termine t del linguaggio minimo di Σ, $t=t\in\Sigma$; (per linguaggio minimo di un insieme di formule si intende il linguaggio che ha per simboli propri solo simboli che occorrono nell'insieme di formule)
7) se $t_1=t_2\in\Sigma$ e $\alpha(x/t_1)\in\Sigma$ allora anche $\alpha(t_1/t_2)\in\Sigma$, con questa scrittura si vuol indicare la formula ottenuta sostituendo alcune (da nessuna a tutte) occorrenze libere della variabile x in α con il termine t_1 mentre le altre sono state sostituite dal termine t_2; le sostituzioni di entrambi i termini non devono provocare catture di variabili

A questo punto abbiamo esplicitato con l'analisi ciò che era implicito nell'insieme di formule Γ ottenendo un albero che abbiamo indicato con T^{∞}. Inoltre, nell'ipotesi che T^{∞} abbia un ramo aperto, abbiamo visto che le formule che occorrono in esso costituiscono un insieme di Hintikka. Avendo già visto che se tutti i rami di T^{∞} sono chiusi allora Γ non è soddisfacibile, per ottenere il risultato sperato, e cioè che l'analisi sintattica proposta (ovvero il controllare se T^{∞} ha o meno rami aperti) sappia riconoscere esattamente quando l'insieme di formule Γ è soddisfacibile, non rimane che mostrare che se in T^{∞} c'è un ramo aperto, che è un insieme di Hintikka, allora l'insieme delle formule di quel ramo (e anche Γ) è soddisfacibile. Questo risultato seguirebbe ovviamente dall'affermazione che ogni insieme di Hintikka è soddisfacibile.

Per mostrare che un insieme di formule è soddisfacibile, bisogna esibire una realizzazione che renda vere tutte le formule dell'insieme; e per esibire una realizzazione bisogna indicare quali sono l'universo, le relazioni, le funzioni e le costanti della struttura su cui si appoggia, oltre l'attribuzione di valori alle variabili della realizzazione.

Non avendo a disposizione alcuna ulteriore informazione sulla realizzazione da scegliere per mostrare che un insieme di Hintikka è soddisfacibile, e seguendo l'idea che dal racconto udito uno cerca di farsi un'idea del mondo descritto, si può sostanzialmente identificare l'interpretazione di un termine con il termine stesso e l'interpretazione di un predicato con l'insieme delle n-uple (n arietà del predicato) ordinate di individui (cioè di termini) che l'insieme di Hintikka dichiara in relazione in virtù delle presenza in esso della formula atomica asserente ciò, cioè della formula atomica iniziante con quel predicato seguito da quei termini che verranno interpretati in sè stessi. In sintesi, si cerca una interpretazione costruita a partire dal linguaggio e da quanto dicono le formule dell'insieme di Hintikka dato. Poiché intendiamo usare linguaggi in cui = sia un simbolo logico, non è sufficiente l'interpretazione di un termine in sè stesso ma nella classe di termini che l'insieme di formule dichiarerà essere uguali, cioè metteremo nella stessa classe i termini t_1 e t_2 se e solo se la formula $t_1=t_2$ appartiene all'insieme di Hintikka dato.

19. SODDISFACIBILITA' DEGLI INSIEMI DI HINTIKKA

Vogliamo esplicitare quanto preannunciato nel seguente

TEOREMA. Se Σ è un insieme di formule che è un insieme di Hintikka allora Σ è soddisfacibile.

DIMOSTRAZIONE. Più precisamente dimostreremo che tutte le formule di un insieme di Hintikka sono vere nella realizzazione legata al linguaggio cui prima si faceva cenno.

Iniziamo con il precisare tale interpretazione.

Sia $\mathfrak{L}$ il linguaggio delle formule dell'insieme di Hintikka Σ.

Diremo che due termini t_1 e t_2 sono nella relazione ~ tra termini, e scriveremo $t_1{\sim}t_2$, se la formula $t_1=t_2$ appartiene a Σ.

Anzitutto dimostriamo che ~ è una relazione di equivalenza.

Sicuramente ~ è una relazione riflessiva poiché per la clausola 6) della definizione di insieme di Hintikka per ogni termine t la formula t=t appartiene a Σ. Inoltre se $t_1{\sim}t_2$ e $t_2{\sim}t_3$, cioè se $t_1=t_2$ e $t_2=t_3$ appartengono a Σ, allora, per la clausola 7) della definizione di insieme di Hintikka, considerando $t_1=t_2$ come $\alpha(t_2)$, e l'uguaglianza $t_2=t_3$, formule appartenenti entrambe a Σ, si ha che anche $\alpha(t_2/t_3)$, cioè $t_1=t_3$, appartiene a Σ, sicché $t_1{\sim}t_3$ e la relazione ~ è transitiva. Infine se $t_1{\sim}t_2$, cioè se $t_1=t_2$ appartiene a Σ, allora, ancora per la clausola 7) della definizione di insieme di Hintikka, considerando $t_1=t_1$ come $\alpha(t_1)$, e l'uguaglianza $t_1=t_2$, formule appartenenti entrambe a Σ, si ha che anche $t_2=t_1$, che è del tipo $\alpha(t_1/t_2)$, appartiene a Σ, sicché $t_2{\sim}t_1$ e la relazione ~ è simmetrica.

Si noti che la clausola 6) non è strettamente necessaria: essa serve per mostrare la riflessività della relazione ~; tuttavia se ne può fare a meno se la relazione tra termini viene definita in un modo leggermente diverso, e precisamente dichiarando che due termini t_1 e t_2 sono nella relazione ~ non solo quando la formula $t_1=t_2$ è nell'insieme di Hintikka, ma anche quando t_1 e t_2 sono occorrenze dello stesso termine.

Dopo aver dimostrato che ~ è una relazione di equivalenza, per ogni termine t del linguaggio si può considerare la classe di equivalenza $t{\sim}=\{t': t'$ è un termine e $t{\sim}t'\}$. Si definisce come universo della struttura che si utilizzerà per definire la realizzazione che interessa, l'insieme $A=\{t{\sim}$: t è un termine$\}$.

Ora si cercherà di interpretare ogni predicato e ogni simbolo di funzione di $\mathfrak{L}$ in una opportuna relazione o funzione, rispettivamente, sull'insieme A della dovuta arietà.

Sia P un predicato n-ario di $\mathfrak{L}$. Si definisca la corrispondente relazione R_P nel modo seguente: $R_P=\{(t_1{\sim},...,t_n{\sim}): Pt_1...t_n$ appartiene a $\Sigma\}$. Bisogna far vedere che questa è una buona definizione nel senso che è indipendente dalla scelta di ciascuno dei $t_1...t_n$ nelle corrispondenti classi $t_1{\sim},...,t_n{\sim}$. Di fatto se $t'_1...t'_n$ sono termini che pure appartengono rispettivamente alle classi $t_1{\sim},..., t_n{\sim}$, cioè se $t_1=t'_1$ e ... e $t_n=t'_n$ sono formule di Σ, e se $Pt_1...t_n$ appartiene a Σ, allora anche $Pt'_1...t'_n$ appartiene a Σ, come si vede facilmente applicando n volte quanto previsto dalla clausola 7) della definizione di insieme di Hintikka a partire dalla formula $Pt_1...t_n$ di Σ. Così la definizione di Rp non dipende dai rappresentanti scelti nelle singole classi $t_1{\sim}...t_n{\sim}$ e la definizione è buona.

Analogamente sia f un simbolo di funzione n-ario di $\mathfrak{L}$. Si definisca la corrispondente funzione F_f nel modo seguente: $F_f(t_1{\sim}...t_n{\sim})=(ft_1...t_n){\sim}$. Ancora bisogna far vedere che questa è una buona definizione nel senso che è indipendente dalla scelta di ciascuno dei $t_1...t_n$ nelle corrispondenti classi $t_1{\sim},...,t_n{\sim}$. Di fatto se $t'_1...t'_n$ sono termini che pure appartengono rispettivamente alle classi $t_1{\sim},..., t_n{\sim}$, cioè se $t_1=t'_1$ e ... e $t_n=t'_n$ sono formule di Σ, allora anche la formula $ft_1...t_n=ft'_1...t'_n$ appartiene a Σ, come si vede facilmente applicando n volte quanto previsto dalla clausola 7) della definizione di insieme di Hintikka a partire dalla formula $ft_1...t_n=ft_1...t_n$ che apparitene a Σ. Così la definizione di F_f non dipende dai rappresentanti scelti nelle singole classi $t_1\sim...t_n\sim$ e la definizione è buona.

Per completare la definizione della struttura, per ogni simbolo di costante c, sia c~ la corrispondente costante.

Ora indichiamo con $\mathfrak{A}$ la struttura definita così: $\mathfrak{A}$=(A, {R_P: P è un predicato di $\mathfrak{L}$}, {F_f: f è un simbolo di funzione di $\mathfrak{L}$}, {c~: c è un simbolo di costante di $\mathfrak{L}$})

Per definire una realizzazione bisogna anche precisare i valori attribuiti alle variabili: così $\underline{a}$ sia la funzione tale che $\underline{a}(v_i)=v_i\sim$.

Sia ora σ la realizzazione ($\mathfrak{A}$,$\underline{a}$) che dipende da $\mathfrak{A}$ e $\underline{a}$.

Si noti che questa rtealizzazione σ ha cardinalità minore od uguale alla cardinalità del linguaggio $\mathfrak{L}$ poiché il suo universo è costituito da classi di equivalenza di termini.

Per arrivare a dimostrare che tutte le formule di Σ sono vere nell'interpretazione σ, si inizia col far vedere, per induzione sulla costruzione dei termini, che $t^\sigma=t\sim$. Viste le definizioni, l'affermazione è banale per le variabili e per i simboli di costante. Se poi il termine t è del tipo $ft_1...t_n$, allora $t^\sigma=(ft_1...t_n)^\sigma=f^\sigma(t_1{}^\sigma...t_n{}^\sigma)=F_f(t_1{}^\sigma...t_n{}^\sigma)$ = (per induzione) $F_f(t_1\sim...t_n\sim)$= (per definizione di F_f) $(ft_1...t_n)\sim=t\sim$.

Infine si dimostra che tutte le formule di Σ sono vere nell'interpretazione σ come conseguenza dell'affermazione seguente: se $\alpha\in\Sigma$ allora $\alpha^\sigma=V$ e se $\neg\alpha\in\Sigma$ allora $\alpha^\sigma=F$. L'ultima affermazione si dimostra per induzione sulla costruzione delle formule.

Se α è atomica allora α è del tipo $Pt_1...t_n$. In questo caso se $\alpha\in\Sigma$, cioè se $Pt_1...t_n\in\Sigma$, allora $(t_1\sim...t_n\sim)\in R_P$, cioè, per quanto prima dimostrato, $(t_1{}^\sigma...t_n{}^\sigma)\in R_P$, ossia $\alpha^\sigma=V$. Se poi $\neg\alpha\in\Sigma$ allora, per la clausola 0) della definizione di insieme di Hintikka, $Pt_1...t_n\notin\Sigma$, sicché $(t_1\sim...t_n\sim)\notin R_P$, ed anche $(t_1{}^\sigma...t_n{}^\sigma)\notin R_P$, così $\alpha^\sigma=F$.

Se α è del tipo $\neg\beta$, e $\alpha\in\Sigma$, allora $\neg\beta\in\Sigma$ e, per ipotesi induttiva, β^σ= F, sicche $\alpha^\sigma=V$. Se invece, sempre con α di tipo $\neg\beta$, $\neg\alpha\in\Sigma$, allora $\neg\neg\beta\in\Sigma$ e, per la clausola 1) della definizione di insieme di Hintikka, anche $\beta\in\Sigma$; sicché, per ipotesi induttiva, $\beta^\sigma=V$, donde $\alpha^\sigma=F$.

Se α è del tipo $\wedge\beta\gamma$ e $\alpha\in\Sigma$, allora, per la clausola 2) della definizione di insieme di Hintikka, sia $\beta\in\Sigma$ che $\gamma\in\Sigma$; così, per ipotesi induttiva, sia $\beta^\sigma=V$ che $\gamma^\sigma=V$, donde $\alpha^\sigma=V$. Se invece, sempre con α di tipo $\wedge\beta\gamma$, $\neg\alpha\in\Sigma$, allora o $\neg\beta\in\Sigma$ o $\neg\gamma\in\Sigma$, per la clausola 3) della definizione di insieme di Hintikka, così, per ipotesi induttiva, o $\beta^\sigma=F$ o $\gamma^\sigma=F$, sicché $\alpha^\sigma=F$.

Se, infine, α è del tipo $\forall x\beta$ e $\alpha\in\Sigma$, allora, per la clausola 4) della definizione di insieme di Hintikka, per ogni termine t, $\beta(x/t)\in\Sigma$, e, per ipotesi induttiva, per ogni t, $\beta(x/t)^\sigma=V$, ma ciò equivale a $\beta^{\sigma(x/t^\sigma)}=V$ per ogni termine t, cioè $\beta^{\sigma(x/t\sim)}=V$ per ogni elemento dell'universo t~, e perciò $\forall x\beta^\sigma=V$, cioè $\alpha^\sigma=V$. Se invece, sempre con α di tipo $\forall x\beta$, $\neg\alpha\in\Sigma$, allora esiste un termine t tale che $\neg\beta(x/t)\in\Sigma$, e, per ipotesi induttiva, per quel t, $\beta(x/t)^\sigma=F$, cioè $\beta^{\sigma(x/t^\sigma)}=F$ per quel t, ed anche $\beta^{\sigma(x/t\sim)}=F$ per un elemento t~ dell'universo, sicché $\forall x\beta^\sigma=F$, cioè $\alpha^\sigma=F$.

Ciò completa la dimostrazione dell'affermazione ed anche quella del teorema.

20. COMPLETEZZA DEL METODO DEGLI ALBERI DI CONFUTAZIONE A BLOCCHI.

Si chiama metodo degli alberi di confutazione a blocchi il metodo visto degli alberi di confutazione costruiti usando le regole $R_{1,n}$ e R_2, secondo la strategia introdotta, in quanto dette regole fanno aggiungere molte formule ad ogni loro applicazione, anzi insiemi di formule di certi tipi, che possiamo chiamare blocchi di formule.

Abbiamo già visto che se l'albero T^∞, costruito a partire da un insieme Γ di formule, è chiuso, allora, come conseguenza del teorema di validità, l'insieme Γ è non soddisfacibile.

D'altra parte abbiamo visto che se invece l'albero T^∞ ha un ramo aperto, allora l'insieme delle formule occorenti nel ramo costituiscono un insieme di Hintikka che sarà soddisfacibile, per quanto appena dimostrato. Sicché nel caso in cui l'analisi non porta a dichiarare la non soddisfacibilità di un insieme Γ di formule di partenza, poiché l'albero T^{∞} non è chiuso, si può concludere che l'insieme Γ è soddisfacibile perché sottinsieme dell'insieme delle formule di un ramo aperto che è soddisfacibile.

Così si è dimostrato il:
TEOREMA DI COMPLETEZZA Un insieme di formule Γ è soddisfacibile se l'albero T^{∞} unione degli alberi T_n della successione costruita a partire da Γ è aperto.

Si noti che questo risultato mette in completa corrispondenza la soddisfacibilità di un insieme di formule con il controllo sintattico di detta soddisfacibilità effettuato mediante il metodo degli alberi.

21. IL PROBLEMA DELLA DECIDIBILITA' DEL METODO DEGLI ALBERI DI CONFUTAZIONE A BLOCCHI.

Ma si deve lamentare che questo metodo, per quanto se ne sa ora, fornisce un controllo che deve considerare un albero unione di un insieme infinito di alberi, cioè bisogna eseguire ulteriori operazioni dopo aver sviluppato un'infinità numerabile di passi prima di dare risposta sia in positivo che in negativo. Sicché quanto ottenuto è ancora lontano dal controllo sintattico effettivo della soddisfacibilità a cui si voleva pervenire.
Ci si può chiedere la ragione di un tale insuccesso, e non pare troppo azzardato ipotizzare che esso dipenda dal voler analizzare insiemi infiniti di formule. Dal momento che, come si è visto, le regole preservano la finitezza se applicate ad insiemi finiti, se tutti gli alberi della successione fossero finiti, forse si potrebbe controllare in modo più effettivo il loro comportamento.
Di fatto, se si vuole analizare la soddisfacibilità o meno di un insieme finito di formule, si ottengono dei risultati più lusinghieri, come ci si accinge a vedere.

Si supponga, dunque, che Γ sia un insieme finito di formule e si proceda all'analisi della sua soddisfacibilità o meno adottando il metodo dell'analisi a blocchi illustrato.
Se si parte da un insieme finito di formule, poiché le regole 1 e 2 fanno passare da insiemi finiti di formule ad insiemi finiti, si preserva la finitezza degli insiemi di formule introdotti nelle foglie dei successivi alberi che si costruiscono. Non solo, ma è finito anche il numero di funzioni che dalle formule di tipo $\neg\wedge\alpha\beta$, presenti in una foglia, scelgono o $\neg\alpha$ o $\neg\beta$, funzioni che individuano gli immediati successori della foglia nel nuovo albero voluto dalla regola 2.
Così se si parte da un insieme finito di formule, gli alberi della successione sono tutti finiti e con nodi finiti. In tale situazione gli immediati successori di un nodo sono in numero finito e si è nelle ipotesi del seguente:
Lemma di König. Se un albero, in cui ogni nodo ha un numero finito di successori immediati, ha infiniti nodi allora in esso c'è anche un ramo infinito.
DIMOSTRAZIONE. Si dia il nome di ricco ad un nodo che ha un numero infinito di successori. Nelle ipotesi fatte, la radice è un nodo ricco, ed anche ogni nodo ricco ν ha un successore immediato che è ricco, perché, altrimenti, tutti gli immediati successori, che sono in numero finito, avrebbero un numero finito di successori e lo stesso accadrebbe per il nodo ν (poiché l'unione di un numero finito di insiemi finiti è finita) contro l'ipotesi che ν fosse ricco. Si consideri l'operazione di scegliere un nodo ricco tra gli immediati successori di un nodo ricco (che sono in numero finito): questa operazione è sempre possibile. Si può allora partire dalla radice ed iterare l'applicazione di questa operazione ottenendo via via nodi diversi dai precedenti in ordine totale ciascuno immediato successore del precedente: si è individuato così un ramo infinito nell'albero dato, come volevasi.

Così, se il nodo iniziale è finito (e di conseguenza l'albero generato è tale che ogni nodo ha un numero finito di successori immediati), allora, grazie al lemma di König, si dimostra che l'albero unione T^{∞} è chiuso se e solo se c'è un albero T_n della successione che è chiuso.

Infatti una direzione della doppia implicazione è banale: se un albero T_n della successione è chiuso allora anche l'albero T^{∞} è chiuso essendo questo uguale all'altro in base alla definizione della successione degli alberi. Per l'altra direzione facciamo vedere la contronominale: se nessun albero T_n della successione è chiuso allora T^{∞} non è chiuso. In effetti se ogni albero T_n della successione non è chiuso allora l'albero T_{n+2}, lo estende propriamente con nodi a livello più profondo; sicché l'albero T^{∞} deve avere infiniti nodi. Ma, se T^{∞} ha infiniti nodi, per il lemma di König, applicabile alla situazione presente perchè i successori immediati di un nodo sono in numero finito, deve avere un ramo infinito che non può essere chiuso, altrimenti conterrebbe una formula φ in un nodo del ramo, diciamo l'i-esimo, e la sua negazione $\neg\varphi$ in un altro, diciamo il j-esimo, e il ramo si chiuderebbe a profondità max(i,j) e sarebbe finito.

Dunque se si parte da un insieme finito di formule l'analisi con questo metodo è semidecidibile. Dicendo che questo metodo è semidecidibile si intende che in almeno una direzione il metodo permette di giungere ad una decisione effettiva, cioè conseguita in un numero finito di passi. Infatti l'analisi della soddisfacibilità di un insieme finito Γ di formule con il metodo introdotto ha portato alle conclusione che Γ è non soddisfacibile se e solo se esiste un albero T_n della successione che è chiuso: così, se Γ è non soddisfacibile, ce se ne accorgerà dopo un numero finito di passaggi quando si giungerà ad un albero chiuso e si potrà decidere effettivamente che Γ era non soddisfacibile, mentre nel caso che Γ sia soddisfacibile per rendersene conto bisognerà proseguire l'analisi fino ad ottenere tutti gli alberi aperti della successione poiché, al momento, non abbiamo alcun criterio generale che ci permetta di dire che tutti gli alberi della successione costruita a partire da Γ sono aperti senza averli costruiti ad uno ad uno.

Visto che nel caso dell'analisi di insiemi finiti di formule il metodo degli alberi di confutazione a blocchi fornisce risultati soddisfacenti, si può cercare di vedere se l'analisi di insiemi infiniti di formule può ricondursi al caso degli insiemi finiti per ottenere anche nel caso più generale i buoni risultati conseguiti nel caso di insiemi finiti. L'analisi di un insieme infinito di formule si potrebbe ricondurre a quella di un insieme finito se ci fosse un legame tra la soddisfacibilità di un insieme infinito e la soddisfacibilità dei suoi sottinsiemi finiti.

E' ovvio che se un insieme è soddisfacibile lo sono anche tutti i suoi sottinsiemi, in particolare quelli finiti. Ma il viceversa non è assolutamente banale. Infatti anche se i sottinsiemi finiti di un insieme infinito fossero tutti soddisfacibili può succedere che le formule di ciascun sottinsieme finito siano vere in una reallizzazione diversa da quella che rende vere le formule di un altro sottinsieme finito, sicché non si può garantire a priori l'esistenza di un'unica realizzazione che renda vere tutte le formule dell'insieme infinito.

Ma guardando alla contronominale del risultato auspicato, e cioè all'affermazione che un insieme infinito di formule è non soddisfacibile se esiste un suo sottinsieme finito non soddisfacibile, si potrebbe nutrire qualche speranza di successo nel dimostrare quanto affermato in base all'osservazione che per poter concludere con la non soddisfacibilità di un insieme si cerca di ricondursi alla presenza, in un opportuna estensione di quell'insieme, di una formula e della sua negazione, che costituicono un sottinsieme certamente finito e non soddisfacibile. Così ci proponiamo di dimostrare che se ogni sottinsieme finito di un insieme (infinito) di formule è soddisfacibile allora anche l'insieme stesso è soddisfacibile. Questo risultato va sotto il nome di teorema di compattezza.

Per sviluppare questo tentativo dovremmo considerare insiemi che hanno ciascun loro sottinsieme finito soddisfacibile. Pertanto introduciamo la seguente

Definizione. Un insieme di formule è detto **finitamente soddisfacibile** se ogni suo sottinsieme finito è soddisfacibile.

(Attenzione che nella letteratura si usa la dizione "finitamente soddisfacibile" anche per indicare un insieme di formule che ha modelli finiti, nozione totalmente diversa da quella che qui si considera, e da non confondere con questa.)

22. ANALISI DELLA FINITA SODDISFACIBILITA'

Ci si può domandare se, per analizzare la finita soddisfacibilità di un insieme di formule in un linguaggio anche più che numerabile, si può utilizzare il metodo degli alberi. Si osservi che la nozione di chiusura di una foglia (cioè la presenza in essa di una formula e della sua negazione), oltre la non soddisfacibilità dell'insieme di formule della foglia, implica anche la non finita soddisfacibilità dello stesso insieme di formule, in quanto, se in una foglia occorrono sia una formula che la sua negazione, allora tra tutti i sottinsiemi finiti di formule della foglia c'è anche il sottinsieme finito non soddisfacibile, quello costituito dalle due formule che sono una negazione dell'altra.

Per la ragionevolezza del metodo, bisognerebbe dimostrare che le regole preservano la finita soddisfacibilità. Se così fosse, si dovrebbe poter dimostrare che ci sarebbe almeno un ramo infinito aperto; che sarebbe un insieme di Hintikka e, dunque, soddisfacibile: sicché la finita soddisfacibilità implicherebbe la soddisfacibilità. Di fatto vale il seguente

Teorema. Le regole 1 e 2 preservano la finita soddisfacibilità.

DIMOSTRAZIONE.

Consideriamo anzitutto la regola 1. Sia Γ un insieme di formule finitamente soddisfacibile (in cui non occorrono sia una formula che la sua negazione), cioè tale che ogni sottinsieme finito di Γ sia soddisfacibile. Sia Γ' l'insieme ottenuto da Γ applicandogli la regola 1 relativamente ad un certo numero naturale n. Si deve far vedere che Γ' è finitamente soddisfacibile, cioè ciascuno dei sottinsiemi finiti di Γ' è soddisfacibile. Per ogni S' sottinsieme finito di Γ' sia $S_0=S'\cap\Gamma$ e $S_1=S'-S_0$. Sia S_2 l'insieme delle formule di Γ da cui si sono ottenute quelle di S_1 mediante l'applicazione della regola 1 relativamente a n (se una formula di S_1 è ottenuta da più formule di Γ applicando la regola 1, se ne scelga una sola di queste da mettere in S_2). La finitezza di S' implica la finitezza di S_0, di S_1 e di S_2. Così $S''=S_0\cup S_2$ è un sottinsieme finito di Γ. Per la finita soddisfacibiltà di Γ, esiste una $\mathfrak{L}$-realizzazione (una realizzazione adatta al linguaggio $\mathfrak{L}$, linguaggio che supponiamo essere quello in cui si eprimono le formule di Γ) che rende vere le formula di S''. Sia $\sigma_{S''}$ una tale realizzazione. Le formule di Γ' si esprimono in un linguaggio $\mathfrak{L}'$ ottenuto da $\mathfrak{L}$ aggiungendo i simboli di costante dell'insieme $\{c_{\neg\forall x\alpha}: \neg\forall x\alpha\in\Gamma\}$ introdotti dalla regola 1 nelle formule $\neg\alpha(x/c_{\neg\forall x\alpha})$ di Γ' in corrispondenza delle formule $\neg\forall x\alpha$ di Γ. Ciò succederà in particolare nel passare dalle formule di tipo $\neg\forall x\alpha$ di S'' alle formule $\neg\alpha(x/c_{\neg\forall x\alpha})$ di S'. Sia $\sigma_{S'}$ la $\mathfrak{L}'$-realizzazione ottenuta espandendo la $\mathfrak{L}$-realizzazione $\sigma_{S''}$ interpretando ciascun nuovo simbolo di costante $c_{\neg\forall x\alpha}$, occorrente in S' in una formula del tipo $\neg\alpha(x/c_{\neg\forall x\alpha})$, in un elemento $a_{\neg\forall x\alpha}$ dell'universo di $\sigma_{S''}$ tale che la formula $\neg\alpha$ sia vera nell'interpretazione $\sigma_{S''}(x/a_{\neg\forall x\alpha})$ (tale elemento deve esistere poiché la formula $\neg\forall x\alpha$ è vera nella realizzazione $\sigma_{S''}$, e non c'è conflitto tra le interpretazioni dei nuovi simboli per costante perché, al variare delle formule di tipo $\neg\forall x\alpha$ in S_2, cambia il nuovo simbolo per costante utilizzato), e gli altri nuovi simboli per costanti di $\mathfrak{L}'$ come si vuole. La realizzazione $\sigma_{S'}$ rende vere tutte le formula di S': quelle con i nuovi simboli per costante proprio per come questi sono stati interpretati, le altre perché sono vere nella realizzazione $\sigma_{S''}$ e $\sigma_{S'}$ la espande. Vista l'arbitrarietà del sottinsieme finito S' di Γ', si può concludere che ciò vale per ogni sottinsieme finito di Γ', completando così la dimostrazione che la regola 1 preserva la finita soddisfacibilità.

Ora si vuole mostrare che anche la regola 2 preserva la finita soddisfacibilità, cioè si vuol far vedere che se si applica la regola 2 ad un insieme di formule Γ finitamente soddisfacibile, allora almeno uno degli insiemi ottenuti dall'applicazione della regola è finitamente soddisfacibile. Si indichi con Γ' l'insieme delle formule del tipo $\neg\wedge\alpha\beta$ in Γ. Si ricordi che gli insiemi ottenuti applicando la regola 2 possono essere tanti, ciascuno in corrispondenza di un modo di scegliere $\neg\alpha$ o $\neg\beta$ da ciascuna formula del tipo $\neg\wedge\alpha\beta$ in Γ', cioè in corrispondenza di una funzione f che opera tali scelte. Si indichi con $\mathfrak{F}$ l'insieme di tali funzioni. Così si possono indicare con Γ_f gli insiemi ottenuti applicando la regola

2, per ciascuna funzione f appartenente a $\mathfrak{F}$. Ora, il fatto che la regola 2 preservi la finita soddisfacibilità si può esprimere dicendo che se Γ è finitamente soddisfacibile allora esiste una funzione f, appartenente a $\mathfrak{F}$, tale che Γ_f è finitamente soddisfacibile.

Come si potrà individuare una tale funzione? La proposta è di tentare di avvicinarsi ad essa mediante funzioni f che, pur avendo per dominio non tutte le formule del tipo $\neg\wedge\alpha\beta$ occorrenti in Γ, ma solo alcune di esse (eventualmente nessuna), forniscono insiemi $\Gamma\cup\{f(\neg\wedge\alpha\beta): \neg\wedge\alpha\beta\in dom(f)\}$ finitamente soddisfacibili.

Sia $\mathbb{F}$ l'insieme di queste funzioni, cioè sia $\mathbb{F} = \{f$: f è una funzione che 1) ha per dominio un sottinsieme delle formule del tipo $\neg\wedge\alpha\beta$ occorrenti in Γ, e 2) ad ogni formula $\neg\wedge\alpha\beta$ del suo dominio associa o $\neg\alpha$ o $\neg\beta$, e inoltre 3) è tale che $\Gamma\cup\{f(\neg\wedge\alpha\beta): \neg\wedge\alpha\beta\in dom(f)\}$ sia finitamente soddisfacibile$\}$. Si ordini $\mathbb{F}$ per inclusione.

La speranza è che questo insieme $\mathbb{F}$ sia ricco di funzioni con dominio sempre più ampio fino al punto che il dominio sia proprio $\Gamma'=\{\neg\wedge\alpha\beta: \neg\wedge\alpha\beta\in\Gamma\}$: allora una tale funzione (la si indichi con f), oltre ad appartenere a $\mathbb{F}$, apparterrebbe anche ad $\mathfrak{F}$ e sarebbe tale che Γ_f è finitamente soddisfacibile, come si vuole mostrare.

Anzitutto è opportuno mostrare che $\mathbb{F}$ non è vuoto. Infatti gli appartiene la funzione vuota; questa è la funzione che è un insieme privo di elementi che dovrebbero essere coppie ordinate, ed anche il suo dominio è vuoto: la funzione vuota appartiene a $\mathbb{F}$ perché sicuramente fa una scelta tra le due alternative di una formula di tipo $\neg\wedge\alpha\beta$ (che non c'è), ed inoltre dà un nuovo insieme Γ' che è esattamente Γ, sicché Γ' è finitamente soddisfacibile poiché lo è Γ per ipotesi.

Se uno fosse perplesso per il fatto che si è dimostrato che $\mathbb{F}$ non è un insieme vuoto mostrando che la funzione vuota gli appartiene e vorrebbe vedere che anche altre fnzioni gli appartengono, eccolo accontentato con le prossime osservazioni; ma agli stessi risultati si può pervenire grazie alle altre proprietà di $\mathbb{F}$ che si vedranno in seguito. Sia, dunque, $\neg\wedge\alpha\beta$ una formula di Γ', e si considerino le due funzioni $\{(\neg\wedge\alpha\beta,\neg\alpha)\}$ e $\{(\neg\wedge\alpha\beta,\neg\beta)\}$ che hanno per dominio $\{\neg\wedge\alpha\beta\}$ che a $\neg\wedge\alpha\beta$ associano una $\neg\alpha$ e l'altra $\neg\beta$; allora una di queste appartiene a $\mathbb{F}$ poiché o $\Gamma\cup\{\neg\alpha\}$ o $\Gamma\cup\{\neg\beta\}$ è finitamente soddisfacibile. Se entrambi questi insiemi non fossero finitamente soddisfacibili ci sarebbe un sottinsieme finito S' di $\Gamma\cup\{\neg\alpha\}$ e un sottinsieme finito S'' di $\Gamma\cup\{\neg\beta\}$ che non sarebbero soddisfacibili. Ma $S'\subseteq(S'-\{\neg\alpha\})\cup(S''-\{\neg\beta\})\cup\{\neg\alpha\}$ e $S''\subseteq(S'-\{\neg\alpha\})\cup(S''-\{\neg\beta\})\cup\{\neg\beta\}$, sicché anche gli insiemi finiti indicati, che contengono S' e S'' rispettivamente, non sono soffisfacibili, e non sarebbe soddisfacibile neppure $(S'-\{\neg\alpha\})\cup(S''-\{\neg\beta\})\cup\{\neg\wedge\alpha\beta\}$ che è un sottinsieme finito di Γ, insieme quest'ultimo che si sta supponendo finitamente soddisfacibile. Questa contraddizione prova che una delle due funzioni $\{(\neg\wedge\alpha\beta,\neg\alpha)\}$ o $\{(\neg\wedge\alpha\beta,\neg\beta)\}$ appartiene a $\mathbb{F}$, che così, ancora, non è vuoto.

Ora si vuol vedere se funzioni di $\mathbb{F}$ che dovrebbero approssimare sempre meglio la funzione cercata portano ad una funzione di $\mathbb{F}$ con approssimazione migliore di tutte quelle considerate, cioè se una successione di funzioni $\mathbb{F}$ ciascuna includente le precedenti, ma con dominio sempre più vasto, permette di ottenere una funzione di $\mathbb{F}$ che contenga tutte quelle della successione, e, in tal senso, approssimi sempre più la funzione cercata.

Si osservi che, se $\mathbb{F}_1$ è un sottinsieme non vuoto totalmente ordinato dall'inclusione di elementi di $\mathbb{F}$, allora $\cup\mathbb{F}_1$ è ancora un elemento di $\mathbb{F}$ che, evidentemente, sarà un maggiorante di $\mathbb{F}_1$ in $\mathbb{F}$. Infatti l'unione di funzioni una contenuta in un'altra è ancora una funzione che ha per dominio l'unione dei domini delle funzioni appartenenti a $\mathbb{F}_1$ (cioè ancora un sottinsieme di Γ'); inoltre ad ogni elemento $\neg\wedge\alpha\beta$ del dominio $\cup\mathbb{F}_1$ associa o $\neg\alpha$ o $\neg\beta$; ed infine $\Gamma\cup\{\cup\mathbb{F}_1(\neg\wedge\alpha\beta): \neg\wedge\alpha\beta\in dom(\cup\mathbb{F}_1)\}$ è finitamente soddisfacibile.

Per rendersi conto della correttezza di quest'ultima affermazione, si consideri un qualsiasi sottinsieme finito S di $\Gamma\cup\{\cup\mathbb{F}_1(\neg\wedge\alpha\beta): \neg\wedge\alpha\beta\in dom(\cup\mathbb{F}_1)\}$. In S c'è un numero finito di formule $\gamma_1,...,\gamma_p$ non in Γ e pertanto immagini di qualche formula di Γ' mediante $\cup\mathbb{F}_1$. Ma se, per ogni i tra 1 e p, $\gamma_i = \cup\mathbb{F}_1(\neg\wedge\alpha_i\beta_i)$ allora, per ogni tale i, c'e una funzione $f_i\in\mathbb{F}_1$ tale che $\gamma_i = f_i(\neg\wedge\alpha_i\beta_i)$; e poiché queste funzioni sono una contenuta nell'altra tra queste p funzioni ce ne è una, la si indichi con $f\sim$, che contiene le altre, sicché, per ogni i tra 1 e p, $\gamma_i = f\sim(\neg\wedge\alpha_i\beta_i)$. Allora $S = (\Gamma\cap S)\cup\{f\sim(\neg\wedge\alpha_i\beta_i): i=1,...,p\}$ è soddisfacibile perché è un sottinsieme finito di $\Gamma\cup\{\mathtt{f}\sim(\neg\wedge\alpha\beta)\colon \neg\wedge\alpha\beta\in \mathrm{dom}(\mathtt{f}\sim)\}$ che è finitamente soddisfacibile per l'ipotesi fatta su $\mathtt{f}\sim$.

Visto che le funzioni di $\mathbb{F}$ permettono di generare funzioni che si avvicinano sempre più a quella cercata, viene da chiedersi se questo avvicinarsi porta a determinare una funzione di dominio Γ', o se si rimane comunque lontani. I migliori candidati per determinare una funzione di dominio Γ' sono evidentemente gli elementi massimali di $\mathbb{F}$ (cioè quelli che hanno dominio più grande di tutte le altre funzioni di $\mathbb{F}$ in essi contenute), se ci sono. La dimostrazione dell'esistenza di questi elementi massimali nell'insieme $\mathbb{F}$ è il punto più delicato di tutta questa dimostrazione che la regola 2 preserva la finita soddisfacibilità poiché richiede una assunzione impegnativa sui metodi dimostrativi permessi in matematica: tale assunzione è l'assioma della scelta, qui nella sua forma equivalente del lemma di Zorn.

Prima di dimostrare che detti elementi massimali esistono, apriamo una parentesi per precisare in che senso l'assioma della scelta e l'equivalente lemma di Zorn sono delicate assunzioni sui metodi dimostrativi permessi in matematica.

Le collezioni sono alla base della teoria degli insiemi dove il problema centrale, a causa del paradosso di Russell, è determinare se una collezione è un insieme. Ma già prima di arrivare a questo punto, ci si può chiedere cos'è una collezione. Qui ci sono due problematiche che si incrociano: da una parte l'avere una precisa nozione di cosa si intende per collezione, dall'altra saper riconoscere se una certa cosa è effettivamente una collezione. Si potrebbe classificare il primo come problema ontologico e il secondo come problema epistemologico, e i due problemi esistono e sono distinti perché l'uomo può aver chiaro un concetto senza saperne riconoscere operativamente le istanziazioni. Nel caso in esame si può affermare che dal punto di vista ontologico non ci sono grandi difficoltà: considerare una collezione vuol dire fissare l'attenzione su degli elementi nel loro complesso. Molto più delicato è il problema epistemologico. Si è accettato di ritenere uguali due collezioni quando hanno gli stessi elementi. Ciò vuol anche dire che si accetta che per riconoscere una specifica collezione bisogna sapere, in qualche modo, quali sono i suoi elementi, e, se non si conoscono gli elementi, non si può dire di considerare una certa collezione, di cui rimane dubbia la conoscenza, e quindi la certezza dell'esistenza. Si apre, così, il problema di precisare qual'è la conoscenza richiesta nell'affermare che un elemento appartiene ad una collezione, al fine di poter precisare che si sta considerando una certa collezione, e dunque asserirne l'esistenza. Il problema diviene: quanto bene devono essere conosciuti e precisati gli elementi per poter dire che la loro collezione esiste? E' facile proporre collezioni, ad esempio formate da un numero finito di elementi ben individuati, per le quali non è assolutamente problematico riconoscere quali sono gli elementi della collezione, e così precisare quale collezione si sta considerando e asserirne tranquillamente l'esistenza. Ma ci sono delle situazioni in cui si può essere perplessi se effettivamente si sappia determinare quali elementi appartengono ad una collezione, il che può far dubitare sulle stessa esistenza della collezione che si vuol individuare. Si consideri, ad esempio, la collezione dei sottinsiemi dell'insieme dei numeri naturali: si sa che essa è più che numerabile, sicché non se ne possono nominare gli elementi neppure in un tempo illimitato (addirittura ci sono sottinsiemi dei naturali che possono essere individuati solo dopo aver considerato una infinità di altri sottinsiemi dei numeri naturali). Eppure esiste una precisa definizione di sottinsieme, sicché il concetto di sottinsieme è chiaro. Inoltre pensiamo di poter riconoscere se una data collezione (anche infinita) è un sottinsieme dei naturali, così ce la sentiamo di poter affermare di conoscere i sottinsiemi dei naturali e di poter asserire tranquillamente l'esistenza della loro collezione (ciò viene anche precisamente affermato come conseguenza degli assiomi dell'infinito e dell'insieme potenza nella teoria degli insiemi). L'esempio appena considerato mostra come si sia disposti a concedere molto alla nozione di conoscenza degli elementi che serve per poter concludere con l'esistenza di una certa collezione. Ma anche questa apertura non è sufficiente per precisare dove mettere il confine esatto tra ciò che si vuol ritenere come conoscibile e ciò che non lo è. Un esempio paradigmatico di situazioni di questo tipo è il seguente. Si considerino una famiglia di insiemi non vuoti, e un elemento per ciascun insieme della famiglia. Ci si chiede se esiste una funzione, che si chiamerà funzione scelta, che ad ogni insieme della famiglia associa un elemento di quell'insieme. Non c'è assolutamente alcun problema nell'affermare l'esistenza di una tale funzione se o la famiglia è finita o se c'è un criterio esplicito per individuare un elemento in ciascun insieme della famiglia. In particolare se ciascuno degli insiemi non vuoti della famiglia è finito allora c'è un criterio uniforme per scegliere un elemento da ciascun insieme non vuoto, e la funzione scelta esiste. Se, dunque, con pochi elementi in ciascuno degli insiemi non vuoti si può definire una funzione scelta che ad ogni insieme della famiglia associ un suo elemento, ciò dovrà essere ancora più facile quando la "scelta è maggiore", cioè quando gli elementi in ciascun insieme della famiglia sono in numero maggiore. Pur essendo del tutto naturale ritenere che, nel caso di maggior ricchezza di ciascuno degli insiemi della famiglia, la funzione scelta debba esistere a ragion maggiore, tuttavia in questo caso la troppa ricchezza può provocare delle difficoltà nell'individuazione le, la possibilità di caratterizzare la funzione scelta non è deducibile dagli altri assiomi della teoria degli insiemi. Così si deve decidere se si vuole accettare l'esistenza della funzione scelta, come sembra del tutto naturale, accettando nel contempo come buona una conoscenza dei suoi elementi anche molto vaga, oppure, proprio per non accettare conoscenze troppo imprecise per determinare una collezione, se si debba rifiutare l'esistenza della funzione di scelta. In genere in matematica si accetta l'assioma della scelta che afferma appunto l'esistenza della funzione scelta una volta data una famiglia di insiemi non vuoti: anche se può essere dubbio se la conoscenza umana arrivi a determinare gli elementi di una particolare funzione scelta, l'accettazione dell'assioma della scelta vuol dire accettare l'esistenza e l'utilizzabilità di una tale funzione indipendentemente dalle possibilità effettive di precisare i suoi elementi. Il principio del buon ordinamento (che afferma che ogni insieme può essere bene ordinato) e il lemma di Zorn (asserente che un insieme non vuoto parzialmente ordinato ha massimali se ogni suo sottinsieme non vuoto e totalmente ordinato ha maggioranti nell'insieme) sono equivalenti all'assioma della scelta, e anch'essi si trovano ad affrontare la stessa problematica. In effetti se ogni insieme può essere ben ordinato, in particolarelo sarà l'insieme X unione sulla famiglia Y di insiemi non vuoti I su cui si vuole applicare al funzione di scelta ($X = \cup\{I: I\in Y\} = \cup Y$), allora c'è un banale criterio uniforme per scegliere un elemento da un insieme I non vuoto, basta scegliere, ad esempio, il primo di I nel buon ordine di X (I è un sottinsieme di X). Ma rimane il problema di come bene ordinare un insieme: anche se è chiaro ciò che questa affermazione comporta, non è evidente come si possa realizzare un buon ordinamento se l'insieme da ben ordinare contiene talmente tanti elementi che sfuggono ad ogni controllo (se sono pochi o ben individuati non è difficile bene ordinarli). Il problema è dello stesso tipo di quanto visto prima per l'assioma della scelta, tant'è vero che proprio usando l'assioma della scelta si riesce a costruire un buon ordinamento di un qualsiasi insieme non vuoto: basta infatti considerare una funzione scelta che scelga un elemento da ogni sottisieme non vuoto dell'insieme da bene ordinare, così si considererà come primo elemento quello scelto da tutto l'insieme e come prossimo elemento di uno a cui si è già arrivati quello scelto dalla funzione scelta dal sottinsieme costituito dall'intero insieme meno gli elementi già considerati nell'avvio di ordinamento. Analoga è la situazione per il lemma di Zorn. Il lemma di Zorn offre, in un certo modo, un metodo di approssimazione ad un certo traguardo (le approssimazioni possono essere sistemate in un insieme parzialmente ordinato secondo il criterio di avvicinamento al traguardo), affermando che così il traguardo può essere raggiunto (mediante l'elemento massimale di cui afferma l'esistenza) se le approssimazioni possono portare ad una approssimazione sempre più fine (ogni sottinsieme totalmente ordinato ha maggiorante). Di fatto è proprio sfruttando questa idea che si dimostra che dal lemma di Zorn segue l'assioma della scelta: se si sono fatte delle scelte coerenti su alcuni insiemi della famiglia si può estendere l'insieme delle scelte ad includere un altro insieme della famiglia, se non sono stati considerati tutti; ciò porta ad un insieme massimale che deve essere una funzione di scelta avendo per dominio tutti gli insiemi della famiglia, altrimenti sarebbe ulteriormente incrementabile, contro la sua massimalità. D'altra parte dall'assioma di scelta segue il lemma di Zorn perché tra i maggioranti di un elemento se ne può sempre sceglierne uno e così proseguire fino a giungere ad un elemento che non ha maggioranti, cioè un elemento massimale. Così il lemma di Zorn è esattamente equivalente all'assioma della scelta. (Le dimostrazioni qui presentate sono solo tracce di dimostrazioni che vogliono cogliere le idee fondamentali delle stesse dimostrazioni. D'altra parte esse sono facilmente reperibili in vari testi che riportano gli elementi della teoria degli insiemi).

Chiusa questa lunga parentesi sulla delicatezza dell'assioma della scelta e del lemma di Zorn, torniamo ad occuparci della ricerca di elementi massimali nell'insieme $\mathbb{F}$.

Poiché, come si è dimostrato precedentemente, ogni sottinsieme non vuoto totalmente ordinato di $\mathbb{F}$ ha un maggiorante in $\mathbb{F}$, ci troviamo nelle ipotesi del lemma di Zorn, e in $\mathbb{F}$ ci saranno elementi massimali.

Si è così giunti a mostrare l'esistenza di funzioni candidate ottimali in $\mathbb{F}$ ad avere per dominio tutto Γ': le funzioni massimali di $\mathbb{F}$, che hanno i domini più ampi possibile poiché si è scelto l'ordinamento per inclusione di $\mathbb{F}$. La dimostrazione che anche la regola 2 preserva la finita soddisfacibilità si conclude mostrando che tali funzioni candidate hanno effettivamente per dominio Γ'.

Sia $f^\wedge$ un elemento massimale di $\mathbb{F}$, si vuol mostrare che il suo dominio è Γ'. Altrimenti ci sarebbe una formula, diciamo $\neg\wedge\gamma\delta$, in Γ' ma non nel dominio di $f^\wedge$. Siano $f^\wedge_1=f^\wedge\cup\{(\neg\wedge\gamma\delta,\neg\gamma)\}$ e $f^\wedge_2= f^\wedge\cup\{(\neg\wedge\gamma\delta,\neg\delta)\}$, due estensioni proprie di $f^\wedge$. Se si fa vedere che una delle due appartiene a $\mathbb{F}$ si contraddice la massimalità di $f^\wedge$ che, per evitare la contraddizione, dovrà avere per dominio tutto Γ'.

Così si supponga che né $f^\wedge_1$ né $f^\wedge_2$ appartengano a $\mathbb{F}$. Allora $\Gamma\cup\{f^\wedge_1(\neg\wedge\alpha\beta): \neg\wedge\alpha\beta\in \mathrm{dom}(f^\wedge_1)\}$ e $\Gamma\cup\{f^\wedge_2(\neg\wedge\alpha\beta): \neg\wedge\alpha\beta\in\mathrm{dom}(f^\wedge_2)\}$ non sono finitamente soddisfacibili e ci saranno un sottinsieme finito S' non soddisfacibile e un sottinsieme finito S'' non soddisfacibile di ciascuno dei due insiemi rispettivamente. Siano $\underline{S}'=S'-\{\hat{f}_1(\neg\wedge\gamma\delta)\}$ e $\underline{S}''=S''-\{\hat{f}_2(\neg\wedge\gamma\delta)\}$. Si noti che $S'\cup\underline{S}''=\underline{S}'\cup\underline{S}''\cup\{\neg\delta\}$ e $S''\cup\underline{S}'=\underline{S}'\cup\underline{S}''\cup\{\neg\gamma\}$ sono insiemi finiti che contengono S' e S'' rispettivamente, e pertanto non sono soddisfacibili. Allora anche $\underline{S}'\cup\underline{S}''\cup\{\neg\wedge\gamma\delta\}$ sarebbe non soddisfacibile, ma questo è un sottinsieme finito dell'insieme finitamente soddisfacibile $\Gamma\cup\{\hat{f}(\neg\wedge\alpha\beta): \neg\wedge\alpha\beta\in \mathrm{dom}(\hat{f})\}$ (per l'ipotesi fatta su $\hat{f}$). Questa contraddizione mostra che in effetti o $\hat{f}_1$ o $\hat{f}_2$ appartengono a $\mathbb{F}$, ma non possono estendere la funzione $\hat{f}$ che, per ipotesi, è massimale in $\mathbb{F}$, e allora, come si era detto, il dominio di $\hat{f}$ sarà Γ'.

Quanto appena fatto vedere è ciò a cui si accennava prima quando si affermava la presenza in $\mathbb{F}$ di almeno una delle funzioni $\{(\neg\wedge\alpha\beta,\neg\alpha)\}$ o $\{(\neg\wedge\alpha\beta,\neg\beta)\}$ per mostrare che $\mathbb{F}$ non era vuoto al di là della presenza in $\mathbb{F}$ della funzione vuota. Infatti se si supponesse per assurdo che la sola funzione vuota fosse in $\mathbb{F}$, le catene in $\mathbb{F}$ sarebbero costituite dalla sola funzione vuota, e un elemento massimale dovrebbe essere la stessa funzione vuota. Ma ciò contrasterebbe con quanto appena fatto vedere che un elemento massimale ha per dominio tutto G', di più applicando le considerazioni sopra svolte proprio alla funzione vuota si ottengono esattamente le funzioni $\{(\neg\wedge\alpha\beta,\neg\alpha)\}$ e $\{(\neg\wedge\alpha\beta,\neg\beta)\}$ considerate all'inizio.

Concludendo, la funzione $\hat{f}$ permette di ottenere l'insieme $\Gamma\cup\{\hat{f}(\neg\wedge\alpha\beta): \neg\wedge\alpha\beta\in\Gamma'\}$ che è finitamente soddisfacibile, e che è uno di quegli insiemi che la regola 2 fa seguire a Γ: così anche la regola 2 preserva la finita soddisfacibilità nel senso che è finitamente soddisfacibile almeno uno degli insiemi a cui la regola fa passare a partire da un insieme finitamente soddisfacibile, come si voleva dimostrare.

23. UN ALTRO METODO PER MOSTRARE CHE LA REGOLA 2 PRESERVA LA FINITA SODDISFACIBILITA'.

La dimostrazione presentata che la regola 2 preserva la finita soddisfacibilità ha fatto uso dell'assioma di scelta, nella forma equivalente del lemma di Zorn. Di fatto si può ottenere anche dall'ipotesi che un ogni filtro possa essere esteso ad un ultrafiltro che Halpern ha dimostrato essere un po' più debole dell'assioma di scelta (Halpern: "The independence of the axiom of choice from the Boolean prime ideal theorem, Fund. Math., 55, 1964, pp.57-66) Questa sezione è dedicata solo all'introduzione delle necessarie nozioni su filtri e ultrafiltri e alla dimostrazione che la regola 2 preserva la finita soddisfacibiltà utilizzando solo l'ipotesi più debole ricordata; le sezioni che seguiranno questa sono indipendenti da quanto verrà esposto in questa sezione 23.

23.a. La nozione di quasi tutto.

La nozione di quasi tutto non è univocamente definita. Infatti per certi una certa quantità potrebbe essere quasi tutto, mentre per altri no. Per fare degli esempi uno potrebbe valutare così tanto un elemento che se ha quello ritiene di avere quasi tutto: sicché per lui la nozione di quasi tutto si applica a quegli insiemi a cui appartiene quell'elemento. Un altro potrebbe avere una simile nozione di quasi tutto ma per lui l'elemento di grandissimo valore potrebbe essere un altro sicché ha una diversa nozione di quasi tutto. Per un altro ancora quasi tutto potrebbe essere una enorme quantità di elementi togliendo un elemento alla quale rimane ancora una quantità da ritenersi quasi tutto. Ma in questo caso bisogna fare attenzione perché se la quantità è finita e togliendo un elemento alla volta si ritiene di mantenere una quantità che sia quasi tutto, si arriva all'insieme vuoto che chiaramente non si vuole che sia quasi tutto.

Si cercherà allora di stabilire quali caratteristiche deve avere una nozione di quasi tutto affinché sia accettabile.

Anzitutto si attribuirà la proprietà "quasi tutto" a sottinsiemi di un certo insieme X di elementi che ci interessano. Così le cose che saranno dette quasi tutto apparterranno a $\mathcal{P}(X)$, l'insieme dei sottinsiemi di X. Si noti che $\mathcal{P}(X)$ può essere ordinato (parzialmente) dalla relazione di inclusione, e che rispetto a questa relazione X è l'elemento massimo, $\varnothing$ è l'elemento minimo, e inoltre l'unione di due elementi è maggiore di ciascuno dei due, mentre l'intersezione di due elementi è minore di ciascuno dei due.

Sicuramente tutto X sarà un quasi tutto, mentre l'insieme vuoto $\emptyset$ non può essere quasi tutto.

Ancora, se un sottinsieme A di X è un quasi tutto e B è un sottinsieme di X che contiene A, allora anche B sarà un quasi tutto.

Se poi A e B sono sottinsiemi di X ciascuno ritenuto un quasi tutto, allora anche $A \cap B$ dovrà essere un quasi tutto. Quest'ultima caratteristica può sorprendere un po', ma ha una sua giustificazione. Anzitutto direi che è ragionevole dire che il complementare di un quasi tutto è un quasi niente, sicché due insiemi disgiunti non possono essere entrambi quasi tutto poiché uno è un sottinsieme del complementare dell'altro. Se l'intersezione tra due insiemi che riteniamo siano dei quasi tutto non è un quasi tutto, togliendo questa parte (un non quasi tutto) a ciascuno dei due insiemi (ciascuno un quasi tutto) dovrebbero restare dei quasi tutto, ma questi pezzi che restano sono disgiunti e non possono essere entrambi dei quasi tutto. Questa contraddizione ci spinge a ritenere che l'intersezione di due quasi tutto debba essere un quasi tutto.

Un insieme di sottinsiemi di X che gode delle proprietà enunciate viene detto un **filtro** su X.

Quelle esposte sono le proprietà di una nozione di quasi tutto che riteniamo caratterizzanti (Così un filtro su X sarà una nozione di quasi tutto per i sottinsiemi di X, e gli elementi del filtro sono sottinsiemi di X che siamo disposti a chiamare quasi tutto). Si tratta di vedere se ci sono sottinsiemi di $\mathcal{P}(X)$ i cui elementi godano delle proprietà enunciate sicché possano essere chiamati quasi tutto.

Ecco degli esempi.

Sia X un insieme non vuoto e *a* un suo elemento; si consideri l'insieme f dei sottinsiemi di X a cui *a* appartiene, cioè $f=\{S: S \subseteq X \text{ e } a \in S\}$. Si dimostri, per esercizio, che f è un filtro.

Sia X un insieme non vuoto e B un suo sottinsieme non vuoto; si consideri l'insieme f dei sottinsiemi di X che contengono B, cioè $f=\{S: S \subseteq X \text{ e } B \subseteq S\}$. Si dimostri, per esercizio, che f è un filtro.

Dato un insieme non vuoto X, l'insieme di sottinsiemi di X costituito dal solo insieme X è un filtro. Lo si dimostri per esercizio.

Dato un insieme infinito X si dimostri, per esercizio, che l'insieme dei suoi sottinsiemi il cui complementare è finito (cioè l'insieme dei cofiniti, come si usa dire) è un filtro.

Si dice che un insieme Δ di sottinsiemi di X gode della proprietà delle intersezioni finite (f.i.p.) se preso comunque un sottinsieme finito di Δ (i cui elementi $d_1,...,d_n$ sono sottinsiemi di X) l'intersezione su di esso è non vuota ($\cap\{d_1,...,d_n\} \neq \emptyset$).

TEOREMA. Un insieme Δ di sottinsiemi di un insieme X che gode della f.i.p. può essere esteso a (è contenuto in) un filtro su X.

Infatti sia $f=\{S: S \subseteq X$ e ci siano un numero finito di elementi $x_0,..., x_n$ di Δ tali che $x_0 \cap ... \cap x_n \subseteq S\}$. Si controlla che f è un filtro che contiene X.

DEFINIZIONE. Un filtro massimale (cioè tale che nessun insieme di sottinsiemi di X che lo contenga propriamente è un filtro) viene detto **ultrafiltro** su X.

TEOREMA. Un ultrafiltro su X è un filtro su X che ha l'ulteriore proprietà che per ogni sottinsieme di X o lui o il suo complementare appartiene all'ultrafiltro.

Dimostrazione. In una direzione: se ad un filtro appartiene o un sottinsieme di X o il suo complementare in X, chiaramente è massimale poiché un insieme $\mathcal{A}$ di sottinsiemi di X che lo contenga propriamente dovrà avere un elemento che non appartiene al filtro, cioè il cui complementare appartiene al filtro, per l'ipotesi fatta; sicché ad $\mathcal{A}$ apparterranno un sottinsieme di X e il suo complementare, ma la loro intersezione è vuota e $\mathcal{A}$ non può essere un filtro.

L'altra direzione richiede un po' più lavoro. Per assurdo ci sia un ultrafiltro f su X che non gode della proprietà enunciata. Allora ci sarà un sottinsieme non vuoto S di X tale che né lui né il suo complemento S^c appartengono all'ultrafiltro. Sia $f'=\{C: C \supseteq S \cap B$, con $B \in f\}$. Mostriamo che f' è un filtro che contiene f, e a cui S appartiene, contro l'ipotesi per ogni $B \in \mathscr{f}$, $B \supseteq S \cap B$ sicché $B \in \mathscr{f}'$. Infine vediamo che $\mathscr{f}'$ è un filtro controllando le proprietà che caratterizzano i filtri. Se $C' \supseteq C$ e $C \in \mathscr{f}'$ allora esiste $B \in \mathscr{f}$ tale che $C \supseteq S \cap B$; ma allora anche $C' \supseteq S \cap B$ e anche $C' \in \mathscr{f}'$. Ciò vale in particolare se C' è X. Siano ora C_1 e C_2 due elementi di $\mathscr{f}'$; allora esistono B_1 e B_2 appartenenti a $\mathscr{f}$ tali che $C_1 \supseteq S \cap B_1$ e $C_2 \supseteq S \cap B_2$; ma allora $C_1 \cap C_2 \supseteq (S \cap B_1) \cap (S \cap B_2) = S \cap B_1 \cap B_2$, e $C_1 \cap C_2$ appartiene a $\mathscr{f}'$. Da ultimo mostriamo che $\varnothing \notin \mathscr{f}'$; se, per assurdo, $\varnothing \in \mathscr{f}'$ ci sarebbe $B \in \mathscr{f}$ tale che $S \cap B = \varnothing$, ma allora $S^c \supseteq B$ e anche S^c sarebbe elemento di $\mathscr{f}$, contro le ipotesi fatte.

TEOREMA. Ogni filtro $\mathscr{f}$ su X può essere esteso a un ultrafiltro su X.

Dimostrazione. Questo risultato è una facile applicazione del lemma di Zorn che afferma che un insieme parzialmente ordinato ha massimali se ogni catena (sottinsieme totalmente ordinato) ha estremo superiore nell'insieme. (Si è già ricordato che il lemma di Zorn è equivalente all'assioma della scelta.) Sia Λ l'insieme dei filtri che contengono $\mathscr{f}$ ordinato parzialmente dall'inclusione. Mostriamo che una catena di filtri che contengono $\mathscr{f}$ ha per estremo superiore un filtro che contiene $\mathscr{f}$. Poiché la relazione d'ordine è l'inclusione, una catena è una successione di filtri su X che contengono $\mathscr{f}$, ciascuno che contiene i precedenti nella successione, e l'estremo superiore è l'unione sulla catena. Sia allora $(\mathscr{f}_j\colon j \in J)$ una successioni di filtri su X che contengono $\mathscr{f}$ e tali che $\mathscr{f}_i \subseteq \mathscr{f}_j$ se $i<j$, e sia $\mathfrak{F} = \cup\{\mathscr{f}_j\colon j \in J\}$. Si tratta di far vedere che $\mathfrak{F}$ è un filtro su X che contiene $\mathscr{f}$. Poiché $\mathscr{f}$ è contenuto in uno degli $\mathscr{f}_j$ (di fatto in tutti), $\mathscr{f}$ è contenuto anche nell'unione $\mathfrak{F}$. Gli elementi di $\mathfrak{F}$ sono elementi di qualche $\mathscr{f}_j$ e perciò sottinsiemi di X. Se poi $C' \supseteq C$ e $C \in \mathfrak{F}$, allora $C \in \mathscr{f}_j$ per qualche j, e anche $C' \in \mathscr{f}_j$, sicché anche $C' \in \mathfrak{F}$. Ciò vale in particolare se C' è X. Siano ora C_1 e C_2 due elementi di $\mathfrak{F}$; allora esistono i e j tali che $C_1 \in \mathscr{f}_i$ e $C_2 \in \mathscr{f}_j$; ma uno dei due filtri della successione contiene l'altro sicché sia C_1 che C_2 appartengono a quel filtro, ed anche la loro intersezione, che perciò appartiene anche a $\mathfrak{F}$. Infine l'insieme vuoto non appartiene a $\mathfrak{F}$ perché non appartiene ad alcuno degli $\mathscr{f}_j$. Così la dimostrazione delle premesse del lemma di Zorn è completa. Quindi ci sono filtri massimali rispetto all'inclusione, che sono stati chiamati ultrafiltri, che contengono $\mathscr{f}$.

La dimostrazione appena completata dice che la tesi del teorema è conseguenza del lemma di Zorn (o, equivalentemente, dell'assioma della scelta). Di fatto, come precedentemente ricordato, Halpern ha dimostrato che il **principio dell'ultrafiltro**, cioè l'affermazione che ogni filtro si può estendere ad un ultrafiltro, non può dimostrare l'assioma della scelta, sicché detto principio risulta essere un'assunzione più debole dell'assiome della scelta.

COROLLARIO. Ogni insieme di sottinsiemi di un insieme X che gode della fip può essere esteso ad un ultrafiltro.

Dimostrazione. Per i teoremi appena dimostrati, un tale insieme di sottinsiemi può essere esteso ad un filtro, e questo può essere esteso ad un ultrafiltro.

23.b. La regola 2 preserva la finita soddisfacibilità.

Ora si vuole mostrare che anche la regola 2 preserva la finita soddisfacibilità, cioè si vuol far vedere che se si applica la regola 2 ad un insieme di formule Γ finitamente soddisfacibile, allora almeno uno degli insiemi ottenuti dall'applicazione della regola è finitamente soddisfacibile. Si ricordi che gli insiemi ottenuti applicando la regola 2 possono essere tanti, ciascuno in corrispondenza di un modo di scegliere $\neg\alpha$ o $\neg\beta$ da ciascuna formula del tipo $\neg\wedge\alpha\beta$ in Γ, cioè ciascuno in corrispondenza di una funzione f che opera tali scelte. Si indichi con $\mathfrak{F}$ l'insieme di tali funzioni. Così si possono indicare con Γ_f gli insiemi ottenuti applicando la regola 2, per ciascuna funzione f appartenente a $\mathfrak{F}$. Ora, il fatto che la regola 2 preservi la finita soddisfacibilità si puo esprime dicendo che se Γ è finitamente soddisfacibile allora esiste una funzione f, appartenente a $\mathfrak{F}$, tale che Γ_f è finitamente soddisfacibile.

Sia Σ l'insieme dei sottinsiemi finiti S di formule di un insieme Γ e ogni elemento di Σ sia soddisfacibile (ciò equivale a dire che Γ è finitamente soddisfacibile). Per ogni S ap-

$\{\neg\wedge\alpha\beta: \neg\wedge\alpha\beta\in\Gamma\}$, e $S\sim=\{S': S'\supseteq S$ e $S'\in\Sigma\}$, in particolare $\{\neg\wedge\alpha\beta\}\sim=\{S': \neg\wedge\alpha\beta\in S'$ e $S'\in\Sigma\}$. Sia $\mathfrak{U}$ un ultrafiltro su Σ tale che $\mathfrak{P}(\Sigma)\supseteq\mathfrak{U}\supseteq\{S\sim: S\in\Sigma\}$: tale ultrafiltro $\mathfrak{U}$ esiste perché l'insieme $\{S\sim: S\in\Sigma\}$ gode della f.i.p. dal momento che, per ogni insieme finito $\{S_1\sim,...,S_n\sim\}$ sottinsieme di $\{S\sim: S\in\Sigma\}$, si ha che $(S_1\cup...\cup S_n)\in S_1\sim\cap...\cap S_n\sim$. Sia f una funzione di dominio Γ^* tale che $f(\neg\wedge\alpha\beta)=\neg\alpha$ oppure $f(\neg\wedge\alpha\beta)=\neg\beta$, e sia $\mathfrak{F}$ l'insieme di tali funzioni. Se Γ è finitamente soddisfacibile, e quindi un insieme aperto (cioè in cui non occorrono una formula e la sua negazione), la regola 2 applicata a Γ fa ottenere tanti nuovi insiemi di formule Γ_f, uno per ogni funzione f appartenente a $\mathfrak{F}$, tale che $\Gamma_f = \Gamma\cup\{f(\gamma): \gamma\in\Gamma^*\}$.

Si deve far vedere che c'è una funzione f appartenente a $\mathfrak{F}$ tale che Γ_f è finitamente soddisfacibile.

Si definisca una funzione g appartenente a $\mathfrak{F}$ nel modo seguente: $g(\neg\wedge\alpha\beta)=\neg\alpha$ se l'insieme, chiamiamolo $X_{\neg\alpha}$, degli elementi S di Σ per i quali l'interpretazione σ_S rende vera $\neg\alpha$ è un elemento dell'ultrafiltro $\mathfrak{U}$, cioè se $X_{\neg\alpha}=\{S: S\in\Sigma$ e $\neg\alpha^{\sigma_S}=V\}\in\mathfrak{U}$, altrimenti sia $g(\neg\wedge\alpha\beta)=\neg\beta$.

Si vuole mostrare che $X_{\neg\beta}=\{S: S\in\Sigma$ e $\neg\beta^{\sigma_S}=V\}\in\mathfrak{U}$ se $X_{\neg\alpha}\notin\mathfrak{U}$. Infatti se $X_{\neg\alpha}\notin\mathfrak{U}$ allora il suo complementare, che è $\{S: S\in\Sigma$ e $\neg\alpha^{\sigma_S}=F\}$, appartiene a $\mathfrak{U}$. Ma anche $\{\neg\wedge\alpha\beta\}\sim\in\mathfrak{U}$ (poiché è uno degli elementi dell'insieme che gode della proprietà delle intersezioni finite da cui si è partiti per ottenere $\mathfrak{U}$) e $\{\neg\wedge\alpha\beta\}\sim$, per la finita soddisfacibilità di Γ, è uguale a $\{S: S\in\Sigma$ e $\neg\wedge\alpha\beta^{\sigma_S}=V\}$, che, pertanto, pure apparterrà a $\mathfrak{U}$. Sicché sarà in $\mathfrak{U}$ anche l'intersezione tra il complementare di $X_{\neg\alpha}$ e $\{S: S\in\Sigma$ e $\neg\wedge\alpha\beta^{\sigma_S}=V\}$, che è contenuta nell'insieme $X_{\neg\beta}= \{S: S\in\Sigma$ e $\neg\beta^{\sigma_S}=V\}$ che apparterrà ad $\mathfrak{U}$ come si era affermato.

Si indichi con $Y_{\neg\wedge\alpha\beta}$ l'insieme $X_{\neg\alpha}$ se questo appartiene a $\mathfrak{U}$, l'insieme $X_{\neg\beta}$ altrimenti. Si noti che, per ogni S appartenente a $Y_{\neg\wedge\alpha\beta}$, σ_S rende vera la formula $g(\neg\wedge\alpha\beta)$. Inoltre si indichi con Σ_g l'insieme dei sottinsiemi finiti di Γ_g.

Si vuol far vedere che Σ_g ha ogni elemento soddisfacibile (cioè che Γ_g è finitamente soddisfacibile).

Sia S' un qualsiasi elemento di Σ_g. Sia $S_0=S'\cap\Gamma$, e $S_1=S'\setminus S_0$. Sia S_2 l'insieme delle formule di Γ^* da cui si sono ottenute quelle di S_1 mediante l'applicazione della regola 2, con l'attenzione che, se una formula di S_1 è ottenuta da più formule di Γ^*, in S_2 se ne metta una sola scelta tra queste. La finitezza di S' implica la finitezza di S_0, di S_1 e di S_2, e si indichino con $\neg\wedge\alpha_i\beta_i$, i=0,...,n-1 le formule di S_2 che si suppone siano n. Pertanto $S_1=\{g(\neg\wedge\alpha_i\beta_i): i<n\}$. Si considerino $S_0\sim$, e $Y_{\neg\wedge\alpha_i\beta_i}$ con i<n: essi appartengono all'ultrafiltro e così anche la loro intersezione $Z=S_0\sim\cap(\cap\{Y_{\neg\wedge\alpha_i\beta_i}: i<n\})$, essendo in numero finito. Allora c'è $\underline{S}$ appartenente a Z tale che nell'interpretazione $\sigma_{\underline{S}}$ sono vere le formule dell'insieme $S_0\cup\{g(\neg\wedge\alpha_i\beta_i): i<n\}=S'$. Infatti le formula di S_0 sono vere in $\sigma_{\underline{S}}$ poiché $\underline{S}\supseteq S_0$, e, per ogni i<n, $g(\neg\wedge\alpha_i\beta_i)$ è vera nell'interpretazione $\sigma_{\underline{S}}$ poiché $\underline{S}$ appartiene a $Y_{\neg\wedge\alpha_i\beta_i}$.

Così ogni elemento di Σ_g è soddisfacibile, e ciò mostra che anche la regola 2 preserva la finita soddisfacibilità di almeno uno degli insiemi ottenuti applicando a Γ la regola 2.

Poiché nella dimostrazione iniziale del teorema di completezza si era fatto uso dell'assioma della scelta solo nel mostrare che la regola 2 preserva la soddisfacibilità, avendo dimostrato quest'ultima affermazione con il solo ricorso al principio dell'ultrafiltro e non all'assioma della scelta, si può concludere che il teorema di completezza dipende solo dal principio dell'ultrafiltro. Ci si potrebbe domandare se non si può fare ancor di meglio, cioè dimostrare il teorema di completezza partendo da ipotesi ancor più deboli del principio dell'ultrafiltro. Ma la risposta è negativa: infatti, senza far ricorso a principi più forti del principio dell'ultrafiltro, dal teorema di completezza e dal teorema di compattezza (che pure segue da quanto ottenuto) si dimostrerà il principio dell'ultrafiltro.

24. LA COMPATTEZZA ED ALCUNE SUE CONSEGUENZE.

Avendo dimostrato che le regole 1 e 2 preservano la finita soddisfacibilità, si può asserire che, se si costruisce la successione di alberi finiti di confutazione T_n, partendo dall'albero T_0 che ha solo la radice costituita dall'insieme Γ finitamente soddisfacibile, e applicando le regole $R_{1,n}$ e R_2, ciascuno di questi alberi T_n ha almeno una foglia tale che l'insieme delle formule occorrenti in essa è finitamente soddisfacibile, e quindi aperta, e i nodi che la precedono sono dello stesso tipo essendo contenuti in questa. Così l'albero $T^{\infty}=\cup\{T_n: n\in \mathbb{N}\}$ ha almeno un ramo infinito tale che ogni suo nodo è costituito da un insieme di formule finitamente soddisfacibile. Ne segue che, appunto nel caso in cui Γ è finitamente soddisfacibile, l'albero T^{∞} dovrà avere almeno un ramo aperto (altrimenti quel ramo contiene una formula in un nodo e la sua negazione in un altro nodo del ramo, ed allora sia la formula che la sua negazione occorrono in quello dei due nodi che segue l'altro e costituiscono un insieme finito che dovrebbe essere soddisfacibile: impossibile). Allora l'insieme delle formule che occorrono in quel ramo aperto è un insieme di Hintikka, e dunque soddisfacibile, come si è già visto.

Poiché tale insieme include le formule occorrenti nella radice, anche l'insieme delle formule occorrenti nella radice è soddisfacibile.

Così dalla finita soddisfacibilità di Γ si è giunti alla soddisfacibilità di Γ.

D'altra parte è ovvio che se un insieme di formule è soddisfacibile allora anche ogni suo sottinsieme, in particolare finito, è soddisfacibile, essendo le sue formule vere in una realizzazione che rende vere le formule dell'insieme iniziale.

Abbiamo così dimostrato il seguente

Teorema di Compattezza (semantico): Ogni sottinsieme finito di un insieme Φ di formule in un linguaggio di cardinalità arbitraria è soddisfacibile, se e solo se l'insieme Φ di formule è soddisfacibile. Detto altrimenti (contronominale), un insieme di formule è non soddisfacibile, se e solo se c'è un suo sottinsieme finito che è non soddisfacibile.

Immediata conseguenza di questo risultato, utilizzando il teorema di completezza, è il seguente:

Teorema di Compattezza (sintattico): Un insieme di formule ha albero chiuso se e solo se c'è un suo sottinsieme finito che ha albero chiuso.

Si osservi che quanto si è sviluppato per l'analisi a blocchi e per l'analisi della finita soddisfacibilità è corretto a partire da un qualsiasi insieme di formule in un linguaggio arbitrario: in particolare si può anche partire da un insieme finito di formule (in tal caso soddisfacibilità e finita soddisfacibilità coincidono). Ma, se l'insieme iniziale di formule è finito, si è già visto che per decidere della soddisfacibilità o meno dell'insieme di formule iniziale non è necessario ricorrere all'albero unione degli alberi della successione, ma già uno di questi sarà chiuso se l'insieme dato è non soddisfacibile. Il teorema di compattezza potrebbe permettere di estendere il risultato di semidecibilità del metodo degli alberi di confutazione per gli alberi costruiti a partire da un insieme finito anche al caso di alberi costruiti a partire da un insieme infinito che lo contenga se si trovasse un legame tra gli alberi costruiti a partire da un insieme di formule e gli alberi costruiti a partire da un suo sottinsieme.

Si osservi ora che (come si può dimostrare per induzione sull'indice degli alberi della successione) tra la successione di alberi costruita a partire da un certo insieme di formule per rappresentare l'analisi a blocchi e la successione di alberi costruita a partire da un sottinsieme di quell'insieme di formule, sempre per rappresentare l'analisi a blocchi, sussiste la seguente relazione:

Teorema. Ogni nodo dell'n-esimo albero T_n della prima successione costruita a partire da un insieme di formule contiene un nodo di ugual livello dell'n-esimo albero $T^\wedge_n$ della seconda successione costruita a partire da un sottinsieme di quell'insieme di formule.

DIMOSTRAZIONE. E' sufficiente mostrare, per induzione su n, che ogni foglia a livello n in T_n contiene una foglia a livello n di $T^\wedge_n$. Per n=0 il risultato è ovvio. Si tratta di mostrare che detta proprietà si preserva al passare da n a n+1. Bisogna distinguere i due casi n pari e n dispari perché se n è pari il passaggio avviene applicando la regola 1, n/2, Sia dunque n un numero pari e si supponga, per ipotesi induttiva, che ciascuna foglia a livello n di T_n contenga una foglia a livello n di $T^\wedge_n$. Si può constatare, in base alla descrizione della regola 1, n/2, che se questa è applicata sia ad un insieme Γ che ad un suo sottinsieme $\Gamma^\wedge$ produce un due nuovi insiemi, Γ' e $\Gamma^\wedge{}'$ rispettivamente, tali che Γ' contiene $\Gamma^\wedge{}'$. Così ciascuna foglia ν' a livello n+1 nell'albero T_{n+1}, ottenuta dalla foglia ν dell'albero T_n mediante la regola 1,n/2 (ν deve essere aperta), conterrà la foglia a livello n+1 dell'albero $T^\wedge_{n+1}$ che la regola 1,n/2 fa seguire immediatamente ad una foglia $\nu^\wedge$ a livello n dell'albero $T^\wedge_n$ che era contenuta nella foglia ν (e quindi $\nu^\wedge$ è aperta).

Si supponga ora che n sia un numero dispari e che, per ipotesi induttiva, ciascuna foglia ν a livello n di T_n contenga una foglia $\nu^\wedge$ a livello n di $T^\wedge_n$. L'insieme Γ^* delle formule di tipo $\neg\wedge\alpha\beta$ in ν contiene l'insieme $\Gamma^{\wedge *}$ delle formule dello stesso tipo in $\nu^\wedge$. Sia $\mathfrak{F}$ l'insieme delle funzioni f utilizzate dalla regola 2 per caratterizzare ciascuna delle foglie ν_f che seguono immediatamente a livello n+1 nell'albero T_{n+1} la foglia ν di T_n, e sia $\mathfrak{F}^\wedge$ l'analogo insieme di funzioni $f^\wedge$ utilizzate dalla regola 2 per caratterizzare ciascuna delle foglie $\nu^\wedge_{f^\wedge}$ che seguono immediatamente a livello n+1 nell'albero $T^\wedge_{n+1}$ la foglia $\nu^\wedge$ di $T^\wedge_n$ Così ciascuna funzione f appartenente a $\mathfrak{F}$ contiene una delle funzioni, diciamola $f^\wedge$, appartenenti a $\mathfrak{F}^\wedge$, anzi $f^\wedge$ è $f_{|\Gamma^{\wedge *}}$, la restrizione di f a $\Gamma^{\wedge *}$. (Se Γ^* contiene propriamente $\Gamma^{\wedge *}$, più funzioni hanno la stessa restrizione a $\Gamma^{\wedge *}$). E' immediato, dalla descrizioni di come opera la regola 2, che ν_f contiene $\nu^\wedge_{f^\wedge}$, sicché anche in questo caso abbiamo raggiunto la conclusione voluta.

Avendo completato l'esame dei vari casi e il passo dell'induzione, la dimostrazione del risultato enunciato è completa.

La proprietà appena dimostrata e il teorema di compattezza, prima dimostrato, permettono di concludere con la semidecidibilità del metodo dell'analisi a blocchi in ogni caso, anche a partire da insiemi arbitrari di formule, cioè permettono di dimostrare che

Teorema di semidecidibilità. L'albero unione T^∞ è chiuso se e solo se c'è un numero naturale n tale che l'albero T_n della successione è chiuso.

Infatti
- l'albero unione è chiuso
- se e solo se il nodo iniziale Γ non è soddisfacibile,
- se e solo se c'è un sottinsieme finito Δ delle formule di partenza che non è soddisfacibile,
- se e solo se esiste un numero naturale n tale che si chiude l'albero $T^\wedge_n$ della successione costruita a partire dall'insieme finito Δ,
- se e solo se è chiuso l'albero T_n costruito a partire dall'insieme di formule originale Γ in quanto ogni sua foglia, o è ad un livello minore di n e chiusa (se non fosse chiusa non sarebbe foglia di T_n) o è a livello n e contiene una foglia chiusa dell'albero $T^\wedge_n$ costruito a partire dal sottinsieme finito Δ di formule in quanto ogni nodo di $T^\wedge_n$ a livello n è una foglia chiusa.

Dai risultati ottenuti segue anche il

Teorema di Löwenheim Skolem (debole). Se un insieme di enunciati Γ ha modello infinito allora ha modelli di qualsiasi cardinalità maggiore od uguale alla cardinalità del linguaggio.

Ovviamente dire che un modello è infinito vuol dire che la sua cardinalità, che come si sa è la cardinalità del suo universo, è infinita.

DIMOSTRAZIONE. Sia k una qualsiasi cardinalità maggiore od uguale alla cardinalità del linguaggio $\mathfrak{L}$. Sia C un insieme, di cardinalità k, di nuovi simboli per costanti. Sia Σ l'insieme di enunciati del tipo $\neg c=c'$ per ogni coppia c, c' di simboli per costanti tra loro diversi in C. E' chiaro che ogni modello di Σ deve avere un universo di cardinalità almeno k per poter interpretare in elementi diversi i simboli di costante di C e così rendere veri tutti gli enunciati di Σ. Sia $\mathfrak{L}'$ il linguaggio ottenuto dal linguaggio iniziale in cui è espresso l'insieme di enunciati Γ aggiungendo l'insieme di nuovi simboli per costanti C.

La cardinalità di $\mathfrak{L}'$ è proprio k.

Si vuole mostrare che l'insieme di enunciati $\Gamma\cup\Sigma$ è soddisfacibile. Il risultato può essere ottenuto facendo vedere che ogni sottinsieme finito di $\Gamma\cup\Sigma$ è soddisfacibile e sfruttando il teorema di compattezza.

Di fatto in un tale sottinsieme finito S occorrono al più un certo numero, diciamo m_S, di nuovi simboli per costante di C, e si può espandere il modello infinito di Γ, che c'è per ipotesi, interpretando gli m_S simboli per costante di C occorrenti in S in elementi diversi ed interpretando gli altri simboli per costante di C come si vuole. In questa realizzazione che espande il modello di Γ sono vere tutte le formule del sottinsieme finito S (quelle anche di Γ perché la realizzazione espande un modello di Γ, le altre che sono anche in Σ per il particolare modo di eseguire l'espansione). Così, data l'arbitrarietà del sottinsieme finito S, si può concludere che ogni sottinsieme finito di $\Gamma\cup\Sigma$ è soddisfacibile. Così, appunto per il teorema di compattezza, $\Gamma\cup\Sigma$ è soddisfacibile. Tra i suoi modelli c'è certo quello basico che ha per universo le classi di equivalenza di termini del linguaggio $\mathfrak{L}'^{\infty}$ occorrenti nell'insieme di Hintikka che è un ramo aperto dell'albero T^{∞} ottenuto come unione degli alberi di confutazione costruiti a partire dall'insieme $\Gamma\cup\Sigma$ (essendo questo soddisfacibile, esisterà un ramo aperto dell'albero T^{∞}). Ovviamente queste classi non possono essere più della cardinalità k del linguaggio $\mathfrak{L}'^{\infty}$(ottenuto da $\mathfrak{L}'$ aggiungendo i simboli di costante necessari per analizzare le formule del tipo $\neg\forall$), che ha la stessa cardinalità del linguaggio $\mathfrak{L}'$. Ma, come si è osservato, Σ, e perciò anche $\Gamma\cup\Sigma$, non può avere modelli di cardinalità minore di k. Così il modello costruito a partire dalle classi di equivalenza di termini avrà cardinalità esattamente k, come volevasi dimostrare.

Si ricordi che due strutture, $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$, dello stesso tipo si dicono isomorfe, e si scriverà $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, se esiste una biiettività (detta isomorfismo) dall'universo della prima sull'universo della seconda che preserva la struttura. Una funzione dall'universo di una struttura nell'universo di un'altra preserva la struttura se sono soddisfatte le seguenti condizioni:
1) per ogni relazione n-aria R della prima struttura una qualsiasi n-upla $a_1,...,a_n$ del suo universo appartiene alla relazione R se e solo se l'n-upla $f(a_1),...,f(a_n)$ che le corrisponde attraverso la funzione appartiene alla corrispondente relazione (cioè la relazione, nella seconda struttura, associata al predicato associato alla relazione R); e inoltre
2) per ogni funzione n-aria F della prima struttura che fa corrispondere ad una qualsiasi data n-upla $a_1,...,a_n$ del suo universo l'elemento a, la corrispondente funzione (cioè la funzione, nella seconda struttura, associata al simbolo di funzione associato alla funzione F) fa corrispondere all'n-upla $f(a_1),..., f(a_n)$ l'elemento $f(a)$; ed infine
3) ad ogni costante c della prima struttura la funzione f fa corrispondere la corrispondente costante (cioè la costante, nella seconda struttura, associata al simbolo di costante associato alla costante c).

La nozione di isomorfismo tra strutture collega strutture che non si distinguono per il comportamento degli elementi (elementi corrispondenti si comportano nello stesso modo), ma solo per l'identità degli elementi, fatto questo difficilmente accertabile, e, spesso, di scarsa rilevanza. Si può dire che due strutture isomorfe non sono distinguibili dal loro manifestarsi, e sono sostanzialmente la stessa struttura.

Ricordando la nozione di isomorfismo (che dice quando due strutture non sono distinguibili in base al loro comportamento), dal teorema di Lowenheim Skolem si può ottenere il seguente

Corollario. Un insieme di enunciati che ha modello infinito ha modelli tra loro non isomorfi.

Infatti ha modelli di ogni cardinalità maggiore od uguale alla cardinalità del linguaggio, ma due modelli di diversa cardinalità non possono essere tra loro isomorfi.

Ricordando la nozione di elementare equivalenza (che dice quando due strutture non possono essere distinte mediante il linguaggio formale a loro adatto), il precedente teorema ha anche il seguente

Corollario Sia $\mathfrak{A}$ una struttura infinita, allora esiste una struttura $\mathfrak{B}$ non isomorfa ad $\mathfrak{A}$ tale che $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$. Detto altrimenti una struttura infinita non può essere univocamente caratterizzata (a meno di isomorfismi) in un qualsiasi linguaggio in cui è descritta.

DIMOSTRAZIONE. Infatti, per il corollario al teorema di Löwenheim Skolem, Th($\mathfrak{A}$) ha modelli non isomorfi avendo un modello infinito, che tuttavia saranno elementarmente equivalenti, relativamente al linguaggio adatto ad $\mathfrak{A}$, proprio perché sono modelli di Th($\mathfrak{A}$).

Si ricordi che nella sezione 11 si era già dimostrato il ben diverso risultato nell'altra direzione. Infatti si era mostrato il seguente

Teorema. Se due strutture sono isomorfe, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, allora sono elementarmente equivalenti, $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$.

L'ipotesi che l'insieme di enunciati considerato nel precedente teorema di Lowenheim Skolem abbia modello infinito, può essere leggermente indebolita assumendo, invece, che ci siano modelli finiti arbitrariamente grandi, perché, in tal caso, si dimostra che l'insieme di enunciati ha anche modelli infiniti. Infatti vale il seguente

Teorema. Se un insieme Γ di enunciati ha modelli finiti arbitrariamente grandi allora ha anche modelli infiniti.

Affermando che Γ ha modelli finiti arbitrariamente grandi si vuol dire che fissato un qualunque numero naturale m c'è un modello finito di Γ con almeno m elementi nell'universo (di certo non si vuol dire che c'è un certo modello che è finito e che contemporaneamente è arbitrariamente grande (ha cardinalità maggiore di ogni numero naturale), affermazione che non ha senso).

DIMOSTRAZIONE. Sia C un insieme numerabile di nuovi simboli per costante non nel linguaggio usato per le formule di Γ, e si consideri il seguente insieme di enunciati $\Sigma = \{\neg c_i = c_j$: c_i e c_j appartengono a C e $i \neq j\}$. Chiaramente un modello di Σ deve essere almeno numerabile. Si consideri ora l'insieme di enunciati $\Gamma\cup\Sigma$. Se questo è soddisfacibile allora c'è un modello di Γ che è infinito. Sicché resta da dimostrare che $\Gamma\cup\Sigma$ è soddisfacibile. Ancora si sfrutta il teorema di compattezza facendo vedere che, nelle ipotesi enunciate, ogni sottinsieme finito di $\Gamma\cup\Sigma$ è soddisfacibile. In effetti, sia Δ un sottinsieme finito di $\Gamma\cup\Sigma$. In Δ occorrono un numero finito q_Δ di nuovi simboli per costanti. Per ipotesi si sa che Γ ha modelli finiti di cardinalità maggiore di un qualsiasi numero naturale, in particolare ha modelli finiti di cardinalità maggiore di q_Δ. Sia $\mathfrak{A}$ un tale modello (il modello è ora una struttura, e non una realizzazione, perché è modello di un insieme di enunciati e non è rilevante l'attribuzione di valori alle variabili). Si espanda $\mathfrak{A}$ ad una nuova struttura $\mathfrak{B}$ adatta al linguaggio arricchito con i nuovi simboli di costante in cui i nuovi simboli di costante occorrenti in Δ vengono interpretati in elementi a due a due diversi, e gli altri nuovi simboli di costanti vengono interpretati come si vuole. Ciò è possibile perché i simboli di costante da interpretare in maniera diversa sono q_Δ e l'universo della struttura ha almeno q_Δ elementi. La struttura $\mathfrak{B}$ è allora modello di Δ, che risulta soddisfacibile. Poiché Δ era un qualsiasi sottinsieme finito di $\Gamma\cup\Sigma$, per il teorema di compattezza, $\Gamma\cup\Sigma$ è pure soddisfacibile, e un suo modello oltre a rendere vere gli enunciati di Γ sarà anche infinito, dovendo rendere veri gli enunciati di Σ, come si voleva.

Tuttavia l'ipotesi nel teorema di Lowenheim Skolem che ci sia un modello infinito non può essere indebolita più di quanto fatto nel precedente teorema, come mostra il seguente

Teorema La teoria di una struttura finita ha solo modelli isomorfi a quella struttura.

DIMOSTRAZIONE. Si ricordi che la teoria di una struttura è l'insieme degli enunciati veri in quella struttura, e, come si è visto, questo insieme di enunciati è completo (nel senso che per ogni enunciato del linguaggio o lui o la sua negazione appartiene all'insieme), sicché ogni suo modello avrà la stessa teoria, cioè sarà elementarmente equivalente alla struttura data. Inoltre si sa che per ogni numero naturale n c'è un enunciato, lo si chiami

φ_n, vero esattamente nelle strutture il cui universo ha cardinalità n. Sia $\mathfrak{A}$ la struttura data, abbia cardinalità n_0, e, al solito, sia Th($\mathfrak{A}$) la sua teoria. Ovviamente φ_{n_0} appartiene a Th($\mathfrak{A}$), sicché ogni modello di questa teoria dovrà avere esattamente n_0 elementi nell'universo. Sia $\mathfrak{B}$ un altro modello di Th($\mathfrak{A}$). Si deve far vedere che $\mathfrak{B}$ è isomorfo ad $\mathfrak{A}$. Per far ciò si deve cercare di far corrispondere ad ogni elemento dell'universo A di $\mathfrak{A}$ uno ed un solo elemento dell'universo B di $\mathfrak{B}$. Per trovare il corrispondente, l'idea è di cercare di caratterizzare mediante il linguaggio un elemento dell'universo A di $\mathfrak{A}$ e vedere se nell'universo B di $\mathfrak{B}$ può essere individuato un elemento che soddisfa la stessa caratterizzazione linguistica.

Per caratterizzare mediante il linguaggio un individuo in una struttura è naturale considerare tutte le formule con una sola variabile libera vere in quella struttura quando la variabile viene interpretata nell'individuo che si vuol caratterizzare. Così, se nella struttura $\mathfrak{A}$ con universo A si vuol caratterizzare l'elemento *a*, si considererà il seguente insieme di formule con al più una variabile libera, $X_1= \{\varphi(v_0)\colon \mathfrak{A}|=\varphi(v_0)[a]\}$, che è generalmente detto il **tipo** dell'elemento *a* nella struttura $\mathfrak{A}$. Si noti che, per definizione, X_1 contiene propriamente Th($\mathfrak{A}$). In un modello del tipo di *a*, che sarà una struttura $\mathfrak{C}$ con l'attribuzione di un valore alla variabile v_0 almeno, ci dovrà essere un elemento *c* (appunto il valore attribuito a v_0) che renderà vere in $\mathfrak{C}$ tutte le formule di X_1, cioè tale che, per ogni formula $\varphi(v_0)$ nel tipo di *a*., $\mathfrak{C}|=\varphi(v_0)[c]$.

Ma l'ipotesi del teorema che si sta cercando di dimostrare chiede di considerare i modelli di Th($\mathfrak{A}$), e non del più ricco insieme X_1. Per cercare di ricondurre le informazioni che vengono dal tipo di *a* ad enunciati in Th($\mathfrak{A}$), si possono considerare gli enunciati ottenuti dalle formule di X_1 quantificandole esistenzialmente rispetto alla variabile v_0, cioè affermando che, per ciascuna formula del tipo di *a*, c'è almeno un elemento dell'universo (di fatto c'è *a*) che le rende vere quando la variabile v_0 è interpretata in quell'elemento: gli enunciati così ottenuti, cioè quelli dell'insieme $Y_1= \{\exists v_0\varphi(v_0)\colon \varphi(v_0)\in X_1\}$ saranno sicuramente in Th($\mathfrak{A}$).

Ma, a priori, gli enunciati di Y_1 non sono sufficienti per caratterizzare un elemento di un modello di Th($\mathfrak{A}$) perché non è detto che l'elemento del modello che giustifica la verità di una formula esistenziale di Y_1 sia lo stesso di quello che giustifica la verità di un'altra formula esistenziale di Y_1. Tuttavia l'ipotesi che la struttura $\mathfrak{A}$ sia finita (da cui segue, come si è visto, che anche un modello $\mathfrak{B}$ di Th($\mathfrak{A}$) sia finito) comporta che sia unico l'elemento che giustifica la verità delle formule di Y_1. Infatti, se per assurdo non lo fosse, per ogni elemento b dell'universo B di $\mathfrak{B}$, ci dovrebbe essere una formula, diciamola $\varphi_b(v_0)$, di X_1, per la quale non è vero che $\mathfrak{B}|=\varphi_b(v_0)[b]$. Poiché gli elementi di B sono in numero finito, si può considerare la formula ottenuta prendendo la congiunzione di queste formule, ciascuna in corrispondenza di un b in B, cioè la formula $\psi(v_0)$ che è $\wedge\{\varphi_b(v_0)\colon b\in B\}$, che non può essere vera nella struttura $\mathfrak{B}$ comunque la variabile v_0 sia interpretata in un elemento b di B (per ciascun b in B almeno uno dei congiunti sarebbe falso). D'altra parte, la quantificazione esistenziale di tale formula, cioè la formula $\exists v_0\psi(v_0)$, è una formula di Th($\mathfrak{A}$) perché per ogni b appartenente a B la formula $\varphi_b(v_0)$ appartiene a X_1, cioè è vera nella struttura $\mathfrak{A}$ quando la variabile v_0 viene interpretata in *a*; sicché anche la congiunzione $\psi(v_0)$ è vera nella struttura $\mathfrak{A}$ quando la variabile v_0 viene interpretata in *a*; e quindi è vero in $\mathfrak{A}$ anche l'enunciato ottenuto per quantificazione esistenziale. Ma allora $\mathfrak{B}|=\exists v_0\psi(v_0)$ e ci deve essere un elemento, diciamolo $\underline{b}$, di B tale che $\mathfrak{B}|=\psi(v_0)[\underline{b}]$, assurdo. Pertanto, come era stato asserito, in $\mathfrak{B}$ gli enunciati esistenziali di Y_1 sono resi veri tutti da uno stesso elemento *b* dell'universo B di $\mathfrak{B}$, cioè in B c'è almeno un elemento *b* tale che, per ogni formula $\varphi(v_0)$ appartenente a X_1, si ha che $\mathfrak{B}|=\varphi(v_0)[b]$.

Ma non basta caratterizzare mediante il linguaggio l'elemento *a* e trovargli un corrispondente in $\mathfrak{B}$ per definire una funzione che dovrà essere un isomorfismo da $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$, ma bisognerà caratterizzare linguisticamente tutti gli elementi dell'universo A di $\mathfrak{A}$. Ingenualemento dell'universo A di $\mathfrak{A}$, cioè considerare i tipi di ciascun elemento di A. Però potrebbe succedere che due elementi a_0 e a_1 di A, pur essendo diversi soddisfino lo stesso tipo. Si noti che il tipo di un elemento è formato da formule con una sola variabile libera e non vi può appartenere la formula $\neg v_0=v_1$ che potrebbe distinguere tra gli elementi a_0 e a_1: infatti $\mathfrak{A}\models\neg v_0=v_1[a_0,a_1]$ e ogni modello di $\neg v_0=v_1$ deve interpretare le due variabili in modo diverso. Così i tipi dei singoli elementi dell'universo di A non sono sufficienti per caratterizzarli linguisticamente in modo differenziato. (Si noti che finora non si sono fatti passi sostanziali verso la dimostrazione del teorema, ma si sono solo esplorate alcune vie per capire il contesto, i possibili attacchi e le difficoltà da superare per giungere alla dimostrazione del teorema; ora, prendendo ispirazione da quanto si è discusso, si presenterà la dimostrazione cercata)

Siccome A ha n_0 elementi, si può pensare che A sia $\{a_0,a_1,...,a_{n_0-1}\}$. Così per caratterizzare linguisticamente tutti gli elementi di A si considererà il seguente insieme di formule con al più n_0 variabili libere

$$X = \{\varphi(v_0,v_1,...,v_{n_0-1}): \mathfrak{A}\models\varphi(v_0,v_1,...,v_{n_0-1})[a_0,a_1,...,a_{n_0-1}]\}.$$

Si noti che X contiene gli enunciati $\neg v_{i_0}=v_{i_1}$ con i_0 e i_1 minori di n_0 e diversi tra loro: infatti $\mathfrak{A}\models\neg v_{i_0}=v_{i_1}[a_0,a_1,...,a_{n_0-1}]$ proprio perché a v_{i_0} viene attribuito il valore a_{i_0} e a v_{i_1} viene attribuito il valore a_{i_1} e questi due valori sono diversi. Ad X si può associare l'insieme

$$Y=\{\exists v_0\exists v_1...\exists v_{n_0-1}\varphi(v_0,v_1,..,v_{n_0-1}): \varphi(v_0,v_1,..,v_{n_0-1})\in X\}$$

di enunciati ciascuno dei quali è ottenuto per quantificazione esistenziale da una formula di X. E' chiaro che Y è un sottinsieme di Th($\mathfrak{A}$), sicché ogni suo enunciato è vero nella struttura $\mathfrak{B}$, se questa è un modello di Th($\mathfrak{A}$). Ma, a priori, non è detto che in $\mathfrak{B}$ questi enunciati esistenziali siano resi veri tutti da una stessa n_0-upla ordinata $(b_0,b_1,...,b_{n_0-1})$ di elementi dell'universo B di $\mathfrak{B}$.

Invece è proprio così. Infatti, se per assurdo non lo fosse, per ogni n_0-upla ordinata $(b_0,b_1,...,b_{n_0-1})$ dell'universo B ci dovrebbe essere una formula, la si chiami $\varphi_{b_0,b_1,...,b_{n_0-1}}(v_0,v_1,...,v_{n_0-1})$, di X, per la quale non è vero che $\mathfrak{B}\models\varphi_{b_0,b_1,...,b_{n_0-1}}(v_0, v_1,...,v_{n_0-1})[b_0,b_1,...,b_{n_0-1}]$. Poiché le n_0-uple ordinate di elementi di B sono in numero finito, si può considerare la formula ottenuta prendendo la congiunzione di queste formule, ciascuna in corrispondenza di una n_0-upla ordinata in B, cioè la formula $\psi(v_0,v_1,...,v_{n_0-1})$ che è $\wedge\{\varphi_{b_0,b_1,...,b_{n_0-1}}(v_0,v_1,...,v_{n_0-1}): (b_0,b_1,...,b_{n_0-1})\in B^{n_0}\}$, che non può essere vera nella struttura $\mathfrak{B}$ quando le variabili $v_0,v_1,...,v_{n_0-1}$ sono interpretate in una qualsiasi n_0-upla di elementi dell'universo B di $\mathfrak{B}$ (per ciascun $(b_0,b_1,..,b_{n_0-1})\in B^{n_0}$ almeno uno dei congiunti è falso). D'altra parte, la quantificazione esistenziale di tale formula, cioè la formula $\exists v_0\exists v_1...\exists v_{n_0-1}\psi(v_0,v_1,...,v_{n_0-1})$, è una formula di Th($\mathfrak{A}$) perché per ogni $(b_0,b_1,..,b_{n_0-1})\in B^{n_0}$ la formula $\varphi_{b_0,b_1,...,b_{n_0-1}}(v_0,v_1,...,v_{n_0-1})$ appartiene a X, cioè è vera nella struttura $\mathfrak{A}$ quando le variabili $v_0,v_1,...,v_{n_0-1}$ sono interpretate rispettivamente in $a_0,a_1,...,a_{n_0-1}$; sicché anche la congiunzione $\psi(v_0,v_1,...,v_{n_0-1})$ è vera nella struttura $\mathfrak{A}$ quando le variabili $v_0,v_1,...,v_{n_0-1}$ sono interpretate rispettivamente in $a_0,a_1,...,a_{n_0-1}$; e quindi è vero in $\mathfrak{A}$ anche l'enunciato ottenuto per quantificazione esistenziale. Ma allora $\mathfrak{B}\models\exists v_0\exists v_1...\exists v_{n_0-1}\psi(v_0,v_1,...,v_{n_0-1})$ e ci deve essere una n_0-upla ordinata di elementi, diciamola $(\underline{b}_0,\underline{b}_1,...,\underline{b}_{n_0-1})$, di B tale che $\mathfrak{B}\models\psi(v_0,v_1,...,v_{n_0-1})$ $[\underline{b}_0,\underline{b}_1,...,\underline{b}_{n_0-1}]$, assurdo. Pertanto, come era stato asserito, in $\mathfrak{B}$ gli enunciati esistenziali di Y possono essere resi veri tutti da una stessa n_0-upla ordinata di elementi dell'universo B di $\mathfrak{B}$, cioè in B c'è almeno una n_0-upla ordinata $(b_0,b_1,...,b_{n_0-1})$ di elementi di B tale che, per ogni formula $\varphi(v_0,v_1,...,v_{n_0-1})$ appartenente a X, si ha che $\mathfrak{B}\models\varphi(v_0,v_1,...,v_{n_0-1})[b_0,b_1,...,b_{n_0-1}]$.

Poiché, come si è osservato, le formule $\neg v_{i_0}=v_{i_1}$ con i_0 e i_1 minori di n_0 e diversi tra loro terpretate in $b_0,b_1,...,b_{n_0-1}$ rispettivamente. Pertanto gli elementi di questa n_0-upla ordinata $(b_0,b_1,...,b_{n_0-1})$ devono essere a due a due diversi, e includeranno tutti gli elementi di B essendo n_0 elementi.

Si è così riusciti a stabilire una corrispondenza biiettiva, diciamola f, tra gli elementi di A e quelli di B che occupino un ugual posto nelle due n_0-uple ordinate $(a_0,a_1,...,a_{n_0-1})$ e $(b_0,b_1,...,b_{n_0-1})$.

Resta da dimostrare che f è un isomorfismo, cioè che essa preserva la struttura. Ciò vuol dire che bisogna dimostrare che per ogni R, relazione k-aria in $\mathfrak{A}$, e ogni k-upla ordinata $(a_1,...,a_k)$ di elementi di A, si ha che $(a_1,...,a_k)\in R$ se e solo se la corrispondente k-upla ordinata di elementi di B $(f(a_1),...,f(a_k))$ appartiene a R', dove R' è la relazione k-aria in $\mathfrak{B}$ che corrisponde a R (cioè ha ugual nome, diciamo il predicato P). Inoltre bisogna dimostrare che per ogni funzione h-aria F in $\mathfrak{A}$, e ogni h-upla (incluso il caso che h sia 0 per non dover trattare separatamente le costanti) ordinata $(a_1,...,a_h)$ di elementi di A, si ha che $f(F(a_1,..., a_h))=F'(f(a_1),...,f(a_h))$, dove F' è la funzione h-aria in $\mathfrak{B}$ che corrisponde a F (cioè ha ugual nome, diciamo il simbolo di funzione f). Ma questi fatti possono essere descritti con il linguaggio mediante formule atomiche. In effetti ogni elemento a_j, j=1,...,k, della k-upla $(a_1,...,a_k)$ è un elemento a_{n_j} dell'insieme ordinato di tutti gli elementi di A $(a_0,a_1,...,a_{n_0-1})$, e la k-upla $(a_1,...,a_k)$ può essere indicata come $(a_{n_1},...,a_{n_k})$, sicché $(a_1,...,a_k)\in R$ se e solo se $\mathfrak{A}\models Pv_{n_1}..\,.v_{n_k}[a_0,a_1,...,a_{n_0-1}]$, se e solo se $\mathfrak{B}\models Pv_{n_1}...v_{n_k}[b_0,b_1,...,b_{n_0-1}]$, se e solo se $(f(a_1),..\,.,f(a_k))\in R'$. Analogamente, supposto che $F(a_1,...,a_h)=a=a_{n_{h+1}}$, si ha che $F(a_1,..,a_h)=a$ se e solo se $\mathfrak{A}\models fv_{n_1}...v_{n_h}=v_{n_{h+1}}[a_0, a_1,...,a_{n_0-1}]$, se e solo se $\mathfrak{B}\models fv_{n_1}...v_{n_h}=v_{n_{h+1}}[b_0,b_1,...,b_{n_0-1}]]$, se e solo se $f(F(a_1,..\,.,a_h))=f(a)=F'(f(a_1),...,f(a_h))$.

Così f è davvero un isomorfismo e la dimostrazione è completata.

Per avere esempi di strutture elementarmente equivalenti ma non isomorfe, si è fatto ricorso al teorema debole di Lowenheim Skolem facendo cadere l'isomorfismo a causa della diversa cardinalità delle strutture. Ma si possono fare anche esempi di strutture elementarmente equivalenti, della stessa cardinalità, ma non isomorfe. Per esibire un tale esempio si farà ricorso ancora direttamente al teorema di compattezza.

Teorema. Si consideri l'usuale struttura dei numeri naturali $\mathfrak{N}=(|N,\{\equiv,\angle\},\{succ,\oplus,\oplus\},\{0\})$, dove |N rappresenta l'insieme dei numeri naturali, $\equiv$ la relazione binaria di essere lo stesso numero, $\angle$ l'usuale relazione binaria d'ordine tra numeri naturali, succ la funzione successore immediato, $\oplus$ l'addizione tra numeri naturali, $\oplus$ la moltiplicazione tra numeri naturali e *0* il numero naturale zero. Sia $\mathfrak{L}$ un linguaggio adatto alla struttura introdotta i cui simboli propri siano rispettivamente i predicati = e <, i simboli per funzione ', + e $\times$, e il simbolo per costante 0. Esiste una struttura numerabile $\mathfrak{N}'$, elementarmente equivalente ad $\mathfrak{N}$, ma non isomorfa a questa.

DIMOSTRAZIONE. Come già osservato, per essere elementarmente equivalenti, due strutture devono essere modello della stessa teoria, in questo caso della $Th(\mathfrak{N})$.

Poiché si è deciso di considerare l'uguaglianza come simbolo logico, è chiaro come debba essere interpretato il simbolo = in un qualsiasi modello di $Th(\mathfrak{N})$.

Ma come vanno interpretati gli altri simboli propri di $\mathfrak{L}$ in un modello di $Th(\mathfrak{N})$? Dal momento che $\angle$ è una relazione d'ordine totale, essa è antiriflessiva, tricotomica e transitiva, proprietà che sono esprimibili nel linguaggio $\mathfrak{L}$ dai tre enunciati $\forall v_0\neg v_0<v_0$, $\forall v_0\forall v_1(v_0<v_1\vee v_0=v_1\vee v_1<v_0)$, $\forall v_0\forall v_1\forall v_2((v_0<v_1\wedge v_1<v_2)\rightarrow v_0<v_2)$, che dunque apparterranno alla $Th(\mathfrak{N})$ e così ogni modello di questa dovrà interpretare il predicato < in una relazione binaria d'ordine totale. Analogamente, poiché *0* è il minimo numero naturale rispetto alla relazione $\angle$, e ciò è esprimibile dall'enunciato $\forall v_0((\neg 0=v_0)\rightarrow 0<v_0)$ che apparterrà alla $Th(\mathfrak{N})$, allora ogni modello di questa dovrà interpretare il simbolo per costante 0 in una costante che dovrà essere il minimo elemento rispetto alla relazione d'ordine che interpreta <. Sfruttando l'esprimibilità mediante opportune formule (la cui determinazione a questoo punto è lasciata per esercizio) delle usuali proprietà delle funzioni successore, addizione e moltiplicazione, si conclude che anche le funzioni che interpreteranno in un modello i simboli corrispondenti a dette funzioni avranno le corrispondenti proprietà.

Per far cadere l'isomorfismo, l'idea è di mostrare che ci deve essere un modello di Th($\mathfrak{N}$) con un elemento maggiore (nella relazione d'ordine che interpreta < in quella struttura) di tutte le interpretazioni dei nomi dei numeri naturali, in modo che ci siano difficoltà nel trovargli un corrispondente in un tentativo di individuare un isomorfismo, che infine risulterà non esistente.

Per imporre ad un modello di Th($\mathfrak{N}$) di contenere un elemento maggiore delle interpretazioni dei nomi dei numeri naturali, si può inventare un nuovo simbolo di costante, lo si chiami c, e considerare l'insieme degli enunciati ciascuno dei quali è vero solo se l'interpretazione del simbolo di costante c è maggiore dell'interpretazione del nome di un numero naturale. Fortunatamente ciascun elemento n di |N ha un nome che è il termine ottenuto usando n volte il simbolo di funzione successore e il simbolo di costante 0. Così si consideri l'insieme di enunciati $\Sigma=\{0<c, 0'<c, 0''<c, 0'''<c, \dots\}$: ovviamente una struttura in cui siano veri questi enunciati dovrà avere un elemento (ad esempio quello che interpreta c) maggiore (nel senso della relazione d'ordine di quella struttura) di tutti gli elementi che interpretano i nomi dei numeri naturali.

Si consideri l'insieme di enunciati Th($\mathfrak{N}$)$\cup\Sigma$ nel linguaggio $\mathfrak{L}'$ ottenuto dal linguaggio $\mathfrak{L}$ aggiungendo il simbolo di costante c. Si noti che la cardinalità di $\mathfrak{L}'$ è il numerabile, come quella di $\mathfrak{L}$.

Per mostrare che Th($\mathfrak{N}$)$\cup\Sigma$ ha modello si può sfruttare il teorema di compattezza e far vedere che ogni sottinsieme finito di Th($\mathfrak{N}$)$\cup\Sigma$ ha modello. Così sia S un sottinsieme finito di Th($\mathfrak{N}$)$\cup\Sigma$: S conterrà un numero finito di termini che sono nomi di numeri naturali, e sia n_S il più grande numero naturale interpretazione di tali termini nella struttura $\mathfrak{N}$ (ovviamente tale n_S dipende da S). Se si espande la struttura $\mathfrak{N}$ interpretando c in n_S+1 si ottiene una struttura in cui sono veri tutti gli enunciati di S, e pertanto S è soddisfacibile. Così si può concludere, proprio per il teorema di compattezza e grazie all'arbitrarietà del sottinsieme finito S di Th($\mathfrak{N}$)$\cup\Sigma$, che Th($\mathfrak{N}$)$\cup\Sigma$ è soddisfacibile. Tra i suoi modelli c'è certo quello basico, lo si chiami $\mathfrak{N}''$, che ha per universo le classi di equivalenza di termini del linguaggio $\mathfrak{L}'^{\infty}$ occorrenti nell'insieme di Hintikka che è un ramo aperto dell'albero T^{∞} ottenuto come unione degli alberi di confutazione costruiti a partire dall'insieme Th($\mathfrak{N}$)$\cup\Sigma$. Questo modello ha cardinalità minore od uguale a quella del linguaggio $\mathfrak{L}'^{\infty}$ (ottenuto da $\mathfrak{L}'$ aggiungendo i simboli di costante necessari per analizzare le formule del tipo $\neg\forall$), che ha la stessa cardinalità del linguaggio $\mathfrak{L}'$, cioè è al più numerabile, ma anche almeno numerabile essendo pure un modello di Th($\mathfrak{N}$). Il modello ottenuto da $\mathfrak{N}''$ trascurando di intepretare c e gli altri simboli di costante introdotti negli alberi di confutazione (pertanto adatto al linguaggio $\mathfrak{L}$), chiamiamolo $\mathfrak{N}'$, sarà ancora esattamente numerabile, ed elementarmente equivalente, relativamente al linguaggio $\mathfrak{L}$, a $\mathfrak{N}$ dovendo essere modello di Th($\mathfrak{N}$). Infine $\mathfrak{N}'$ non può essere isomorfo a $\mathfrak{N}$ poiché se ci fosse un isomorfismo l'elemento $\underline{c}$, che nella struttura $\mathfrak{N}'$ interpreta c, dovrebbe corrispondere ad un numero naturale che ha un numero finito di predecessori mentre $\underline{c}$ ne ha infiniti, e ciò impedirebbe di preservare la relazione d'ordine.

25. STRUTTURE ISOMORFE, ELEMENTARMENTE EQUIVALENTI, IMMERSIONE DI UNA STRUTTURA IN UN'ALTRA, SOTTOSTRUTTURE, SOTTOSTRUTTURE ELEMENTARI, CATEGORICITA'.

Nel paragrafo precedente a partire da strutture date si sono costruite altre strutture elementarmente equivalenti alla corrispondente di partenza, e con ulteriori proprietà, ma non si è stabilito alcun rapporto tra gli elementi della struttura di partenza e quelli della strutciò non dà alcuna informazione su chi sono gli elementi dell'universo. Nonostante si voglia mantenere un atteggiamento che si cura più del comportamento degli elementi che non di chi sono, tuttavia a partire da una certa struttura sarebbe naturale costruire altre strutture, in opportuni rapporti con la prima, proprio a partire dagli elementi di questa. I prossimi risultati tenderanno ad evidenziare i progressi che si possono fare in questa direzione, e si baseranno su nozioni che si devono ora definire.

Si è già detto cosa si intende per isomorfismo tra strutture dello stesso tipo e quando due strutture sono isomorfe. Si è anche già detto quando due strutture sono elementarmente equivalenti rispetto al linguaggio minimo a cui sono adatte o rispetto ad un altro linguaggio. Ancora si sono già definiti i concetti di espansione e riduzione di una struttura o di una realizzazione. Ora si vogliono indagare, con maggiore attenzione, altri tipi di rapporti che possono intercorrere tra strutture, ricordando anzitutto alcune nozioni già introdotte.

Per **ampliamento** o **arricchimento** di un linguaggio si intende un linguaggio che contenga il precedente.

Un'**espansione** di una struttura $\mathfrak{A}$ ad un linguaggio $\mathfrak{L}'$ che arrichisce il linguaggio $\mathfrak{L}$ adatto alla struttura data è una struttura $\mathfrak{A}'$ adatta al linguaggio $\mathfrak{L}'$ tale che 1) ha lo stesso universo di $\mathfrak{A}$; 2) i simboli di $\mathfrak{L}$ sono interpretati nello stesso modo sia in $\mathfrak{A}'$ che in $\mathfrak{A}$; 3) in $\mathfrak{A}'$ sono interpretati anche i simboli di $\mathfrak{L}'$-$\mathfrak{L}$.

La **riduzione** di una struttura è l'operazione inversa dell'espansione: data una struttura $\mathfrak{A}$ adatta ad un linguaggio $\mathfrak{L}$, la sua riduzione al linguaggio $\mathfrak{L}'$ contenuto in $\mathfrak{L}$ è la struttura $\mathfrak{A}'$ ottenuta da $\mathfrak{A}$ trascurando di interpretare i simboli in $\mathfrak{L}$ - $\mathfrak{L}'$. Si noti che $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}'$ hanno lo stesso universo, interpretano in modo uguale i simboli in $\mathfrak{L}'$, e $\mathfrak{A}$ è una espansione di $\mathfrak{A}'$.

Si dice **finita** una struttura il cui universo sia finito. Più in generale, si dice **cardinalità di una struttura** la cardinalità dell'universo di quella struttura.

Si noti che l'espansione, non cambiando l'universo della struttura, non cambia la cardinalità della struttura.

Per **immersione** di una struttura $\mathfrak{A}$ in un'altra $\mathfrak{B}$ si intende una funzione totale iniettiva ϕ dall'universo di una nell'universo dell'altra che preserva la struttura. Si è già detto cosa si intende per preservare la struttura quando si è introdotta la nozione di isomorfismo. Si noti che una immersione è quasi un isomorfismo: manca solo la suriettività della funzione. Così una immersione suriettiva è un isomorfismo.

Si dice che una struttura **si immerge** in un'altra se c'è una immersione dalla prima nella seconda.

Un esempio di immersione è il seguente. Si considerino la struttura $\mathfrak{A} = (|\mathrm{N},\{\equiv,\angle\},\emptyset,\{1\})$ e la struttura $\mathfrak{B} = (|\mathrm{N}-\{0\}, \{\equiv,\angle\},\emptyset,\{1\})$. Si vede facilmente che la funzione identica f dai naturali privati dello zero nei naturali definita da f(n)=n è un'immersione di $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$: la sua totalità, iniettività e il preservare sia l'uguagliana che l'ordine che la costante sono evidenti. Tuttavia le due strutture si distinguono mediante il linguaggio, cioè non sono elementarmente equivalenti. Infatti l'enunciato $\forall v_0 \neg v_0<1$ è vero in $\mathfrak{B}$ ma non in $\mathfrak{A}$. Ciò mostra che la nozione di immersione tra strutture non è molto forte, e decisamente più debole della nozione di isomorfismo anche al di là della mancanza della suriettività.

Un rafforzamento della nozione di immersione è la seguente nozione di immersione elementare

Per **immersione elementare** di una struttura $\mathfrak{A}$ in un'altra $\mathfrak{B}$ dello stesso tipo si intende una funzione ϕ dall'universo di una nell'universo dell'altra tale che per ogni formula φ del linguaggio adatto ad $\mathfrak{A}$ con variabili tra le prime n+1 e per ogni (n+1)-upla ordinata

$(a_0,\ldots,a_n)$ di elementi dell'universo di $\mathfrak{A}$ si ha che $\mathfrak{A}|=\varphi[a_0,\ldots,a_n]$ se e solo se $\mathfrak{B}|=\varphi[\phi(a_0),\ldots,\phi(a_n)]$.

Banalmente, se una struttura $\mathfrak{A}$ si immerge elementarmente in un'altra $\mathfrak{B}$, allora le due sono elementarmente equivalenti, $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$, rispetto al linguaggio loro adatto (segue dal fatto che tra le formule ci sono anche gli enunciati la cui verità nell'interpretazione non dipende dall'attribuzione di valore alle variabili).

Si osservi che una immersione elementare di una struttura $\mathfrak{A}$ in una struttura $\mathfrak{B}$ è una immersione di $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$. Per poter sostenere questa affermazione si deve far veder che la funzione ϕ è totale, iniettiva e preserva la struttura. Questi tre fatti saranno mostrati separatamente.

1) ϕ è totale perché $\mathfrak{A}|=v_0=v_0[a]$ per ogni $a\in A$, così deve essere anche $\mathfrak{A}'|=v_0=v_0[\phi(a)]$ e a appartenere al dominio di ϕ.

2) ϕ è iniettiva perché fissata una qualsiasi coppia di elementi diversi a_1 e a_2 dell'universo A, si ha che $\mathfrak{A}|=\neg v_0=v_1[a_1,a_2]$, sicché deve essere anche $\mathfrak{A}'|=\neg v_0=v_1[\phi(a_1),\phi(a_2)]$, così $\phi(a_1)$ sarà diverso da $\phi(a_2)$.

3) Per mostrare che ϕ preserva la struttura, si consideri una qualsiasi n-upla ordinata di elementi dell'universo di A, $(a_1,\ldots,a_n)$, e, dapprima, si supponga che R sia una qual–siasi relazione n-aria della struttura $\mathfrak{A}$ cui è associato il pre–di–cato n-ario P. Allora $(a_1,\ldots,a_n)\in R$ se e solo se $\mathfrak{A}|=Pv_0,\ldots,v_{n-1}[a_1,\ldots,a_n]$, ed anche, poiché ϕ è una immersione elementare, se e solo se $\mathfrak{A}'|=Pv_0,\ldots,v_{n-1}[\phi(a_1),\ldots,\phi(a_n)]$, e ciò avviene se e solo se $(\phi(a_1),\ldots,\phi(a_n))\in R'$, dove R' è la relazione che interpreta P in $\mathfrak{A}'$. Ciò mostra che ϕ preserva le relazioni.

Analogamente, per le funzioni, si supponga che F sia una qualsiasi funzione n-aria della struttura $\mathfrak{A}$ cui è associato il simbolo di funzione f. Allora $F(a_1,\ldots,a_n)=a$ se e solo se $\mathfrak{A}|=fv_0,\ldots,v_{n-1}=v_n\,[a_1,\ldots,a_n,a]$, ed anche, ancora poiché ϕ è una immersione elementare, se e solo se $\mathfrak{A}'|=fv_0,\ldots,v_{n-1}=v_n\,[\phi(a_1),\ldots,\phi(a_n),\phi(a)]$, e, di nuovo, ciò avviene se e solo se $F'(\phi(a_1),\ldots,\phi(a_n))=\phi(a)$, dove F' è la funzione che interpreta f in $\mathfrak{A}'$.

Similmente, per le costanti, si supponga che $\underline{c}$ sia una qualsiasi costante della struttura $\mathfrak{A}$ cui è associato il simbolo di costante c. Allora $\mathfrak{A}|=c=v_0\,[\underline{c}]$. Ma, poiché ϕ è una immersione elementare, ciò avviene se e solo se $\mathfrak{A}'|=c=v_0\,[\phi(\underline{c})]$, cioè se e solo se $\underline{c}'=\phi(c)$, dove $\underline{c}'$ è la costante che interpreta c in $\mathfrak{A}'$.

Si è già osservato che se una struttura si immerge elementarmente in un'altra allora le due sono elementarmente equivalenti. In generale non vale il viceversa come si può facilmente vedere sfruttando il teorema di Lowenheim Skolem. Infatti tra due strutture elementarmente equivalenti ma di diversa cardinalità non può esistere un'immersione da quella di cardinalità maggiore in quella di cardinalità minore, e tanto meno un'immersione elementare. Tuttavia, se si aggiunge l'ipotesi che una delle due strutture sia tale che ogni elemento del suo universo abbia nome, la situazione cambia, come è asserito nel seguente

Teorema. Si supponga che le strutture $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ siano elementarmente equivalenti rispetto al linguaggio $\mathfrak{L}$ in cui ogni elemento dell'universo di $\mathfrak{A}$ ha nome (cioè è l'interpretazione di un termine), $\mathfrak{A}\equiv_{\mathfrak{L}}\mathfrak{B}$. Se ad un qualsiasi elemento della prima struttura si associa l'elemento della seconda struttura che ha lo stesso nome (possibile perché tutti gli elementi della prima struttura hanno nome), la funzione così ottenuta è una immersione elementare.

DIMOSTRAZIONE. Sostanzialmente il motivo è che il linguaggio è sufficientemente ricco per determinare il comportamento di ogni relazione e di ogni funzione delle strutture. Infatti, anzitutto la corrispondenza descritta nell'enunciato è una funzione, la si chiami ϕ, dall'universo di $\mathfrak{A}$ in quello di $\mathfrak{B}$, e poi per ogni (n+1)-upla $a_0,\ldots,a_n$ di elementi dell'universo di $\mathfrak{A}$ si ha che $\mathfrak{A}|=\varphi(v_0,\ldots,v_n)[a_0,\ldots,a_n]$ se e solo se $\mathfrak{A}|=\varphi(v_0/t_0,\ldots,v_n/t_n)$, dove $t_0,\ldots,t_n$ sono i termini che sono i nomi di $a_0,\ldots,a_n$ rispettivamente, ma, per l'elementare

$\mathfrak{B} \models \varphi(v_0,...,v_n)[(t_1)^{\mathfrak{B}},...,(t_n)^{\mathfrak{B}}]$, cioè se e solo se $\mathfrak{B} \models \varphi(v_0,...,v_n)[\phi(a_0),...,\phi(a_n)]$, sicché ϕ è una imersione elementare.

Si dice che una struttura è **indicizzata** se l'insieme delle sue costanti (che sono gli elementi dell'universo evidenziati nella struttura) coincide con il suo universo.
Poiché in una struttura indicizzata ogni elemento dell'universo ha nome, alle strutture di questo tipo si applica il teorema appena dimostrato.

Le considerazioni svolte da ultimo ci indicano la strada per rafforzare il corollario al teorema di Lowenheim Skolem. In esso si parla di strutture elementarmente equivalenti ad una struttura infinita data, ma non isomorfe ad essa, e se ne asserisce l'esistenza senza alcuna ulteriore precisazione di legami tra la struttura ottenuta e quella di partenza. Invece, proprio in base a quanto visto, si può dire ben di più. Di fatto si dimostra il seguente
Teorema di immersione elementare. Data una qualsiasi struttura infinita essa si immerge elementarmente in una struttura di una qualsiasi cardinalità maggiore od uguale al massimo tra la cardinalità del linguaggio e quella della struttura data.
DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathfrak{A}$ la struttura data e $\mathfrak{L}$ il linguaggio ad essa adatto. Si espanda $\mathfrak{A}$ ad una struttura $\mathfrak{A}'$ aggiungendo una costante per ciascun elemento dell'universo. Il linguaggio adatto ad $\mathfrak{A}'$ sarà $\mathfrak{L}'$ ottenuto da $\mathfrak{L}$ aggiungendo un nuovo simbolo di costante per ciascun elemento dell'universo, così $\mathfrak{A}'$ è una struttura indicizzata nel linguaggio $\mathfrak{L}'$. La cardinalità del nuovo linguaggio sarà il massimo tra le cardinalità del linguaggio di partenza e la cardinalità della struttura, e sia k un qualsiasi cardinale maggiore od uguale a tale massimo. Si applichi ora il teorema di Lowenheim Skolem a partire dall'insieme Th($\mathfrak{A}'$) di enunciati di $\mathfrak{L}'$. Si otterra un modello, lo si chiami $\mathfrak{B}'$ di Th($\mathfrak{A}'$) di cardinalità k. Per quanto osservato precedentemente, $\mathfrak{A}'$ si immerge elementarmente in $\mathfrak{B}'$. Passando alla riduzione di $\mathfrak{B}'$ al linguaggio $\mathfrak{L}$, la si chiami $\mathfrak{B}$, questa ha lo stesso universo di $\mathfrak{B}'$, sicché la sua cardinalità rimane k, ed inoltre rimane la funzione che era l'immersione di $\mathfrak{A}'$ in $\mathfrak{B}'$, che ora può essere letta come immersione elementare di $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$, c.v.d..

Ma si può fare ancora meglio. Il sapere che una struttura si immerge elementarmente in un'altra non ci dice ancora chi sono esattamente gli elementi della nuova struttura che corrispondono a quelli della vecchia. Per dare una risposta più puntuale ci servono le seguenti definizioni.

Si dice che una struttura $\mathfrak{B}$ **estende** una struttura $\mathfrak{A}$, e che $\mathfrak{A}$ è una **sotto-struttura** di una struttura $\mathfrak{B}$ (e lo si indica così:$\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$) se 1) $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{A}$ sono strutture dello stesso tipo (cioè adatte allo stesso linguaggio), 2) l'universo B di $\mathfrak{B}$ contiene l'universo A di $\mathfrak{A}$, $B \supseteq A$, 3) A è chiuso rispetto alle funzioni della struttura $\mathfrak{B}$ (cioè per ogni numero naturale n e per ogni funzione n-aria F di $\mathfrak{B}$ e per ogni n-upla $a_1,...,a_n$ di elementi di A risulta che $F(a_1,...,a_n) \in A$), 4) le relazioni e le funzioni di $\mathfrak{A}$ sono le relazione e le funzioni di $\mathfrak{B}$ ristrette ad A.
Nella situazione descritta, si dice anche che $\mathfrak{A}$ è **una restrizione di $\mathfrak{B}$ all'insieme** A, e per $\mathfrak{A}$ si usa la notazione $\mathfrak{B}_{|.A}$.
E' ovvio che la funzione identica su A è una immersione di $\mathfrak{B}_{|.A}$ in $\mathfrak{B}$. Vale, banalmente, anche il viceversa: se la funzione identica sull'universo di una struttura è una immersione di questa in una seconda struttura allora la seconda struttura estende la prima.

Si dice che $\mathfrak{B}$ **estende elementarmente** la struttura $\mathfrak{A}$, e che $\mathfrak{A}$ è **sottostruttura elementare** della struttura $\mathfrak{B}$ (e si indica così: $\mathfrak{B} {}^{*} \mathfrak{A}$) se 1) $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$ ed inoltre 2) per ogni formula φ le cui variabili sono tra le prime n e per ogni n-upla $a_0,...,a_{n-1}$ di elementi di A si ha che $\mathfrak{B} \models \varphi[a_0,...,a_{n-1}]$ se e solo se $\mathfrak{A} \models \varphi[a_0,...,a_{n-1}]$.

Tra la nozione di sottostruttura e quella di sottostruttura elementare c'è un legame molto stretto. Infatti una sottostruttura è quasi una sottostruttura elementare nel senso che, come si vedrà nel prossimo teorema ed in particolare nella sua dimostrazione, se si volesse dimostrare che ogni sottostruttura è una sottostruttura elementare c'è solo un punto nell'induzione sulla costruzione delle formule in cui la dimostrazione non funziona. Per superare quel punto è necessaria un'ipotesi ulteriore che è precisata nel seguente teorema

Teorema. Sia $\mathfrak{A}$ una sottostruttura di $\mathfrak{B}$. Sia A l'universo di $\mathfrak{A}$ e B l'universo di $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{A}$ è una sottostruttura elementare di $\mathfrak{B}$ se e solo se fissata una qualsiasi formula φ le cui variabili libere occorrano tra le prime n, per ogni n-upla $(a_0,...,a_{n-1})$ di elementi di A e un qualsiasi ulteriore elemento b di B esiste un elemento a di A tale che se $\mathfrak{B}\models\varphi[a_0,..., a_{n-1},b]$ allora $\mathfrak{B}\models\varphi[a_0,...,a_{n-1}, a]$.

DIMOSTRAZIONE. Esssendo $\mathfrak{A}$ una sottostruttura di $\mathfrak{B}$, per far vedere che è sottostruttura elementare basta far vedere che per ogni formula φ le cui variabili sono tra le prime n e per ogni n-upla $a_0,..., a_{n-1}$ di elementi di A si ha che $\mathfrak{B}\models\varphi[a_0,...,a_{n-1}]$ se e solo se $\mathfrak{A}\models\varphi[a_0,.. .,a_{n-1}]$. Si dimostrerà questa proprietà per induzione nella costruzione della formula φ.

Anzitutto si osservi che, per un qualsiasi numero naturale n, se $\underline{a}$ è una attribuzione di valori alle variabili che alle prime n variabili assegna i valori $a_0,..., a_{n-1}$ dell'universo A di $\mathfrak{A}$ e t è un termine in cui occorrono variabili solo entro le prime n, allora $t^{\sigma}=t^{\sigma'}$ dove σ è l'interpretazione $(\mathfrak{A}.\underline{a})$ e σ' è $(\mathfrak{B},\underline{a})$. Infatti, argomentando per induzione sulla costruzione dei termini, se t è un simbolo di costante o una variabile allora è pressoché immediato vedere che $t^{\sigma}=t^{\sigma'}$; se poi t è il termine $ft_1...t_m$ allora, per ipotesi induttiva, per ogni $i\leq m$ $t_i^{\sigma}=t_i^{\sigma'}$, sicché$(ft_1...t_m)^{\sigma} = f^{\sigma}(t_1^{\sigma},...,t_m^{\sigma}) = f^{\sigma'}(t_1^{\sigma'},...,t_m^{\sigma'}) = (ft_1...t_m)^{\sigma'}$.

Si avvii ora l'induzione e si cominci con il considerare una qualsiasi formula atomica $Pt_1...t_m$, con P predicato m-ario, le cui variabili (tutte libere) sono tra le prime n. Sia $\underline{a}$ è una attribuzione di valori alle variabili che alle prime n variabili assegna i valori $a_0,..., a_{n-1}$, σ la realizzazione $(\mathfrak{A}.\underline{a})$ e σ' la realizzazione $(\mathfrak{B},\underline{a})$. Allora $\mathfrak{A}\models Pt_1..t_m[a_0,...,a_{n-1}]$ se e solo se $(Pt_1...t_m)^{\sigma}=V$, se e solo se $(t_1^{\sigma},...,t_m^{\sigma})\in P^{\sigma}$, se e solo se $(t_1^{\sigma'},...,t_m^{\sigma'})\in P^{\sigma'}$ (per il precedente risultato sui termini e perché P^{σ} è la restrizione ad A di $P^{\sigma'}$), se e solo se $(Pt_1...t_m)^{\sigma'}=V$, se e solo se $\mathfrak{B}\models Pt_1.. .t_m[a_0,...,a_{n-1}]$, come volevasi mostrare.

Si supponga ora che il risultato valga per una formula φ le cui variabili libere sono tra le prime n. Si deve far vedere che vale anche per la formula $\neg\varphi$. Infatti, per ogni n-upla $a_0,...,a_{n-1}$ di elementi di A, $\mathfrak{A}\models\neg\varphi[a_0,...,a_{n-1}]$ se e solo se non è vero $\mathfrak{A}\models\varphi[a_0,..., a_{n-1}]$ se e solo se (per ipotesi induttiva) non è vero che $\mathfrak{B}\models\varphi[a_0,...,a_{n-1}]$ se e solo se $\mathfrak{B}\models\neg\varphi[a_0,...,a_{n-1}]$, che è ciò che si voleva mostrare.

Si consideri poi il caso in cui il risultato valga per le formule φ e ψ le cui variabili libere sono tra le prime n. Si deve far vedere che vale anche per la formula $\wedge\varphi\psi$. Infatti, per ogni n-upla $a_0,...,a_{n-1}$ di elementi di A, $\mathfrak{A}\models\wedge\varphi\psi[a_0,...,a_{n-1}]$ se e solo se sia $\mathfrak{A}\models\varphi[a_0,.. .,a_{n-1}]$ che $\mathfrak{A}\models\psi[a_0,...,a_{n-1}]$ se e solo se (per ipotesi induttiva) sia $\mathfrak{B}\models\varphi[a_0,..., a_{n-1}]$ che $\mathfrak{B}\models\psi[a_0,...,a_{n-1}]$, se e solo se $\mathfrak{B}\models\wedge\varphi\psi[a_0,...,a_{n-1}]$, che è ciò che si voleva mostrare.

Infine si consideri il caso in cui il risultato valga per la formula φ le cui variabili libere sono tra le prime n+1. Si deve far vedere che vale anche per la formula $\forall x\varphi$. Qui si divide la dimostrazione nelle due direzioni. Dapprima si mostra che se $\mathfrak{B}\models\forall x\varphi[a_0,...,a_{n-1}]$ allora anche $\mathfrak{A}\models\forall x\varphi[a_0,...,a_{n-1}]$, e poi si vedrà l'altra direzione. Poiché non è restrittivo supporre che x sia v_n (se non lo fosse si effettui un cambio alfabetico) e si supponga che $\mathfrak{B}\models\forall v_n\varphi[a_0,...,a_{n-1}]$. Ne segue che, per definizione, per ogni $a\in B$, $\mathfrak{B}\models\varphi[a_0,..., a_{n-1},a]$. Essendo $A\subseteq B$, ciò implica anche che, per ogni $a\in A$, $\mathfrak{B}\models\varphi[a_0,...,a_{n-1},a]$. Allora, per ipotesi induttiva, per ogni $a\in A$, $\mathfrak{A}\models\varphi[a_0,...,a_{n-1},a]$. Ciò significa che $\mathfrak{A}\models\forall x\varphi[a_0,...,a_{n-1}]$.

Si noti che finora non è stata mai usata l'ipotesi aggiuntiva introdotta nell'enunciato: ecco in che senso si era detto che un sottostruttura è quasi una sottostruttura elementare.

Per completare l'induzione rimane da mostrare solo l'altra direzione dell'ultimo caso, e cioè che se $\mathfrak{A}\models\forall x\varphi[a_0,...,a_{n-1}]$ allora anche $\mathfrak{B}\models\forall x\varphi[a_0,...,a_{n-1}]$. Per sfruttare l'ipotesi aggiunta che parla dell'esistenza di un elemento di a di A, dimostriamo la contronominon è vero che $\mathfrak{A} \models \forall x\varphi[a_0,...,a_{n-1}]$, ovverosia se $\mathfrak{B} \models \neg\forall x\varphi[a_0,...,a_{n-1}]$ allora $\mathfrak{A} \models \neg\forall x\varphi[a_0,...,a_{n-1}]$. Si supponga perciò che $\mathfrak{B} \models \neg\forall x\varphi[a_0,...,a_{n-1}]$, allora (per definizione) esiste un elemento $b\in B$ tale che $\mathfrak{B} \models \neg\varphi[a_0,...,a_{n-1},b]$. Così, applicando l'ipotesi aggiunta nell'enunciato del teorema (e qui è il solo passaggio dove la si usa), si ottiene che esiste $a\in A$ tale che $\mathfrak{B} \models \neg\varphi[a_0,...,a_{n-1},a]$. Allora, per ipotesi induttiva, esiste $a\in A$ tale che $\mathfrak{A} \models \neg\varphi[a_0,...,a_{n-1},a]$, che equivale a $\mathfrak{A} \models \neg\forall x\varphi[a_0,...,a_{n-1}]$. Si è così mostrato che l'affermazione del teorema vale anche in questo caso. Avendo completato l'induzione, si è anche ultima la dimostrazione del teorema.

L'ulteriore rafforzamento auspivato del teorema di Lowenheim Skolem passa attraverso il legame tra immersioni (e immersioni elementari) e sottostrutture (e sottostrutture elementari) precisato dai seguenti due risultati

Teorema. Se una struttura $\mathfrak{A}$ si immerge (elementarmente) in una struttura $\mathfrak{B}$ allora è isomorfa ad una sottostruttura (elementare) della struttura $\mathfrak{B}$.

DIMOSTRAZIONE. Si supponga che $\mathfrak{A}$ si immerga elementarmente in $\mathfrak{B}$, e sia ϕ la funzione da A in B che compie tale immersione. Sia C il codominio di ϕ. Si osservi che l'insieme C è chiuso rispetto alle funzioni e costanti della struttura $\mathfrak{B}$ poiché se F' è una funzione k-aria (incluso il caso che k=0, cioè anche se F' è una costante) della struttura e $c_0,...,c_{k-1}$ è una qualsiasi k-upla di elementi di C, allora $F'(c_0,...,c_{k-1}) \in C$. Infatti $c_0=\phi(a_0),...,c_{k-1}=\phi(a_{k-1})$ per una opportuna k-upla $a_0,...,a_{k-1}$ di elementi di A. Sia F la funzione che nella struttura $\mathfrak{A}$ interpreta il simbolo di costante associato alla funzione F', e sia $F(a_0,...,a_{k-1})=a$. Poiché l'immersione preserva la struttura dovrà essere $F'(c_0,...,c_{k-1})=F'(\phi(a_0),...,\phi(a_{k-1}))=\phi(a)$ e $\phi(a)\in C$ per definizione di C. Poiché C è chiuso rispetto alle funzioni di $\mathfrak{B}$ si può considerare la restrizione $\mathfrak{B}_{|C}$ della struttura $\mathfrak{B}$ al sottinsieme C del suo universo. Si sa che $\mathfrak{B}_{|C}$ è una sottostruttura di $\mathfrak{B}$, ed inoltre ϕ è una immersione suriettiva sull'universo di $\mathfrak{B}_{|C}$, sicché ϕ è un isomorfismo.

Se poi l'immersione ϕ è elementare (cioè per ogni n-upla $a_0, ...,a_{n-1}$di elementi di A e per ogni formula φ le cui variabili libere sono tra le prime n, si ha che $\mathfrak{A}\models\varphi[a_0,...,a_{n-1}]$ se e solo se $\mathfrak{B} \models\varphi[\phi(a_0),...,\phi(a_{k-1})]$), dal momento che $\mathfrak{A}\models\varphi[a_0,...,a_{n-1}]$ se e solo se $\mathfrak{B}_{|C}\models\varphi[\phi(a_0),...,\phi(a_{k-1})]$ (essendo ϕ un isomorfismo tra $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}_{|C}$), e, poiché per ogni n-upla $c_0,...,c_{n-1}$ di C c'è un' n-upla $a_0,...,a_{n-1}$ di A tale che $c_0=\phi(a_0),.., c_{n-1}=\phi(a_{n-1})$, si ottiene anche che per ogni n-upla $c_0,...,c_{n-1}$ di C $\mathfrak{B}_{|C}\models \varphi[c_0,...,c_{n-1}]$ se e solo se $\mathfrak{B}_{|C}\models \varphi[\phi(a_0),...,\phi(a_{n-1})]$ se e solo se $\mathfrak{A}\models \varphi[a_0,...,a_{n-1}]$ se e solo se $\mathfrak{B}\models \varphi[\phi(a_0),..., \phi(a_{n-1})]$ se e solo se $\mathfrak{B}\models\varphi[c_0,...,c_{n-1}]$, il che mostra che $\mathfrak{B}_{|C}$ è sottostruttura elementare di $\mathfrak{B}$.

Il secondo risultato che si preannunciava è il seguente

Teorema di estensione elementare. Se la struttura $\mathfrak{A}$ è isomorfa alla struttura $\mathfrak{B}$ che è sottostruttura (elementare) della struttura $\mathfrak{B}'$ allora $\mathfrak{A}$ è sottostruttura elementare di una struttura $\mathfrak{A}'$ isomorfa alla struttura $\mathfrak{B}'$. Cioè se $\mathfrak{B}'\supseteq\mathfrak{B}\cong\mathfrak{A}$ allora esiste $\mathfrak{A}'$ tale che $\mathfrak{B}'\cong\mathfrak{A}'\supseteq\mathfrak{A}$ (se $\mathfrak{B}'{}^*\mathfrak{B} \cong\mathfrak{A}$ allora $\mathfrak{B}'\cong\mathfrak{A}'{}^*\mathfrak{A}$).

DIMOSTRAZIONE. Sia ϕ_1 l'isomorfismo da $\mathfrak{A}$ su $\mathfrak{B}$. Sia C un insieme disgiunto da A di cardinalità uguale a quella di B'-B; A, B' e B siano gli universi di $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}'$ e $\mathfrak{B}$ rispettivamente. Sia ϕ_2 una biiettività da C su B'-B. La funzione $\phi=\phi_1\cup\phi_2$ è una biiettività da $A\cup C$ su B', la cui restrizione ad A è ϕ_1, mentre quella a C è ϕ_2. Si vuole costruire una nuova struttura $\mathfrak{A}'$ con universo $A\cup C$ che sia isomorfa a $\mathfrak{B}'$. Per fare ciò bisogna definire le relazioni, funzioni e costanti della nuova struttura, e ciò può essere fatto atteggiando l'insieme C come B'-B attraverso la corrispondenza ϕ_2 (o attraverso la corrispondenza ϕ che su C si comporta nello stesso modo), cioè prescrivendo che ogni elemento c di C si comporti come l'elemento $\phi_2(c)$. Più precisamente, si definisce ciascuna relazione $P^{\mathfrak{A}'}$ di $\mathfrak{A}'$ che interpreti il predicato P, diciamo n-ario, come il seguente insieme di n-uple di A': $\{(a'_0,...,a'_{n-1}): (\phi(a'_0),...,\phi(a'_{n-1}))\in P^{\mathfrak{B}'}\}$, ciascuna funzione $f^{\mathfrak{A}'}$ di $\mathfrak{A}'$ che interpreti il simbolo di funzione f, diciamo n-ario, come la funzione $f^{\mathfrak{A}'}$ tale che, per ogni n-upla di $\mathfrak{A}'$ risulta che $f^{\mathfrak{A}'}(a'_0,...,a'_{n-1})= \phi^{-1}(f^{\mathfrak{B}'}(\phi(a'_0),...,\phi(a'_{n-1})))$ e ciascuna costante come la costante di $\mathfrak{A}$ associata allo stesso simbolo per costante. Si osservi che il sottinsieme A di A' è chiuso rispetto alle funzioni $f^{\mathfrak{A}'}$ di $\mathfrak{A}'$, perché, scelta comunque una n-upla $(a_0,...,a_{n-1})$ di A, la controimmagine mediante ϕ^{-1} dell'applicazione della funzione $f^{\mathfrak{B}}$ in $\mathfrak{B}$ alla sua immagine mediante ϕ coincide con il risultato delle stesse operazioni mediante ϕ_1, $f^{\mathfrak{A}'}(a_0,..,a_{n-1})=\phi^{-1}(f^{\mathfrak{B}'}(\phi(a_0),..,\phi(a_{n-1})))=\phi_1^{-1}(f^{\mathfrak{B}}(\phi_1(a_0), ..,\phi_1(a_{n-1})))$ sicché $\phi^{-1}(f^{\mathfrak{B}}(\phi(a_0),..,\phi(a_{n-1})))\in A$ poiché $\phi_1^{-1}(f^{\mathfrak{B}}(\phi_1(a_0),.., \phi_1(a_{n-1})))\in A$. Inoltre le relazioni e funzioni di $\mathfrak{A}$ sono le relazioni e funzioni di $\mathfrak{A}'$ relativizzate ad A, ancora perché ϕ e ϕ_1 si comportano nello stesso modo su A. Poiché le costanti sono le stesse, $\mathfrak{A}$ è la restrizione di $\mathfrak{A}'$ ad A, così $\mathfrak{A}$ è una sottostruttura di $\mathfrak{A}'$, e, per costruzione, ϕ è un isomorfismo da $\mathfrak{A}'$ su $\mathfrak{B}'$. Se poi $\mathfrak{B}$ è una sottostruttura elementare di $\mathfrak{B}'$ allora anche $\mathfrak{A}$ è una sottostruttura elementare di $\mathfrak{A}'$ proprio in base alle definizioni coinvolte.

Gli ultimi due risultati, combinati tra loro, forniscono il seguente

Corollario. Se una struttura $\mathfrak{A}$ si immerge elementarmente in una struttura $\mathfrak{B}$, allora esiste una estensione elementare $\mathfrak{A}'$ di $\mathfrak{A}$ che è isomorfa a $\mathfrak{B}$.

DIMOSTRAZIONE. Infatti, per il primo risultato, se $\mathfrak{A}$ si immerge elementarmente in $\mathfrak{B}$ allora $\mathfrak{A}$ è isomorfa ad una sottostruttura elementare $\mathfrak{C}$ di $\mathfrak{B}$, sicché, per il teorema dell'estensione, c'è una estensione elementare $\mathfrak{A}'$ di $\mathfrak{A}$ isomorfa a $\mathfrak{B}$.

26. TEOREMA DI LOWENHEIM SKOLEM ASCENDENTE.

L'ultimo corollario e il teorema di immersione elementare permettono di concludere con il

Teorema di Lowenheim Skolem ascendente. Ogni struttura infinita può essere estesa elementarmente ad una struttura di una qualsiasi cardinalità maggiore od uguale al massimo tra la cardinalità della struttura e quella del suo linguaggio.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathfrak{A}$ la struttura infinita di partenza. La si espanda alla struttura $\mathfrak{A}'$ ottenuta facendo si che ogni elemento del suo universo sia anche una costante. La cardinalità h del linguaggio di $\mathfrak{A}'$ sarà il massimo tra le cardinalità della struttura data e del suo linguaggio. Sia k un cardinale maggiore od uguale ad h. Per il teorema dell'immersione elementare esiste una struttura $\mathfrak{C}$ (modello di Th($\mathfrak{A}'$)) in cui $\mathfrak{A}'$ si immerge elementarmente. Per il precedente corollario, c'è una estensione elementare $\mathfrak{B}$ di $\mathfrak{A}'$ isomorfa a $\mathfrak{C}$. Volendo una soluzione nel linguaggio iniziale basta ridurre la struttura $\mathfrak{B}$ a quel linguaggio.

Nella stessa dimostrazione è inserita anche la prova che

se una struttura $\mathfrak{A}$ si immerge in una struttura $\mathfrak{B}$, allora esiste una estensione $\mathfrak{A}'$ di $\mathfrak{A}$ che è isomorfa a $\mathfrak{B}$.

Questo è un risultato che serve ad esempio quando si costruiscono i reali a partire dai razionali e si parla di reali razionali da identificarsi (cosa vuol dire?) con i razionali: si potrebbe introdurre una struttura, ad esempio quella delle sezioni di Dedekind sui razionali, in cui i razionali si immergono, e poi, in base al risultato precedente, affermare che c'è un'estensione dei razionali isomorfa alla struttura introdotta.

Applicheremo i risultati ottenuti in situazioni di un certo interesse.

26. TEOREMA DI LOWENHEIM SKOLEM DISCENDENTE.

Il teorema di Lowenheim Skolem ascendente migliora il teorema di Lowenheeim Skolem debole nel senso che precisa meglio le caratteristiche di una struttura di una voluta cardinalità che sia modello della teoria di una struttura data. Ma questo miglioramento si ha solo nel caso in cui si cerchi una struttura di cardinalità maggiore od uguale al massimo tra la cardinalità della struttura di partenza e quella del suo linguaggio. Si può migliorare in modo analogo il teorema debole di Lowenheim Skolem cercando una struttura modello della teoria di un'altra struttura, ma di cardinalità compresa tra la cardinalità del linguaggio e quella della struttura data? Ovviamente ci si deve porre nel caso che la struttura data abbia cardinalità maggiore di quella del proprio linguaggio. Evidentemente una struttura non si può immergere elementarmente in un'altra struttura di cardinalità minore. Tuttavia ci possiamo chiedere se, data una struttura di cardinalità κ infinita in un linguaggio di cardinalità λ, con $\lambda<\kappa$, ci siano strutture di una qualsiasi cardinalità compresa tra λ e κ "fortemente legate" alla struttura data.

Ovviamente bisognerà anzitutto precisare cosa si intende per "fortemente legate".

Se per "fortemente legate" si intende che non siano distinguibili mediante il linguaggio, cioè che in esse siano veri gli stessi enunciati, allora la risposta affermativa è già pronta: basta considerare la teoria T della struttura data, e il teorema debole di Lowenheim Skolem debole applicato a T garantisce l'esistenza di modelli della cardinalità voluta di T, e in questi sono veri esattamente gli enunciati veri nella struttura data.

Ma se per "fortemente legate" vogliamo intendere qualcosa di più, ad esempio che la nuova struttura si immerga elementarmente in quella data, o che addirittura ne sia una sottostruttura elementare, allora il teorema di Lowenheim Skolem debole non è più sufficiente. Serve il

Teorema di Lowenheim Skolem discendente. Una struttura $\mathfrak{A}$ di cardinalità ζ maggiore od uguale alla cardinalità λ del suo linguaggio ha sottostrutture elementari il cui universo contenga un prefissato sottinsieme di cardinalità ξ dell'universo della struttura data, e la cui cardinalità κ sia arbitrariamente scelta tra ζ e il massimo tra λ e ξ.

DIMOSTRAZIONE. Si osservi che il numero delle funzioni della struttura è minore od uguale a λ, poiché ad ogni funzione deve corrispondere un simbolo di funzione nel linguaggio.

Sia A l'universo della struttura $\mathfrak{A}$ e sia X un suo sottinsieme di cardinalità minore od uguale a ξ.

Si costruisca, per induzione, una successione $X_0,..., X_i,...$ ($i\in|N$, con |N l'insieme dei numeri naturali) di sottinsie-mi di A nel modo seguente.

X_0 sia un sottinsieme di A di cardinalità κ che contiene X. X_{n+1} sia la chiusura di X_i rispetto all'applicazione di funzioni della struttura ad elementi di X_i e alla identificazione di elementi dell'universo mediante formule le cui altre variabili libere sono interpretate in X_i, cioè $X_{i+1}=\{F(a_o,...,a_{n-1})$: $(a_o,...,a_{n-1})\in X_i^n$, F è una funzione n-aria di $\mathfrak{A}$, $n\in|N\}\cup\{scel(X_{\varphi,(a_o,..., a_n)})$: $X_{\varphi,(a_o,...,a_n)}$ è non vuoto, $(a_o,...,a_n)\in X_i^{n+1}$, φ formula con al più n+2 variabili libere, $i\in|N\}$ dove $X_{\varphi,(a_o,...,a_n)}=\{a: \mathfrak{A}|=\varphi[a_o,..., a_n,a]\}$ e *scel* è una funzione scelta sugli insiemi non vuoti $X_{\varphi,(a_o,..., a_n)}$.

Si osservi subito che $X_{i+1}\supseteq X_i$. Infatti, per ogni elemento a_o di X_i, se φ è la formula $v_0=v_1$, l'insieme $X_{\varphi,(a_o)}=\{a: \mathfrak{A}|= v_0=v_1[a_o,a]\}=\{a_o\}$, e $scel(X_{\varphi,(a_o)})$ non può che essere a_o, sicché a_o deve appartenere anche ad X_{i+1}, proprio in base alla sua definizione.

Ancora, per ogni naturale i, $|X_i|=\kappa$. Infatti, per induzione, $|X_0|=\kappa$ per definizione. Inoltre, la cardinalità di $X_{i+1}-X_i$ è uguale alla somma del numero di funzioni della struttura $\mathfrak{A}$ moltiplicato per il numero di n-uple di X_i e del numero di formule del linguaggio moltiplicato per il numero delle (n+2)-uple di X_i. Poiché 1) le n-uple e le (n+2)-uple di X_i sono κ, e 2) le funzioni di $\mathfrak{A}$ sono al più tante quanti sono i simboli di funzione del linguaggio e questi sono un insieme di cardinalità minore od uguale a quella del linguaggio che ha cardinalità λ minore di κ, e 3) le formule sono un insieme di cardinalità λ minore di κ, per le proprietà dell'aritmetica delle cardinalità infinite, si ha che $|X_{i+1}|=\kappa$.

Sia ora $B=\cup\{X_i: i\in|N\}$. Evidentemente $B\subseteq A$ e $|B|=\kappa$. Inoltre B è chiuso rispetto alle funzioni di $\mathfrak{A}$. Infatti, per ogni $n\in|N$, ogni n-upla $(a_o,..., a_{n-1})$ di B ha ciascuno dei suoi elementi in qualche X_i, sicché, detto i' il massimo di tali indici, tutti gli elementi dell'n-upla appartengono anche a $X_{i'}$ poiché ciascun X_i contiene i precedenti; ma allora $F(a_o,...,a_{n-1})$ appartiene a $X_{i'+1}$, e dunque anche a B, per ciascuna funzione n-aria F della struttura.

Poiché B è chiuso rispetto alle funzioni della struttura $\mathfrak{A}$, si può considerare la struttura $\mathfrak{B}$ che è la restrizione di $\mathfrak{A}$ all'insieme B, $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}_{|B}$. Ovviamente $|\mathfrak{B}|=\kappa$. Si dimostra che $\mathfrak{B}$ è una sottostruttura elementare di $\mathfrak{A}$ mostrando che vale la condizione necessaria e sufficiente affinché una sottostruttura sia una sottostruttura elementare. Cosi,' sia fissata una qualsiasi n-upla $(a_o,...,a_{n-1})$ di elementi di B e una qualsiasi formula φ le cui variabili libere sono entro le prime n+1, allora per ogni elemento a di A tale che $\mathfrak{A}|=\varphi[a_o,..., a_{n-1},a]$ deve esistere un elemento b di B tale che $\mathfrak{A}|=\varphi[a_o,..., a_{n-1},b]$. Come prima, se $(a_o,...,a_{n-1})$ è un'n-upla di B, c'è un naturale i' tale che $(a_o,...,a_{n-1})$ è un'n-upla di $X_{i'}$, sicché se $\mathfrak{A}|=\varphi[a_o,..., a_{n-1},a]$, cioè se $X_{\varphi,(a_o,..., a_{n-1})}\neq\emptyset$, allora c'è b appartenente a $X_{i'+1}$, e dunque anche a B, tale che $\mathfrak{A}|=\varphi[a_o,..., a_{n-1},b]$, che è quanto si voleva far vedere.

Così $\mathfrak{B}$ è una sottostruttura elementare di $\mathfrak{A}$ il cui universo B ha cardinalità κ e contiene un qualsiasi fissato insieme di cardinalità minore od uguale a κ, e la dimostrazione è completata.

28. IL TEOREMA DI LOWENHEIM SKOLEM E L'ASSIOMA DELLA SCELTA.

Si ossevi che per dimostrare il teorema debole di Lowenheim Skolem si è usato il teorema di compattezza che era stato dimostrato inizialmente usando l'assioma della scelta, ma poi anche limitandosi all'assunzione più debole del principio dell'ultrafiltro. Nella dimostrazione che il teorema di compattezza implica il teorema di Lowenheim Skolem non si è usato l'assioma della scelta in nessuna delle forme ad esso equivalenti. Ma dal teorema di Lowenheim Skolem segue il seguente

Teorema. Sia κ una qualsiasi cardinalità infinita. Allora $\kappa^2=\kappa$.

DIMOSTRAZIONE. Si consideri un linguaggio con il simbolo logico = e con un simbolo di funzione binario f. Gli enunciati

$$\forall x\forall y\forall v\forall w\ ((\neg x=v\vee\neg y=w)\rightarrow\neg fxy=fvw) \quad e \quad \forall x\exists t\exists u(x=ftu)$$

sono veri in una realizzazione se e solo se il simbolo di funzione f è interpretato in una funzione totale (le funzioni delle strutture sono sempre totali) iniettiva e suriettiva dall'insieme delle coppie ordinate di elementi dell'universo negli elementi dell'universo dell'interpretazione. Si sa che dato un insieme numerabile esiste una biiettività dall'insieme delle sue coppie ordinate nell'insieme stesso, sicché c'è un modello numerabile degli enunciati proposti. Allora, per il teorema di Lowenheim Skolem, detti enunciati hanno modelli di qualsiasi cardinalità infinita κ. Così per ogni cardinalità infinita c'è una biiettività tra il suo quadrato e la cardinalità stessa, come volevasi dimostrare.

Una dimostrazione delicata, che va oltre lo scopo di queste note, mostra che l'assioma della scelta segue dall'affermazione che per ogni cardinalità il quadrato di quella cardinalità dà la stessa cardinalità. Poiché si è dimostrato che dal teorema di Lowenheim Skolem segue che, per ogni cardinale, il quadrato di quel cardinale ha la cardinalità dello stesso cardinale, si è ottenuto che l'assioma della scelta segue dal teorema di Lowenheim Skolem. Se non si è usato l'assioma della scelta senza accorgersene, si potrebbe concludere che il principio dell'ultrafiltro implica l'assioma della scelta, mentre esiste una dimostrazione che ciò non è vero (fatto, che pure va oltre lo scopo di queste note, già ricordato e che ha motivato la dimostrazione, fatta senza usare l'assioma della scelta ma il solo principio dell'ultrafiltro, che la regola R2 preserva la finita soddisfacibilità).

In realtà si è utilizzato l'assioma della scelta non nelle dimostrazioni fatte, ma per enunciare il teorema di Lowenheim Skolem. Infatti nell'enunciato del teorema di Lowenheim Skolem si è anche ipotizzato tacitamente che ogni due cardinalità siano tra loro confrontabili, cioè che dati due qualsiasi insiemi esiste certamente una funzione totale iniettiva o dal primo insieme nel secondo o dal secondo insieme nel primo. L'assunzione che due qualsiasi insiemi abbiano cardinalità tra loro confrontabili segue facilmente dall'assioma della scelta, nella sua forma equivalente del principio del buon ordinamento, ma è anche equivalente ad esso. Così, per quanto si sia arrivati a situazioni che possono far sorgere

29. POSSIBILI MODI DI USARE IL TEOREMA DI COMPATTEZZA.

Sia data una teoria T consistente. Tra i suoi modelli se ne cercano alcuni, se ci sono, che abbiano una particolare proprietà, chiamiamola P. Si cerca di caratterizzare la proprietà mediante enunciati, eventualmente un insieme infinito di enunciati. Cioè si cerca un insieme S, anche infinito, di enunciati che siano veri in una struttura se e solo se quella struttura gode della proprietà P. Se S è un insieme di enunciati che caratterizza la proprietà P dei suoi modelli e $T \cup S$ è un insieme soddisfacibile di enunciati, ci sarà un modello di T che gode della proprietà P.

Il teorema di compattezza permette di verificare se l'insieme $T \cup S$ è soddisfacibile controllando la soddisfacibilità dei suoi sottinsiemi finiti.

Spesso la proprietà P è del tipo: ci sono degli individui che hanno un comportamento ben descritto da certi enunciati. In questo caso la tecnica sopra descritta si precisa ulteriormente. Si amplia il linguaggio con nuovi simboli individuali ciascuno indicante un nuovo individuo, e, per ottenere l'insieme S, si considerano, nel linguaggio ampliato, gli enunciati che descrivono il comportamento dei nuovi individui. Poi, per cercare di far vedere la soddisfacibilità degli enunciati di un qualsiasi sottinsieme finito X di $T \cup S$, spesso si ricorre ad un modello privilegiato $\mathfrak{A}$ di T nel linguaggio iniziale e lo si espande ad un modello $\mathfrak{A}'$ nel linguaggio ampliato interpretando le nuove costanti in modo che siano soddisfatti gli enunciati di S che sono in X.

La tecnica appena esposta può essere utilizzata anche a partire da una struttura $\mathfrak{A}$, per mostrare che si immerge elementarmente in un'altra con precisate caratteristiche. Si espande la struttura data ad una struttura $\mathfrak{A}'$ in un linguaggio con un nome per ogni elemento dell'universo, nome che si interpreta nell'elemento a cui è associato. Ciò perché $\mathfrak{A}'$ si immerge elementarmente in ogni modello $\mathfrak{B}'$ della teoria di $\mathfrak{A}'$, ed anche $\mathfrak{A}$ si immerge elementarmente nella riduzione $\mathfrak{B}$ di ogni tale $\mathfrak{B}'$ al linguaggio iniziale. Sicché si può applicare la metodologia prima vista alla teoria di $\mathfrak{A}'$.

29.1. CARATTERIZZABILITA' SINTATTICA DELL'INSIEME DELLE STRUTTURE FINITE.

Ci si può domandare se in un linguaggio del primo ordine si possano caratterizzare le strutture finite mediante un enunciato, cioè se esista un enunciato vero esattamente nella strutture finite, detto altrimenti, se esista un enunciato φ tale che $\{\mathfrak{A}: \mathfrak{A} \models \varphi\} = \{\mathfrak{A}: \mathfrak{A}$ è una qualsiasi struttura finita$\}$.

Un modo per dire, usando il linguaggio, che una struttura è infinita è quello di aggiungere al linguaggio infiniti nuovi simboli per costante (ad esempio c_i con i numero naturale) e richiedere che siano veri in quella struttura gli enunciati $c_i \neq c_j$, con i e j numeri naturali diversi tra loro, enunciati che asseriscono che quei nomi indicano individui diversi.

Così, se un enunciato φ è vero in una struttura se e solo se la struttura è finita, e se esso viene aggiunto all'insieme di enunciati appena visti, l'insieme Σ di enunciati risultante, $\Sigma = \{\varphi\} \cup \{\neg c_i = c_j: i \neq j$, i e j numeri naturali$\}$, dovrà essere non soddisfacibile, perché ogni suo modello dovrebbe essere simultaneamente finito e infinito.

Invece, sempre nell'ipotesi che ci sia quell'enunciato φ, Σ è soddisfacibile. Infatti si farà vedere che ogni sottinsieme finito Σ_o di Σ è soddisfacibile, pervenendo così al risultato voluto proprio in virtù del teorema di compattezza.

Sia, dunque, Σ_o un qualsiasi sottinsieme finito di Σ. Essendo finito il numero degli enunciati occorrenti in Σ_o, ci sarà un indice massimo i_o dei nuovi simboli di costante del tipo c_i occorrenti in enunciati del tipo $\neg c_i = c_j$ appartenenti ad Σ_o, se ce ne sono, altrimenti i_o sia 0. Sia $\mathfrak{A}_o$ una struttura, adatta al linguaggio di φ, il cui universo abbia almeno i_o elementi. Si espanda $\mathfrak{A}_o$ ad una struttura $\mathfrak{A}_{o'}$, adatta al linguaggio di Σ_o, interpretando ciascun simbolo di costante c_i, con $i \leq i_o$, in elementi diversi dell'universo di $\mathfrak{A}_o$ (cosa possibile vista la cardinalità di $\mathfrak{A}_o$), e interpretando gli altri nuovi simboli per costante aggiunti come si vuole. Questa interpretazione è stata scelta proprio perché così l'interpretazione di c_i è diversa dall'interpretazione di c_j ogniqualvolta i è diverso da j. Così è

ovvio che $\mathfrak{A}_{o'}|= \neg c_i=c_j$ per ogni coppia di numeri naturali diversi i e j minori od uguali a i_o. Poiché gli enunciati veri in una struttura continuano ad essere veri in una sua qualunque espansione[1], anche φ sarà vero in $\mathfrak{A}_{o'}$. Per quanto abbiamo visto possiamo concludere che ogni enunciato di Σ_o è vero in $\mathfrak{A}_{o'}$, fatto che possiamo indicare così: $\mathfrak{A}_{o'}|=\Sigma_o$.
Dunque, come già anticipato, in virtù della compattezza, si può affermare che Σ e soddisfacibile. Ma si è già notato che ciò è impossibile, e pertanto il punto di partenza da cui si è dedotto ciò deve essere falso. Il punto di partenza era l'esistenza dell'enunciato φ vero esattamente nelle strutture finite, enunciato che, perciò, non può esistere.

29.2. CATEGORICITA'.

Un problema che si affaccia in modo del tutto naturale nello studio della logica è il seguente. Il linguaggio è in grado di caratterizzare in modo univoco una prefissata struttura?
Spesso a questo problema viene data una risposta positiva implicita nell'atteggiamento espresso dall'affermazione: se conosci ciò di cui vuoi parlare, e se conosci la lingua, devi essere in grado di descrivere compiutamente il tuo pensiero.
Qui "ciò di cui vuoi parlare" può essere inteso come la struttura che si vuol descrivere (che si deve supporre completamente nota, altrimenti non ha neppure senso parlare di verità di un enunciato in quella struttura); e "la capacità di descrivere compiutamente il proprio pensiero" può essere intesa come la capacità di precisare univocamente la struttura che si considera attraverso il linguaggio (naturalmente precisazione univoca a meno di isomorfismi, perché due strutture isomorfe si comportano esattamente nello stesso modo, e non possono essere distinte, né interessa distinguerle, mediante il linguaggio).
Si dice ***categorica*** una teoria che ha un solo modello a meno di isomorfismi.
Con questa terminologia, il problema iniziale si può formulare così: data una struttura $\mathfrak{A}$ c'è una teoria categorica T di cui $\mathfrak{A}$ è modello?
Poiché la teoria T è sicuramente contenuta nella teoria della struttura $\mathfrak{A}$ (indicata con Th($\mathfrak{A}$)), e dal momento che una teoria più ricca non può che precisare meglio una certa struttura, il problema iniziale può essere anche espresso cosi: la teoria di una data struttura è categorica?
Ovviamente la teoria di una struttura si scrive nel linguaggio adatto a quella struttura, che potrebbe anche essere abbastanza povero, sicché un risultato negativo potrebbe essere attribuito a tale povertà di linguaggio piuttosto che ad una impossibilità sancita dall'analisi in corso.
Per superare questo sospetto, a partire da una struttura adatta ad un certo linguaggio, si consideri una sua espansione ad un linguaggio più ricco che abbia almeno un nome per ciascun elemento della struttura. Ciò sicuramente non cambia sostanzialmente la struttura in questione. In questo spirito, si può riformulare in nostro problema nel seguente modo: data una struttura, esiste una sua espansione la cui teoria è categorica?
Il teorema di Lowenheim Skolem per strutture fornisce immediatamente una risposta negativa alla domanda formulata, se la struttura data è infinita.
Infatti, proprio per questo teorema, la teoria di una qualsiasi espansione di una struttura infinita ha modelli di qualsiasi cardinalità maggiore od uguale alla cardinalità del linguaggio (si noti che, nel caso in esame, la cardinalità del linguaggio della struttura espansa è almeno uguale a quella della stessa struttura), e due modelli di diversa cardinalità certamente non possono essere isomorfi per l'impossibilità di una biiettività tra gli universi delle due strutture.
Così si può affermare che nesssun linguaggio potrà mai caratterizzare univocamente (a meno di isomorfismi) una struttura infinita.
Come si è visto, ben diversa è la situazione nel caso di strutture finite. Vale infatti il seguente risultato: data una qualsiasi struttura finita, la sua teoria è categorica. Per ottenere questo risultato è essenziale che = sia un simbolo logico del linguaggio.

[1] L'espansione non cambia ne' l'universo della struttura ne' l'interpretazione dei simboli che erano gia'

L'analisi condotta mostra un serio limite dei linguaggi formali del primo ordine. Questo limite è strettamente legato all'accettazione della nozione di infinito, nozione, d'altra parte, centrale in tutta la matematica.

E' opportuno qui ricordare che sono aspetti essenziali della nozione di linguaggio del primo ordine sia la finitezza di ogni formula, che la effettività della costruzione delle formule, che la restrizione della quantificazione alle sole variabili individuali.

Sono queste caratteristiche del linguaggio che gli impediscono di descrivere compiutamente le strutture infinite.

Infatti si dimostra, ma non lo faremo qui, che, se si ammettono formule di lunghezza infinita (ad esempio consentendo la congiunzione di infinite componenti), cadono i teoremi di completezza, di compattezza, di Lowenheim Skolem, e si può caratterizzare, a meno di isomorfismi, ad esempio, l'usuale struttura intesa dei numeri naturali. Ma la conoscenza piena così acquisita dei numeri naturali si basa sulla possibilità di conoscere con precisione cosa sono le formule di lunghezza infinita, e ciò richiede già di conoscere, a livello di metalinguaggio, l'infinità dei numeri naturali.

Anche se si ammette di poter quantificare su variabili per relazioni, ci si trova in una situazione simile alla precedente[2] (ad esempio categoricità della teoria dei numeri naturali), pur di interpretare le variabili per relazioni come un qualsiasi sottinsieme della potenza cartesiana dell'universo della struttura alla arietà della relazione. Si noti, tuttavia, che si possono interpretare le quantificazioni sulle variabili per relazioni anche in modo diverso, e allora si riottengono i teoremi di completezza, di compattezza e di non categoricità delle teorie di strutture infinite. Sicché, per ottenere la categoricità mediante l'introduzione di variabili per relazioni, bisogna consentire l'interpretazione di queste solo nell'insieme di tutti i sottinsiemi della i-esima potenza dell'universo, dove i è l'arietà delle relazioni a cui si riferiscono le variabili per relazioni considerate. Ma la conoscenza di tutti i sottinsiemi di un insieme infinito comporta anche la conoscenza di quell'insieme. Sicché, sia in questo caso, come nel caso precedente, la possibilità di caratterizzare univocamente, a meno di isomorfismi, almeno i numeri naturali segue dal limitare (fatto precisabile nel metalinguaggio) le strutture in cui interpretare le variabili per relazioni alle sole prima indicate: ma per distinguere tra questi vari tipi di strutture e' necessario conoscere già completamente l'insieme dei sottinsiemi delle i-uple ordinate di elementi dell'universo (con i arietà delle relazioni a cui si riferiscono le variabili), conoscenza che implica quella dell'universo che, nel caso presente, è costituito dai numeri naturali. Così, però, non si risolve il problema di caratterizzare la struttura intesa dei numeri naturali e, più in generale, le strutture infinte.

L'ulteriore caratteristica dei linguaggi formali (che si possa decidere effettivamente quali sono le formule) è irrinunciabile (anche se non sempre rispettata dai linguaggi naturali), perché altrimenti tutto rimarrebbe nella più vaga indeterminazione e non si potrà precisare ciò che si può e ciò che non si può ottenere.

Si è visto che le teorie di strutture infinite non sono categoriche essenzialmente per motivi di cardinalità dei possibili modelli. Sorge allora naturale la domanda se esistono modelli non isomorfi, ma della stessa cardinalità, della teoria di una struttura infinita.

Si dice α***-categorica***, con α cardinale infinito, una teoria i cui modelli di cardinalità α sono tra loro isomorfi.

Per quanto concerne l'α-categoricità di teorie di strutture la situazione si presenta più articolata. Ci sono esempi di teorie α-categoriche per ogni cardinale infinito α, teorie α-categoriche per certi cardinali infiniti α e non per altri, teorie mai α-categoriche.

L'analisi dettagliata di questa situazione va oltre lo scopo di questa esposizione, ma forse, vale la pena rilevare che l'α-categoricità dipende essenzialmente dalla ricchezza del linguaggio di una teoria, e dalla cardinalità del linguaggio stesso. Ad esempio, si dimostra, ma ancora va oltre i limiti di questa presentazione, che la teoria dell'usuale struttura dei numeri razionali in cui l'unica relazione extralogica a cui si attribuisce un nome sia quella d'ordine è α-categorica esattamente quando α è la cardinalità dei naturali, ma non lo è più la teoria (nel dovuto linguaggio arricchito) di una sua espansione della struttura dei numeri razionali ottenuta aggiungendo le costanti 0 e 1 le funzioni addi

---

[2] In questo caso l'unicita', a meno di isomorfismi, dell'usuale struttura intesa dei numeri naturali e' il

Si è già dimostrato che l'aritmetica, cioè la teoria della struttura $\mathfrak{N}$ =(|N,{≡,∠},{succ, ⊕,⊗},{*0*}) dei numeri naturali (dove |N rappresenta l'insieme dei numeri naturali, ≡ la relazione binaria di essere lo stesso numero, ∠ l'usuale relazione binaria d'ordine tra numeri naturali, succ la funzione successore immediato, ⊕ l'addizione tra numeri naturali, ⊕ la moltiplicazione tra numeri naturali e *0* il numero naturale zero), ha modelli numerabili non isomorfi. Con la terminologia introdotta, questo risultato si può ridire così: **Teorema**. L'aritmetica non è $\aleph_0$ categorica.

29.3. ARCHIMEDEITA'.

In modo del tutto analogo a quanto fatto nella dimostrazione del teorema precedente, si dimostra anche la seguente proposizione.

Teorema. *Un campo ordinato archimedeo si immerge elementarmente in un campo non archimedeo della stessa cardinalità.*

Ci sono vari modi tra loro equivalenti di caratterizzare un campo ordinato archimedeo. Qui adottiamo la seguente formulazione. Un campo ordinato è archimedeo se per ogni suo elemento x maggiore di zero ha anche un elemento del tipo *1/n* che sia minore di x, dove *n* è l'elemento del campo che si ottiene, a partire da *0* (l'elemento neutro rispetto all'addizione nel campo), aggiungendo *1* (l'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione nel campo) n volte, con n numero naturale maggiore di 0. Si noti la differenza tra *n* e n: *n* è un elemento del campo ottenuto in un certo modo, mentre n, in generale, non è un elemento del campo, ma un numero naturale che indica quante volte si è ripetuta l'operazione di aggiungere *1* a partire da *0* per ottenere *n*.

Poiché il fatto che una struttura sia un campo si può esprimere con un numero finito di enunciati[3], e l'ordine del campo è una relazione della struttura caratterizzabile mediante pochi[4] enunciati, allora anche ogni struttura in cui un campo ordinato si immerga elementarmente è un campo ordinato.

Così per esprimere la non archimedeità di una struttura in cui si immerga elementarmente un campo archimedeo, bisogna affermare l'esistenza di un elemento positivo minore di tutti gli elementi del tipo *1*/*n*, con *n*>*0*.

Sicché, per dimostrare la proposizione enunciata, si dovrà esibire una struttura in cui il campo dato si immerga elementarmente e avente un elemento positivo minore di tutti quelli del tipo *1*/*n*, con *n*>*0*.

Dimostrazione. Al solito, sia $\mathfrak{A}$ la struttura di campo ordinato di partenza, ed $\mathfrak{L}$ il linguaggio adatto ad essa. Si espanda $\mathfrak{A}$ ad una struttura $\mathfrak{A}'$ adatta ad un linguaggio $\mathfrak{L}'$ in cui ci siano i nomi di ciascun elemento dell'universo di $\mathfrak{A}$. Si noti che la cardinalità di $\mathfrak{L}'$ è uguale sia a quella di $\mathfrak{A}$ che a quella di $\mathfrak{A}'$. Sia T la teoria di $\mathfrak{A}'$, cosicché $\mathfrak{A}$ si immergerà elementarmente in ogni riduzione al linguaggio $\mathfrak{L}$ di un modello di T.

Si ampli ulteriormente $\mathfrak{L}'$ a $\mathfrak{L}''$ mediante l'aggiunta di un simbolo per costante, c, che vorrà indicare un elemento positivo minore di tutti quelli del tipo *1*/*n*, *n*>*0*. Anche la cardinalità di $\mathfrak{L}''$ è uguale a quella di $\mathfrak{A}$.

Sia Σ l'insieme di enunciati che esprime questa caratteristica di c, e precisamente Σ = {c>$\underline{0}$}∪{c< $\underline{1}$/$\underline{n}$: n è un numero naturale e n>0} ($\underline{0}$, $\underline{1}$, $\underline{n}$ sono i nomi degli elementi *0*, *1*, *n* rispettivamente).

Si dimostra che la teoria T∪Σ è soddisfacibile.

Anche questa volta si sfrutterà il teorema di compattezza, e cominciando col far vedere che un qualsiasi sottinsieme finito S di T∪Σ è soddisfacibile.

Sia m il più grande numero naturale tale che un enunciato del tipo c<$\underline{1}$/$\underline{m}$ occorre in S, 1 se in S non ci sono enunciati di tale tipo. Si espanda $\mathfrak{A}'$ ad una struttura $\mathfrak{A}''$, adatta al linguaggio di T∪Σ, interpretando c in *1*/(*m* +*1*). E' immediato che $\mathfrak{A}''$ è modello di S.

Così ogni sottinsieme finito di T∪Σ è soddisfacibile, e, per il teorema di compattezza, anche T∪Σ è soddisfacibile.

---

[3] I soliti assiomi di campo ben noti dall'algebra.

[4] Si possono utilizzare le cosidette proprieta' antiriflessiva, transitiva, tricotomica, e le note proprieta'

Per il teorema di Lowenheim Skolem, c'è un modello $\mathfrak{B}''$ di $T\cup\Sigma$ di cardinalità uguale alla cardinalità di $\mathfrak{A}$, che è la cardinalità di $\mathfrak{L}''$.

Per come si è proceduto $\mathfrak{A}$ si immerge elementarmente nella riduzione di $\mathfrak{B}''$ a $\mathfrak{B}$, struttura adatta al linguaggio $\mathfrak{L}$.

Pertanto, per quanto già osservato, $\mathfrak{B}$ è un campo ordinato. Resta solo da far vedere che $\mathfrak{B}$ non è archimedeo.

Di fatto, l'interpretazione di c in $\mathfrak{B}''$, la si indichi con C, è un elemento positivo minore di tutti gli elementi del tipo *1/n*, n numero naturale maggiore di 0, sicché $\mathfrak{B}''$ sarà non archimedeo proprio perché $\mathfrak{B}''$ è modello di Σ. L'elemento C resta nell'universo di $\mathfrak{B}$ con le stesse caratteristiche, anche se ora non ha più un nome specifico. Pertanto anche $\mathfrak{B}$ sarà non archimedeo, come si voleva far vedere.

Il risultato di cui abbiamo appena completato la dimostrazione può essere formulato anche nel modo seguente. Non c'è alcun enunciato φ, né alcun insieme di enunciati Φ, veri in un campo ordinato se e solo se il campo è archimedeo.

Infatti, con riferimento alla simbologia precedente, Φ dovrebbe essere contenuto in T, e $T\cup\Sigma$ dovrebbe essere non soddisfacibile, mentre abbiamo visto che lo è.

29.5. RELAZIONI CONCORRENTI.

Le situazioni studiate nelle due sezioni precedenti hanno delle caratteristiche comuni. In entrambi i casi, data una struttura, si cercava una sua estensione elementare che avesse un elemento in una certa relazione binaria R con ciascun elemento dell'universo della struttura data; ed il problema aveva soluzione, grazie al teorema di compattezza, poiché, scelto un qualsiasi sottinsieme finito S dell'universo della struttura data, c'era sempre un elemento in quell'universo in relazione R con ciascun elemento di S.

Una relazione binaria R si dice ***concorrente*** se è tale che, per ciascun insieme finito S, ci sia sempre un elemento in relazione con ogni elemento di S (espresso altrimenti: per ogni insieme finito S esiste b tale che per ogni $a\in S$ si ha $R(a,b)$).

Si vuole far vedere che la carattersitca essenziale che permette di ottenere i risultati delle due precedenti sezioni è proprio la concorrenza, mostrando che quei risultati valgono anche quando al posto delle relazioni considerate si prenda una qualsiasi relazione concorrente.

Teorema. *Siano* $\mathfrak{A}$ *una struttura infinita*, R *un insieme di sue relazioni binarie concorrenti* R_i, $i\in I$, *con* I *un insieme di indici, e* κ *un cardinale maggiore od uguale al massimo tra la cardinalità di* $\mathfrak{A}$, *e quella del linguaggio* $\mathfrak{L}$ *di* $\mathfrak{A}$ *(si noti che* κ è *maggiore od uguale alla cardinalità di* I *poiché ciascuna delle relazioni* R_i *avrà un nome). In queste ipotesi esiste una struttura* $\mathfrak{B}$ *,di cardinalità* κ, *in cui* $\mathfrak{A}$ *si immerge elementarmente, tale che per ogni relazione* R_i *esiste un elemento* b_i *tale che per ogni a nell'universo di* $\mathfrak{A}$ *si ha* $R_i(a,b_i)$.

<u>Dimostrazione</u>. Al solito iniziamo considerando una espansione $\mathfrak{A}'$ di $\mathfrak{A}$ ad un linguaggio $\mathfrak{L}'$ con un nome <u>a</u> per ogni elemento a dell'universo A di $\mathfrak{A}$, nome da interpretarsi nell'elemento a.

Sia T la teoria di $\mathfrak{A}'$.

Si ampli ulteriormente il linguaggio $\mathfrak{L}'$ ad un linguaggio $\mathfrak{L}''$ aggiungendo nuovi simboli di costante c_i per ciascun $i\in I$ (cioè in corrispondenza di ciascuna relazione concorrente considerata) e d_j per ogni $j<\kappa$. Si noti che la cardinalità di $\mathfrak{L}''$ è esattamente κ.

Sia Σ l'insieme degli enunciati $P_i(\underline{a},c_i)$ al variare di a in A e di i in I (dove P_i è il predicato che è nome della relazione R_i) e degli enunciati $\neg d_{j_1}=d_{j_2}$ per ogni coppia j_1,j_2 di elementi di κ tra loro diversi: $\Sigma=\{P_i(\underline{a},c_i)\colon a\in A \text{ e } i\in I\}\cup\{\neg d_{j_1}=d_{j_2}\colon j_1\in\kappa \text{ e } j_2\in\kappa \text{ e } j_1\neq j_2\}$.

Si è ormai imparato che $\mathfrak{A}$ si immerge elementarmente nella riduzione $\mathfrak{B}$ ad $\mathfrak{L}$ di un modello $\mathfrak{B}'$ di cardinalità κ di $T\cup\Sigma$, se $T\cup\Sigma$, è consistente, che anche $\mathfrak{B}$ avrà cardinalità κ, e che nell'universo B di $\mathfrak{B}'$, che è anche l'universo di $\mathfrak{B}$, ci saranno elementi b_i, che interpreteranno i simboli c_i, tali che per ogni a in A risulterà $R_i(a,b_i)$. Sicché, per ottenere il risultato voluto, basta far vedere che $T\cup\Sigma$ ha un modello di cardinalità κ. Ma la presenza in Σ degli enunciati del tipo $\neg d_{j1}=d_{j2}$, grazie al teorema di Lowenheim Skolem, riduce il problema alla soddisfacibilità di $T\cup\Sigma$.

Per dimostrare quest'ultimo punto si ricorre ancora una volta al teorema di compattezza. Sia S un sottinsieme finito di $T\cup\Sigma$. Si fa vedere che S è soddisfacibile. Allo scopo, si espanda $\mathfrak{A}$ alla struttura $\mathfrak{A}_o$, adatta al linguaggio $\mathfrak{L}''$, interpretando i simboli c_i in S in elementi α_i di A tali che $R_i(a,\alpha_i)$ per ogni a tale che $P_i(\underline{a},c_i)\in S$, i simboli del tipo d_j in S in elementi tra loro diversi, e gli altri nuovi simboli come si vuole. Tutto ciò è possibile perché le relazioni R_i sono concorrenti e perché $\mathfrak{A}$ è una struttura infinita, mentre S è un insieme finito. Con queste scelte è evidente che $\mathfrak{A}_o\models S$, e ciò completa la dimostrazione.

29.6. IL TEOREMA DI COMPATTEZZA E IL PRINCIPIO DELL'ULTRAFILTRO.

Si è già visto come per ottenere il teorema di compattezza sia sufficiente partire dal principio dell'ultrafiltro che è più debole dell'assioma della scelta. Di fatto il teorema di compattezza è equivalente al principio dell'ultrafiltro come dimostra il seguente teorema la cui dimostrazione si basa proprio sul teorema di compattezza, senza far ricorso all'assioma della scelta (nella sua formulazione equivalente del lemma di Zorn) di cui è facile conseguenza, come si è già visto.

Teorema. Ogni filtro in un'algebra di Boole può essere esteso ad un ultrafiltro sulla stessa algebra.

DIMOSTRAZIONE. I seguenti enunciati, in un linguaggio con due predicati binari = e $\leq$ (che useremo con notazione interposta tra i due termini che lo dovrebbero seguire), un simbolo di funzione unario *c*, due simboli di funzione binari *inf* e *sup*, due simboli di costante 0 e 1, caratterizzano le (sono veri in una struttura se e solo se questa è una) Algebra di Boole presentata come una struttura parzialmente ordinata (i primi tre enunciati), con un elemento massimo e uno minimo (il quarto e quinto enunciato), distributiva (gli enunciati ottavo e nono, il sesto e il settimo precisano la relazione tra l'ordine e le funzioni binarie) e complementata (gli ultimi due enunciati, *c*x viene detto il complementare di x).

$$(1)\ \forall x(x\leq x);\ (2)\ \forall x\forall y((x\leq y\wedge y\leq x)\rightarrow x=y);\ (3)\ \forall x\forall y\forall z((x\leq y\wedge y\leq z)\rightarrow x\leq z);$$
$$(4)\ \forall x(x\leq 1);\ (5)\ \forall x(0\leq x);$$
$$(6)\ \forall x\forall y\exists z(z=\mathit{sup}xy\leftrightarrow(x\leq z\wedge y\leq z\wedge\forall v((x\leq v\wedge y\leq v)\rightarrow z\leq v)));$$
$$(7)\ \forall x\forall y\exists z(z=\mathit{inf}xy\leftrightarrow(z\leq x\wedge z\leq y\wedge\forall v((v\leq x\wedge v\leq y)\rightarrow v\leq z)));$$
$$(8)\ \forall x\forall y\forall z(\mathit{inf}x\mathit{sup}yz=\mathit{sup}\mathit{inf}xy\mathit{inf}xz);$$
$$(9)\ \forall x\forall y\forall z(\mathit{sup}x\mathit{inf}yz=\mathit{inf}\mathit{sup}xy\mathit{sup}yz);$$
$$(10)\ \forall x(\mathit{sup}x\mathit{c}x=1);\ (11)\ \forall x(\mathit{inf}x\mathit{c}x=0).$$

Si noti che l'algebra dei sottinsiemi di un certo insieme è una tipica algebra di Boole, così tipica che si dimostra che ogni algebra di Boole è isomorfa ad una sottoalgebra dell'algebra dei sottinsiemi di un opportuno insieme.

Per parlare di filtro in un'algebra di Boole bisogna introdurre nel linguaggio un ulteriore predicato unario P che è caratterizzato dal soddisfare i seguenti enunciati.

$$(12)\ P1;\ (13)\ \neg P0;\ (14)\ \forall x\forall y((Px\wedge x\leq y)\rightarrow Py);$$
$$(15)\ \forall x\forall y((Px\wedge Py)\rightarrow P\mathit{inf}xy).$$

Volendo poi parlare di un ultrafiltro che estende il filtro dato, bisogna arricchire il linguaggio dell'algebra di Boole data con il suo filtro introducendo un nuovo predicato unario P' caratterizzato, per quanto filtro, dalle formule analoghe alle (12), (13), (14), (15), e precisamente

$$(16)\ P'1;\ (17)\ \neg P'0;\ (18)\ \forall x\forall y((P'x\wedge x\leq y)\rightarrow P'y);$$
$$(19)\ \forall x\forall y((P'x\wedge P'y)\rightarrow P'\mathit{inf}xy);$$

il fatto che un filtro sia un ultrafiltro e che estenda il filtro dato è caratterizzato dagli enunciati:

$$(20)\ \forall x(P'x\vee P'\mathit{c}x);\ (21)\ \forall x(Px\rightarrow P'x)$$

Potrebbe sembrare strano affrontare il problema che si vuo risolvere mediante il teorema di compattezza visto che le nozioni coinvolte sono caratterizzate da un insieme finito di enunciati che è soddisfacibile come si vede facilmente dalla struttura che ha per universo esattamente due elementi a e b, a che interpreta il simbolo 1 e b che interpreta il simbolo 0, in cui la relazione che interpreta $\leq$ è costituita dalle tre coppie (a,a). (b,a), (b,b), la funzione che interpreta *inf* associa a solo alla coppia (a,a) mentre alle altre associa b, la funzione che interpreta *sup* associa b solo alla coppia (b,b) mentre alle altre associa a, ed infine la funzione che interpreta c associa b ad a e a a b.

Di fatto, se l'algebra di Boole in cui si vuole dimostrare il teorema è finita, si può arrivare banalmente al risultato (volendo per tentativi ed errori (in numero finito)) cercando di vedere quali tra gli elementi che non appartengono al filtro o il cui complementare non appartiene al filtro può essere aggiunto al filtro mantenendo le proprietà di filtro, fino ad arrivare ad un ultrafiltro.

Tuttavia quello che non è espresso negli enunciati considerati è quale algebra di Boole (finita o meno) si sta considerando e in quale filtro si interpreta il predicato P. Potrebbe succedere che per certi filtri in certe algebre di Boole si riesca abbastanza facilmente a mostrare che c'è un ultrafiltro che estende il filtro dato (si veda il caso precedentemente considerato di algebre di Boole finite), anche se in generale ciò non è vero. Di quale filtro in quale algebra di Boole si tratti può essere espresso solo mediante gli enunciati del linguaggio adatto ad una indicizzazione dell'algebra di Boole di partenza dicendo elemento per elemento dell'algebra se appartiene o meno al filtro, e questo insieme di enunciati è infinito se l'algebra di Boole in considerazione è infinita.

Dopo tutte queste considerazione, ecco l'effettiva dimostrazione del teorema enunciato.

Sia data una struttura $\mathfrak{A}$ che è un'algebra di Boole con un filtro indicizzata. Il linguaggio di questa struttura avrà come simboli propri i predicati $\leq$ (binario) e P (u–na–rio), i simboli per funzione *c* (unario) e *sup* e *inf* (binari) e un simboli per costante per ciascun elemento dell'universo (tra questi ci sono anche 1 e 0 rispettivamente associati alle costanti massimo elemento della struttura e minimo elemento della struttura). Si consideri Th($\mathfrak{A}$): essa contiene tutti gli enunciati da (1) a (15) visti sopra.

Si arricchisca ora il linguaggio con un nuovo predicato P' e si consideri l'insieme Σ costituito dagli enunciati dal (16) al (20) visti prima (si noti la differenza con le precedenti applicazioni del teorema di compattezza in cui si arricchiva il linguaggio con nuovi simboli per costante e si aggiungevano infinite formule).

Si vede anzitutto che Th($\mathfrak{A}$)$\cup\Sigma$ è soddisfacibile, sfruttando il teorema di compattezza. Sia S un qualsiasi sottinsieme finito di Th($\mathfrak{A}$)$\cup\Sigma$. Sia X_S l'insieme (finito) dei simboli di costante occorrenti in S. Si consideri la minima sottoalgebra $\mathfrak{A}_S$ dell'algebra di Boole data $\mathfrak{A}$ che contiene le costanti corrispondenti ai simboli per costante in X_S, con il filtro restrizione alla sottoalgebra del filtro di $\mathfrak{A}$. La struttura $\mathfrak{A}_S$ è finita ed è modello degli enunciati di S che non sono in Σ. Inoltre in questa struttura si può estendere il filtro ad un ultrafiltro proprio perché ciò si dimostra banalmente se l'algebra è finita, come di fatto è quella che si sta considerando. Sia allora $\mathfrak{A}_S'$ la struttura ottenuta da $\mathfrak{A}_S$ espandendo questa interpretando il predicato P' nell'ultrafiltro di cui si è accertata l'esistenza. Finalmente $\mathfrak{A}_S'$ è modello di S che pertanto è soddisfacibile. Così si può concludere che in effetti Th($\mathfrak{A}$)$\cup\Sigma$ è soddisfacibile.

Poiché $\mathfrak{A}$ è una struttura indicizzata, essa si immerge elementarmente nei modelli della sua teoria, e in particolare si immerge nella riduzione al suo linguaggio di $\mathfrak{B}$, se $\mathfrak{B}$ è un modello di Th($\mathfrak{A}$)$\cup\Sigma$. Si sa anche che $\mathfrak{A}$ è isomorfa alla riduzione al proprio linguaggio della sottostruttura elementare $\mathfrak{B}'$ di $\mathfrak{B}$ ottenuta da $\mathfrak{B}$ restringendo questo al codominio dell'immersione. Nel restringere $\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{B}'$ l'ultrafiltro di $\mathfrak{B}$ diviene un ultrafiltro di $\mathfrak{B}'$ perché soddisfa gli enunciati da (16) a (20) essendo la sottostruttura elementare. Finalmente, per le proprietà degli isomorfismi, la controimmagine nell'isomorfismo dell'ultrafiltro di $\mathfrak{B}'$, che estende il filtro di $\mathfrak{B}'$ immagine di quello di $\mathfrak{A}$, è un ultrafiltro di $\mathfrak{A}$ che estende quello dato, che è quanto si voleva dimostrare.

30. PARADOSSO DI SKOLEM.

Si vuole ora considerare una situazione particolarmente interessante per la matematica e, da certi punti di vista, sorprendente: essa riguarda l'usuale collezione degli insiemi con l'appartenenza.

In senso stretto, ciò che stiamo considerando non è neppure una struttura, poiché il suo universo non è un insieme, ma una classe propria[5]. Anche l'appartenenza non è una relazione, nel senso che non è un insieme di coppie ordinate, ma una collezione propria di coppie ordinate.

Ma non tutto è perduto. Si può cercare di estendere la nozione di struttura per includere situazioni del tipo presentato che includono classi proprie. Per una maggior chiarezza espositiva, conveniamo di chiamare ***struttura generalizzata*** il nuovo concetto che si sta per introdurre, simile a quello di struttura. Una struttura generalizzata non sarà più una quaderna ordinata, perché una quaderna deve avere quattro elementi, mentre le classi proprie non sono elementi. Si considerino, allora, alcune (in numero finito) collezioni (non una collezione di collezioni, perché ad una collezione appartengono solo elementi): una collezione da chiamarsi universo; una o più (ma in numero finito) collezioni i cui elementi sono n-uple ordinate di elementi dell'universo, con n ben fissato per ciascuna di queste collezioni, (ciascuna di queste collezioni sarà detta una relazione generalizzata); ed ancora delle (sempre in numero finito) collezioni (eventualmente nessuna) di (n+1)-uple ordinate di elementi dell'universo, con n ben fissato per ciascuna di queste collezioni, con l'ulteriore proprietà che, scelti i primi n elementi dell'(n+1)-upla, è unico l'(n+1)-esimo elemento tale che l'(n+1)-upla appartenga alla collezione (ciascuna di queste collezioni sarà detta una funzione generalizzata).

Le strutture generalizzate possono non essere insiemi. Pertanto, in generale, non si potrà più parlare di proprietà di certe strutture generalizzate, o di relazioni tra strutture generalizzate, o di collezioni di strutture generalizzate. Ma si potranno fare considerazioni che dipendono dagli elementi delle varie collezioni. In particolare si potrà ancora dire come interpretare una formula di un linguaggio in una struttura generalizzata con una attribuzioni di valori alle variabili, e così dire anche quando una formula è vera; si può ancora considerare la teoria di una struttura generalizzata.

L'usuale collezione degli insiemi con l'appartenenza è una struttura generalizzata e si può considerare la sua teoria T, che chiameremo teoria completa degli insiemi[6].

Se l'usuale struttura generalizzata degli insiemi non è un'assurdità, la sua teoria T sarà soddisfacibile, e, come tale, avrà un modello (nel senso a suo tempo precisato). Anzi, poiché il linguaggio è numerabile, avendo il solo simbolo extralogico $\in$, per il teorema di Lowenheim Skolem, ci saranno modelli numerabili di T.

Ma tra gli enunciati di T ci sarà il cosidetto teorema di Cantor, quello che ha per conseguenza l'esistenza di insiemi più che numerabili, affermando che l'insieme dei sottinsiemi di un insieme infinito è strettamente più numeroso dell'insieme infinito dato, in particolare quando questo è l'insieme dei numeri naturali. Si indichi con $\exists z\psi(z)$ l'enunciato richiedente l'esistenza di insiemi più che numerabili[7]. Esso dovrà essere vero in ogni modello di T, in particolare in un modello numerabile la cui esistenza era stata affermata nel capoverso precedente.

Non è strano che *in una struttura numerabile ci sia un elemento* "*più che numerabile*"? Detta in questo modo l'affermazione ha tutta l'aria di una assurdità!

Questa stranezza va sotto il nome di ***paradosso di Skolem***. Si noti che, se il paradosso di Skolem fosse davvero un'assurdità, metterebbe in crisi la teoria degli insiemi e tutta la

---

[5] Si sta pensando ad un concetto di insieme per cui valga l'assioma di regolarita'.

[6] Si sarebbe potuto far a meno di accennare alle strutture generalizzate, e pervenire ugualmente ad una teoria degli insiemi, non quella completa (se ha senso parlare di essa), ma una qualsiasi costruita a partire da opportuni assiomi. Ancora ci sarebbe stato il problema della sua consistenza, ma accettata questa, e il fatto che in essa ci sia il teorema di Cantor, l'esposizione potrebbe proseguire in modo del tutto analogo.

[7] $\psi(z)$ sara' la formula della teoria degli insiemi, nella sola variabile libera z, che dice che, per ogni ordinale α minore od uguale ad ω (l'ordinale dei numeri naturali), non c'e' alcuna biiettivita' tra α e l'in-

matematica moderna che si fonda su di essa: infatti per giungere al paradosso non si sono introdotte altre ipotesi se non quelle usuali della teoria degli insiemi e gli sviluppi di logica basati su di essa.

Ma la frase in corsivo va letta con attenzione.

A ragion veduta la locuzione "più che numerabile" è stata messa tra virgolette poiché è l'interpretazione dell'enunciato $\exists z\text{-}\psi(z)$ in un modello numerabile di T in cui il predicato $\in$ sarà interpretato in una relazione di "appartenenza", chiamiamola E, che può non avere nulla a che vedere con l'usuale relazione di appartenenza (essere uno degli elementi di una certa collezione)[8]. Così, il termine "più che numerabile" non è detto che indichi ciò a cui si è abituati, proprio in funzione di chi è la relazione "appartenenza".

Sostanzialmente, se d è l'elemento, di un modello M, voluto dall'enunciato $\exists z\psi(z)$ vero in M, allora l'insieme che deve essere "più che numerabile" sarà l'insieme $D=\{y: yEd\}$. D'altra parte D è un sottinsieme dell'universo numerabile, e, pertanto, D sarà al più numerabile, pur dovendo essere "più che numerabile": ecco il paradosso. Niente dice che D debba appartenere all'universo del modello (pur appartenendovi d), né che d debba essere un sottinsieme dello stesso universo (pur essendolo D).

Si osservi che il paradosso si gioca tutto sul contrasto tra l'affermazione di numerabilità dell'universo della struttura, e l'interpretazione dell'enunciato che proclama l'esistenza di un elemento "più che numerabile". L'affermazione di numerabilità della struttura è, evidentemente, effettuata nel metalinguaggio, dal di fuori della stessa struttura; mentre l'enunciato che proclama l'esistenza di un elemento "più che numerabile" è nella teoria della struttura e fa una affermazione dal di dentro della struttura.

Questa osservazione non porterebbe alla soluzione del paradosso se la sottile distinzione tra affermazioni dal di dentro e dal di fuori della struttura fosse priva di senso, cioè se le affermazioni dal di dentro e dal di fuori della struttura dessero le stesse informazioni sulla struttura.

In effetti per certe affermazioni è proprio così. Si pensi ad esempio all'enunciato $\exists v_1\exists v_2(v_1\neq v_2)$, chiamiamolo σ: dire che σ è vero in una struttura equivale a dire che in quella struttura ci sono almeno due elementi. Detto altrimenti, $\mathfrak{A} \models \sigma$ se solo se l'universo della struttura ha almeno due elementi. Ma l'ultima affermazione (l'universo della struttura ha almeno due elementi), che indicheremo con $\langle\sigma\rangle$, non è altro che l'enunciato σ letto nel metalinguaggio e relativizzato all'universo di $\mathfrak{A}$. Cioè un enunciato è vero in una struttura se e solo se quella struttura ha le caratteristiche espresse dall'enunciato letto da fuori, nel metalinguaggio, ovvero se quell'enunciato dice le stesse cose dal di dentro della struttura che dal di fuori. Quando sia ben chiaro in quale struttura vadano fatte le interpretazioni, quanto detto diviene: σ è vero in $\mathfrak{A}$ se e solo se $\langle\sigma\rangle$; che è come dire, in modo più colorito, un enunciato è vero in quella struttura se e solo se vale quanto affermato da quell'enunciato nel metalinguaggio, ossia un enunciato è vero in quella struttura dal di dentro se e solo se è vero dal di fuori (cioè se e solo se la situazione è proprio come descritta dall'enunciato).

Così, se il paradosso di Skolem non è un'assurdità (e guai se lo fosse, come si è già osservato), ci dovranno essere degli enunciati la cui verità non equivale a quanto affermano nel metalinguaggio, enunciati che non dicono dal di dentro esattamente quanto dicono dal di fuori.

In effetti per la formula $\psi(z)$ è proprio così. Essa è del tipo $\neg\exists f\exists\alpha\ \alpha\leq\omega\rightarrow\chi(f,\alpha,z)$, dove $\chi(f,\alpha,z)$ è la formula[9] che dice che f è una biiezione dall'ordinale α su z, e ω è l'ordinale dei numeri naturali. Ora affinché la formula $\psi(z)$ non sia vera in un modello numerabile

---

[8] Si noti che il modello puo' essere il piu' stravagante possibile pur di rendere veri gli enunciati di T; magari puo' essere quello costruito a partire dalle classi di equivalenza dei termini, e quindi la relazione che interpreta $\in$ in questa struttura puo' essere ben lontana dal significato che usiamo dare alla parola appartenenza: certamente, se l'enunciato $t_1\in t_2$ sta in T, non e' vero che la classe di equivalenza del termine t_1 sia un elemento della classe di equivalenza del termine t_2.

[9] La formula $\chi(f,\alpha,z)$ si puo' scrivere nel linguaggio degli insiemi cosi':
$Fun(f,\alpha,z)\wedge Ord(\alpha)\wedge\forall x(x\in\alpha\rightarrow\exists!y\langle x,y\rangle\in f)\wedge\forall y(y\in z\rightarrow\exists x\langle x,y\rangle\in f)$, dove $Fun(x,y,z)$ e' la formula $\forall u(u\in x\rightarrow\exists v\exists w(v\in y\wedge w\in z\wedge u=\langle v,w\rangle))\wedge\forall v\forall w\forall w'((\langle v.w\rangle\in x\wedge\langle v,w'\rangle\in x)\rightarrow w=w')$ e $Ord(\alpha)$ e' la formula $\forall x\forall y((x\in\alpha\wedge y\in\alpha)\rightarrow(x=y\vee x\in y\vee y\in x))\wedge\forall x(x\in\alpha\rightarrow\alpha\neg x)$ (si noti che stiamo pensando ad una teo-

di T, diciamo $\mathfrak{A}$=(A,E), quando z viene valutata nell'elemento d, bisogna che in A non ci sia alcuna biiezione f_o da un ordinale minore od uguale all'ordinale dei naturali in A su d. Cioè, affinché d sia numerabile, dal di dentro c'è l'ulteriore limitazione che la biiezione f_o sia elemento di A. Così è possibile che ci siano biiezioni dall'ordinale dei naturali in d (e ciò fa si che d sia numerabile dal di fuori), ma tali biiezioni non saranno in A (per cui d sarà non numerabile dal di dentro).

Ci siamo così resi conto che non è equivalente il guardare una affermazione dal di dentro e dal di fuori.

30.1. FORMALIZZAZIONE DEL PARADOSSO DI SKOLEM.

In quanto fatto permane un po' di imprecisione, poiché dal di fuori, come metalinguaggio, stiamo usando l'italiano, una lingua viva, e, pertanto, relativamente imprecisa.

Ma si può migliorare la situazione formalizzando il metalinguaggio. Nel metalinguaggio parlavamo di linguaggio oggetto, di formule, di strutture, di soddisfacibilità, eccetera: si deve cercare di parlare di ciò anche all'interno del metalinguaggio formalizzato. Se si vuole usare il linguaggio della teoria degli insiemi come metalinguaggio formalizzato, i simboli del linguaggio oggetto, i termini, eccetera dovranno essere opportuni insiemi.

Si può chiamare codifica questa associazione di opportuni insiemi agli elementi della sintassi, associazione fatta in modo che dal particolare elemento della sintassi si possa passare <u>in modo effettivo ed univoco</u> al suo codice, e, viceversa, dal codice si possa passare <u>in modo effettivo ed univoco</u> all'elemento della sintassi codificato. Per fare ciò ci vuole una teoria sufficientemente ricca. Nella teoria degli insiemi, la si chiami temporaneamente T, si codificano facilmente non solo le nozioni sintattiche, ma anche le nozioni di struttura del tipo $(A, \varepsilon\cap A\times A)$, di attribuzione di valori alle variabili, e di verità di una formula in una tale struttura con una certa attribuzione di valori alle variabili che occorrono libere nella formula.

Si useranno le seguenti notazioni. $\ulcorner\varphi\urcorner$ indicherà quell'insieme che è la codifica della formula φ; $\ulcorner(A, \varepsilon\cap A\times A)\urcorner$ indicherà quell'insieme che è la codifica della struttura $(A, \varepsilon\cap A\times A)$; $\ulcorner[a_1,...a_n]\urcorner$ indicherà quell'insieme che è la codifica di una attribuzione di valori alle variabili costante dall' n-esima variabile in poi; ed infine $\ulcorner|=\urcorner$ indicherà quell'insieme che è una relazione ternaria tra i codici di una struttura, quelli di una formula e quelli di una attribuzione di valori alle variabili costante da un certo punto in poi, che codifica la relazione metalinguistica |=, cioè che vale quando nella struttura con quel codice è vera la formula con quel codice quando si usa l'attribuzione di valori alle variabili con quel codice, detto altrimenti, $(x,y,z) \in \ulcorner|=\urcorner$ se 1) x è del tipo $\ulcorner(A, \varepsilon\cap A\times A)\urcorner$ e 2) y è del tipo $\ulcorner\varphi\urcorner$ e 3) z è del tipo $\ulcorner[a_1,...a_n]\urcorner$ e 4) $(A,\varepsilon\cap A\times A)|= \varphi[a_1,...a_n]$.

Si indicherà la relazione $(x,y,z) \in \ulcorner|=\urcorner$ con la scrittura $x\ulcorner|=\urcorner yz$, sicché si scriverà $\ulcorner(A, \varepsilon\cap A\times A)\urcorner\ulcorner|=\urcorner\ulcorner\varphi\urcorner\ulcorner[a_1,...a_n]\urcorner$, per codificare $(A,\varepsilon\cap A\times A)|= \varphi[a_1,...a_n]$.

Affermare che è stato possibile utilizzare la teoria degli insiemi come metateoria per esprimere le caratteristiche sintattiche e semantiche del linguaggio oggetto che si stava studiando, equivale a dire che:
$T|=\ulcorner(A, \varepsilon\cap A\times A)\urcorner\ulcorner|=\urcorner\ulcorner\varphi\urcorner\ulcorner[a_1,...a_n]\urcorner$ se e solo se $(A,\varepsilon\cap A\times A) |= \varphi[a_1,..., a_n]$, il che effettivamente si può dimostrare proprio perché si è riusciti a trovare una buona codifica. Se poi φ è un enunciato allora l'equivalenza precedente diviene: $T |= \ulcorner(A, \varepsilon\cap A\times A)\urcorner\ulcorner|=\urcorner\ulcorner\varphi\urcorner$ se e solo se $(A,\varepsilon\cap A\times A)|=\varphi$.

Si era detto che $(A,\varepsilon\cap A\times A)|=\varphi$ afferma dal di dentro (cioè usando un enunciato del linguaggio oggetto) che la struttura $(A,\varepsilon\cap A\times A)$ debba avere le caratteristiche indicate dall'enunciato. Così anche l'affermazione $T |= \ulcorner(A, \varepsilon\cap A\times A)\urcorner\ulcorner|=\urcorner\ulcorner\varphi\urcorner$ esprime dal di dentro della metateoria formalizzaata quanto φ vuol dire della struttura, ma in effetti è un dire dal di fuori della teoria oggetto per mezzo della codifica ciò che succede dal di dentro.

Un altro modo di dire dal di fuori ciò che succede dal di dentro, e viceversa, si ottiene ricorrendo alla relativizzazione φ^A di un enunciato φ ad un insieme A[10] che permette di

[10] La **relativizzazione** di un enunciato φ ad un insieme A, che si indica con φ^A, e' l'enunciato che si ottiene da φ sostituendo al posto di ogni sottoformula che inizia con una quantificazione esistenziale, cioe' del tipo $\exists x\zeta$, la sottoformula $\exists x(x\in A\wedge\zeta)$ e al posto di ogni sottoformula che inizia con una

parlare della verità dell'enunciato φ nella "struttura" ristretta[11] all'insieme A. Infatti dalla definizione di relativizzazione segue che $(A,\varepsilon\cap A\times A)\models\varphi$ se e solo se $T \models \varphi^A$ [12].

D'altra parte, dire che φ afferma un qualcosa dal di fuori della struttura $(A,\varepsilon\cap A\times A)$, visto nella metateoria formalizzata in T, è dire che φ è teorema di T, $T \models \varphi$.

Così, dire che φ ha lo stesso significato dal di dentro e dal di fuori della struttura $(A,\varepsilon\cap A\times A)$ vuol dire che $T \models \varphi^A$ se e solo se $T \models \varphi$.

Questa equivalenza non vale per ogni enunciato. Vale per particolari enunciati[13], che verranno detti assoluti. Un enunciato φ viene detto assoluto, relativamente ad una teoria degli insiemi T, se $T \models \varphi^A$ se e solo se $T \models \varphi$ dove A è un qualsiasi insieme di insiemi tale che le restizione ad esso della struttura generalizzata degli insiemi è ancora in qualche modo simile ad un modello della teoria degli insiemi. Più precisamente, un enunciato φ è detto assoluto se esistono enunciati $\zeta_1,...,\zeta_m$, detti catena di assolutezza di φ, tali che $T \models \varphi^A\leftrightarrow\varphi$ se A non è vuoto e A è un insieme transitivo[14] e $(A,\varepsilon\cap A\times A)$ è modello di $\zeta_1,...,\zeta_m$ (queste condizioni su A sono il modo preciso di dire che la restrizione ad A della struttura generalizzata degli insiemi è sufficientemente simile a questa, cioè è sufficientemente simile ad un modello di T).

Con la terminologia appena introdotta, possiamo dire che, affinché il paradosso di Skolem abbia soluzione, l'enunciato $\exists z\psi(z)$ che descrive la più che numerabilità di un insieme non deve essere assoluto.

31. L'ESIGENZA DI RENDERE PRATICO IL METODO DEGLI ALBERI DI CONFUTAZIONE.

Si consideri il seguente insieme dei tre enunciati:

$$\forall v_0\neg Pv_0v_0;\ \ \forall v_0\forall v_1\forall v_2\neg\wedge\wedge Pv_0v_1Pv_1v_2\neg Pv_0v_2;\ \ \neg\forall v_0\forall v_1\neg\wedge Pv_0v_1Pv_1v_0.$$

I primi due caratterizzano le strutture d'ordine stretto, mentre il terzo afferma l'esistenza di un ciclo di due elementi, cosa impossibile in un ordine stretto. Sicché l'insieme di enunciati dato è non soddisfacibile. Questo risultato è ottenuto grazie a delle conoscenze che abbiamo nel caso specifico, ma non si è certo cercato di verificare che in ogni realizzazione almeno una delle tre formule è falsa. Avendo sviluppato il controllo sintattico conclusosi con la dimostrazione della validità e completezza del metodo degli alberi di confutazione, si potrebbe applicare questo metodo per una riprova che l'insieme dato è non soddisfacibile: si dovrebbe trovare un n tale che è chiuso l'n-esimo albero, T_n, della successione di alberi ottenuti a partire dall'insieme delle tre formule applicando alternativamente le regole 1 e 2.

Il processo di costruzione di questi alberi si avvia così.

T_0 è costituito dalla sola radice che è l'insieme dato di enunciati, ed è aperto.

T_1 oltre la radice avrà un solo altro nodo ottenuto dalla radice applicandole la regola $R_{1,0}$. Più precisamente il nuovo nodo, oltre gli enunciati della radice conterrà le seguenti formule:

---

[11] Per le strutture senza funzioni, si dice **restrizione** di una struttura $\mathfrak{A}$ ad un sottinsieme non vuoto B dell'universo A di $\mathfrak{A}$, e la si indica con $\mathfrak{A}|_B$, la sottostruttura di $\mathfrak{A}$ il cui universo e' B e le cui relazioni si ottengono dalle relazioni (diciamo n-arie) R di $\mathfrak{A}$ intersecandole con B^n. (Se ci fossero le funzioni B dovrebbe essere chiuso rispetto ad esse). Si noti che $(A, \varepsilon\cap A\times A)$ e' la restrizione ad A dell'usuale struttura generalizzata degli insiemi. Si noti anche che le restrizioni ad insiemi di strutture generalizzate sono strutture.

[12] Il rapporto che intercorre tra la verita' di un enunciato nella restrizione di una certa struttura e la verita' di un enunciato ad esso collegato nella struttura e' la seguente: $\mathfrak{A}|_B \models \varphi$ se e solo se $\mathfrak{A} \models \varphi^A$ (la dimostrazione di questo risultato e' per induzione sulla costruzione della formula). Si noti che abbiamo usato la consequenzialità logica da T per evitare di dare un nome alla struttura generalizzata intesa degli insiemi che non e' una struttura: il ricorso alla teoria non altera quanto vogliamo dire, grazie al fatto che T e' una teoria completa (cioe' per ogni enunciato, o lui o la sua negazione appartiene alla teoria).

[13] Ad esempio quello, gia' visto, che afferma che l'universo di una struttura ha almeno due elementi.

[14] Un insieme si dice **transitivo** se ogni suo elemento e' anche suo sottinsieme; detto altrimenti, se

$$\neg Pv_0v_0,\ \neg Pv_1v_1,\ \neg Pv_2v_2,\ \forall v_1\forall v_2\neg\wedge\wedge Pv_0v_1Pv_1v_2\neg Pv_0v_2,\ \forall v_3\forall v_2\neg\wedge\wedge Pv_1v_3Pv_3v_2\neg Pv_1v_2,$$
$$\forall v_1\forall v_3\neg\wedge\wedge Pv_2v_1Pv_1v_3\neg Pv_2v_3,\ \neg\forall v_1\neg\wedge Pc_1v_1Pv_1c_1\ ,\ =v_0v_0,$$
dove la variabile v_3 è stata introdotta per evitare il fenomeno della cattura di variabili) e con c_1 si è indicato, per brevità, il nuovo simbolo di costante $c_{\neg\forall v_0\forall v_1\neg\wedge Pv_0v_1Pv_1v_0}$ introdotto nell'analizzare l'unica formula di tipo $\neg\forall$. L'unica foglia di T_1 contiene 11 formule ed è aperta.

Non essendoci alcuna formula del tipo $\neg\wedge$ nella foglia di T_1, l'insieme delle funzioni che scelgono o l'una alternativa o l'altra nelle formule di detto tipo è costituito solo dalla funzione vuota, sicché applicando R_2 a T_1 si ottiene l'albero T_2 che estende T_1 con un solo nuovo nodo dopo la foglia di T_1 che è uguale a quella foglia. L'unica foglia di T_2 è aperta.

T_3 si otterrà da T_2 estendendolo con un nuovo nodo dopo la sua unica foglia ottenuto applicando alla sua foglia la regola $R_{1,1}$. Questo nodo, oltre alle 11 formule già esplicitate, conterrà anche le seguenti formule:

$$\neg Pc_1c_1;\ \neg Pv_3v_3;\ \forall v_1\forall v_2\neg\wedge\wedge Pv_3v_1Pv_1v_2\neg Pv_3v_2;\ \forall v_1\forall v_2\neg\wedge\wedge Pc_1v_1Pv_1v_2\neg Pc_1v_2;$$
$$\forall v_2\neg\wedge\wedge Pv_0v_0Pv_0v_2\neg Pv_0v_2;\ \forall v_2\neg\wedge\wedge Pv_0v_1Pv_1v_2\neg Pv_0v_2;\ \forall v_3\neg\wedge\wedge Pv_0v_2Pv_2v_3\neg Pv_0v_3;$$
$$\forall v_2\neg\wedge\wedge Pv_0v_3Pv_3v_2\neg Pv_0v_2;\ \forall v_2\neg\wedge\wedge Pv_0c_1Pc_1v_2\neg Pv_0v_2;\ \forall v_2\neg\wedge\wedge Pv_1v_0Pv_0v_2\neg Pv_1v_2;$$
$$\forall v_2\neg\wedge\wedge Pv_1v_1Pv_1v_2\neg Pv_1v_2;\ \forall v_3\neg\wedge\wedge Pv_1v_2Pv_2v_3\neg Pv_1v_3;\ \forall v_2\neg\wedge\wedge Pv_1v_3Pv_3v_2\neg Pv_1v_2;$$
$$\forall v_2\neg\wedge\wedge Pv_1c_1Pc_1v_2\neg Pv_1v_2;\ \forall v_3\neg\wedge\wedge Pv_2v_0Pv_0v_3\neg Pv_2v_3;\ \forall v_3\neg\wedge\wedge Pv_2v_1Pv_1v_3\neg Pv_2v_3;$$
$$\forall v_3\neg\wedge\wedge Pv_2v_2Pv_2v_3\neg Pv_2v_3;\ \forall v_1\neg\wedge\wedge Pv_2v_3Pv_3v_1\neg Pv_2v_1;\ \forall v_3\neg\wedge\wedge Pv_2c_1Pc_1v_3\neg Pv_2v_3;$$
$$\neg\neg\wedge Pc_1c_2Pc_2c_1;\ =c_1c_1;\ =v_1v_1;$$

dove con c_2 si è indicato, per brevità, il nuovo simbolo di costante $c_{\neg\forall v\neg\wedge Pc_1v_1Pv_1c_1}$ introdotto nell'analizzare la formula $\neg\forall v_1\neg\wedge Pc_1v_1Pv_1c_1$. Si osservi che l'analisi della formula $\neg\forall v_0\forall v_1\neg\wedge Pv_0v_1Pv_1v_0$ era già presente e non è stata ripetuta. L'unica foglia di T_3 contiene 33 formule ed è aperta.

Ancora, non essendoci alcuna formula del tipo $\neg\wedge$ nella foglia di T_3, l'insieme delle funzioni che scelgono o l'una alternativa o l'altra nelle formule di detto tipo è costituito solo dalla funzione vuota, sicché applicando R_2 a T_3 si ottiene l'albero T_4 che estende T_3 con un nuovo nodo dopo la foglia di T_3 che è uguale a quella foglia. L'unica foglia di T_4 è aperta.

T_5 si otterrà da T_4 estendendolo con un nuovo nodo dopo la sua unica foglia ottenuto applicando alla sua foglia la regola $R_{1,2}$. Questo nodo, oltre alle formule già esplicitate, conterrà anche le seguenti formule:

$$\wedge Pc_1c_2Pc_2c_1;\ \neg Pc_2c_2;\ \forall v_1\forall v_2\neg\wedge\wedge Pc_2v_1Pv_1v_2\neg Pc_2v_2;\ \forall v_2\neg\wedge\wedge Pv_0c_2Pc_2v_2\neg Pv_0v_2;$$
$$\forall v_2\neg\wedge\wedge Pv_1c_2Pc_2v_2\neg Pv_1v_2;\ \forall v_3\neg\wedge\wedge Pv_2c_2Pc_2v_3\neg Pv_2v_3;$$
$$\forall v_2\neg\wedge\wedge Pv_3v_0Pv_0v_2\neg Pv_3v_2;\ \forall v_2\neg\wedge\wedge Pv_3v_1Pv_1v_2\neg Pv_3v_2;\ \forall v_1\neg\wedge\wedge Pv_3v_2Pv_2v_1\neg Pv_3v_1;$$
$$\forall v_2\neg\wedge\wedge Pv_3v_3Pv_3v_2\neg Pv_3v_2;\ \forall v_2\neg\wedge\wedge Pv_3c_1Pc_1v_2\neg Pv_3v_2;\ \forall v_2\neg\wedge\wedge Pv_3c_2Pc_2v_2\neg Pv_3v_2;$$
$$\forall v_2\neg\wedge\wedge Pc_1v_0Pv_0v_2\neg Pc_1v_2;\ \forall v_2\neg\wedge\wedge Pc_1v_1Pv_1v_2\neg Pc_1v_2;\ \forall v_3\neg\wedge\wedge Pc_1v_2Pv_2v_3\neg Pc_1v_3;$$
$$\forall v_2\neg\wedge\wedge Pc_1v_3Pv_3v_2\neg Pc_1v_2;\ \forall v_2\neg\wedge\wedge Pc_1c_1Pc_1v_2\neg Pc_1v_2;\ \forall v_2\neg\wedge\wedge Pc_1c_2Pc_2v_2\neg Pc_1v_2;$$
$$*\ \neg\wedge\wedge Pv_0v_0Pv_0v_0\neg Pv_0v_0{}^\circ;\ \neg\wedge\wedge Pv_0v_0Pv_0v_1\neg Pv_0v_1;\ \neg\wedge\wedge Pv_0v_0Pv_0v_2\neg Pv_0v_2;$$
$$\neg\wedge\wedge Pv_0v_0Pv_0v_3\neg Pv_0v_3;\ \neg\wedge\wedge Pv_0v_0Pv_0c_1\neg Pv_0c_1;\ \neg\wedge\wedge Pv_0v_0Pv_0c_2\neg Pv_0c_2;$$
$$\neg\wedge\wedge Pv_0v_1Pv_1v_0\neg Pv_0v_0{}^\circ;\ \neg\wedge\wedge Pv_0v_1Pv_1v_1\neg Pv_0v_1;\ \neg\wedge\wedge Pv_0v_1Pv_1v_2\neg Pv_0v_2;$$
$$\neg\wedge\wedge Pv_0v_1Pv_1v_3\neg Pv_0v_3;\ \neg\wedge\wedge Pv_0v_1Pv_1c_1\neg Pv_0c_1;\ \neg\wedge\wedge Pv_0v_1Pv_1c_2\neg Pv_0c_2;$$
$$\neg\wedge\wedge Pv_0v_2Pv_2v_0\neg Pv_0v_0{}^\circ;\ \neg\wedge\wedge Pv_0v_2Pv_2v_1\neg Pv_0v_1;\ \neg\wedge\wedge Pv_0v_2Pv_2v_2\neg Pv_0v_2;$$
$$\neg\wedge\wedge Pv_0v_2Pv_2v_3\neg Pv_0v_3;\ \neg\wedge\wedge Pv_0v_2Pv_2c_1\neg Pv_0c_1;\ \neg\wedge\wedge Pv_0v_2Pv_2c_2\neg Pv_0c_2;$$
$$\neg\wedge\wedge Pv_0v_3Pv_3v_0\neg Pv_0v_0{}^\circ;\ \neg\wedge\wedge Pv_0v_3Pv_3v_1\neg Pv_0v_1;\ \neg\wedge\wedge Pv_0v_3Pv_3v_2\neg Pv_0v_2;$$
$$\neg\wedge\wedge Pv_0v_3Pv_3v_3\neg Pv_0v_3;\ \neg\wedge\wedge Pv_0v_3Pv_3c_1\neg Pv_0c_1;\ \neg\wedge\wedge Pv_0v_3Pv_3c_2\neg Pv_0c_2;$$
$$\neg\wedge\wedge Pv_0c_1Pc_1v_0\neg Pv_0v_0{}^\circ;\ \neg\wedge\wedge Pv_0c_1Pc_1v_1\neg Pv_0v_1;\ \neg\wedge\wedge Pv_0c_1Pc_1v_2\neg Pv_0v_2;$$
$$\neg\wedge\wedge Pv_0c_1Pc_1v_3\neg Pv_0v_3;\ \neg\wedge\wedge Pv_0c_1Pc_1c_1\neg Pv_0c_1;\ \neg\wedge\wedge Pv_0c_1Pc_1c_2\neg Pv_0c_2;$$
$$**\ \neg\wedge\wedge Pv_1v_0Pv_0v_0\neg Pv_1v_0;\ \neg\wedge\wedge Pv_1v_0Pv_0v_1\neg Pv_1v_1{}^\circ;\ \neg\wedge\wedge Pv_1v_0Pv_0v_2\neg Pv_1v_2;$$
$$\neg\wedge\wedge Pv_1v_0Pv_0v_3\neg Pv_1v_3;\ \neg\wedge\wedge Pv_1v_0Pv_0c_1\neg Pv_1c_1;\ \neg\wedge\wedge Pv_1v_0Pv_0c_2\neg Pv_1c_2;$$
$$\neg\wedge\wedge Pv_1v_1Pv_1v_0\neg Pv_1v_0;\ \neg\wedge\wedge Pv_1v_1Pv_1v_1\neg Pv_1v_1{}^\circ;\ \neg\wedge\wedge Pv_1v_1Pv_1v_2\neg Pv_1v_2;$$
$$\neg\wedge\wedge Pv_1v_1Pv_1v_3\neg Pv_1v_3;\ \neg\wedge\wedge Pv_1v_1Pv_1c_1\neg Pv_1c_1;\ \neg\wedge\wedge Pv_1v_1Pv_1c_2\neg Pv_1c_2;$$
$$\neg\wedge\wedge Pv_1v_2Pv_2v_0\neg Pv_1v_0;\ \neg\wedge\wedge Pv_1v_2Pv_2v_1\neg Pv_1v_1{}^\circ;\ \neg\wedge\wedge Pv_1v_2Pv_2v_2\neg Pv_1v_2;$$
$$\neg\wedge\wedge Pv_1v_2Pv_2v_3\neg Pv_1v_3;\ \neg\wedge\wedge Pv_1v_2Pv_2c_1\neg Pv_1c_1;\ \neg\wedge\wedge Pv_1v_2Pv_2c_2\neg Pv_1c_2;$$
$$\neg\wedge\wedge Pv_1v_3Pv_3v_0\neg Pv_1v_0;\ \neg\wedge\wedge Pv_1v_3Pv_3v_1\neg Pv_1v_1{}^\circ;\ \neg\wedge\wedge Pv_1v_3Pv_3v_2\neg Pv_1v_2;$$
$$\neg\wedge\wedge Pv_1v_3Pv_3v_3\neg Pv_1v_3;\ \neg\wedge\wedge Pv_1v_3Pv_3c_1\neg Pv_1c_1;\ \neg\wedge\wedge Pv_1v_3Pv_3c_2\neg Pv_1c_2;$$

$\neg\wedge\wedge Pv_1c_1Pc_1v_0\neg Pv_1v_0$; $\neg\wedge\wedge Pv_1c_1Pc_1v_1\neg Pv_1v_1{}^\circ$; $\neg\wedge\wedge Pv_1c_1Pc_1v_2\neg Pv_1v_2$;
$\neg\wedge\wedge Pv_1c_1Pc_1v_3\neg Pv_1v_3$; $\neg\wedge\wedge Pv_1c_1Pc_1c_1\neg Pv_1c_1$; $\neg\wedge\wedge Pv_1c_1Pc_1c_2\neg Pv_1c_2$;
*** $\neg\wedge\wedge Pv_2v_0Pv_0v_0\neg Pv_2v_0$; $\neg\wedge\wedge Pv_2v_0Pv_0v_1\neg Pv_2v_1$; $\neg\wedge\wedge Pv_2v_0Pv_0v_2\neg Pv_2v_2{}^\circ$;
$\neg\wedge\wedge Pv_2v_0Pv_0v_3\neg Pv_2v_3$; $\neg\wedge\wedge Pv_2v_0Pv_0c_1\neg Pv_2c_1$; $\neg\wedge\wedge Pv_2v_0Pv_0c_2\neg Pv_2c_2$;
$\neg\wedge\wedge Pv_2v_1Pv_1v_0\neg Pv_2v_0$; $\neg\wedge\wedge Pv_2v_1Pv_1v_1\neg Pv_2v_1$; $\neg\wedge\wedge Pv_2v_1Pv_1v_2\neg Pv_2v_2{}^\circ$;
$\neg\wedge\wedge Pv_2v_1Pv_1v_3\neg Pv_2v_3$; $\neg\wedge\wedge Pv_2v_1Pv_1c_1\neg Pv_2c_1$; $\neg\wedge\wedge Pv_2v_1Pv_1c_2\neg Pv_2c_2$;
$\neg\wedge\wedge Pv_2v_2Pv_2v_0\neg Pv_2v_0$; $\neg\wedge\wedge Pv_2v_2Pv_2v_1\neg Pv_2v_1$; $\neg\wedge\wedge Pv_2v_2Pv_2v_2\neg Pv_2v_2{}^\circ$;
$\neg\wedge\wedge Pv_2v_2Pv_2v_3\neg Pv_2v_3$; $\neg\wedge\wedge Pv_2v_2Pv_2c_1\neg Pv_2c_1$; $\neg\wedge\wedge Pv_2v_2Pv_2c_2\neg Pv_2c_2$;
$\neg\wedge\wedge Pv_2v_3Pv_3v_0\neg Pv_2v_0$; $\neg\wedge\wedge Pv_2v_3Pv_3v_1\neg Pv_2v_1$; $\neg\wedge\wedge Pv_2v_3Pv_3v_2\neg Pv_2v_2{}^\circ$;
$\neg\wedge\wedge Pv_2v_3Pv_3v_3\neg Pv_2v_3$; $\neg\wedge\wedge Pv_2v_3Pv_3c_1\neg Pv_2c_1$; $\neg\wedge\wedge Pv_2v_3Pv_3c_2\neg Pv_2c_2$;
$\neg\wedge\wedge Pv_2c_1Pc_1v_0\neg Pv_2v_0$; $\neg\wedge\wedge Pv_2c_1Pc_1v_1\neg Pv_2v_1$; $\neg\wedge\wedge Pv_2c_1Pc_1v_2\neg Pv_2v_2{}^\circ$;
$\neg\wedge\wedge Pv_2c_1Pc_1v_3\neg Pv_2v_3$; $\neg\wedge\wedge Pv_2c_1Pc_1c_1\neg Pv_2c_1$; $\neg\wedge\wedge Pv_2c_1Pc_1c_2\neg Pv_2c_2$;
$=c_2c_2$; $=v_2v_2$;

Si osservi che le formule $\neg\forall v_0\forall v_1\neg\wedge Pv_0v_1Pv_1v_0$ e $\neg\forall v_1\neg\wedge Pc_1v_1Pv_1c_1$ sono già state analizzate precedentemente. I segni * e l'andare a capo separano gruppi di formule per riconoscere più facilmente da quali altre formule del nodo precedente siano state ottenute. L'unica foglia di T_5 contiene 143 formule ed è aperta.

Nell'unica foglia di T_5 ci sono 90 formule del tipo $\neg\wedge$, sicché l'insieme delle funzioni che scelgono o l'una alternativa o l'altra nelle formule di detto tipo è costituito 2^{90} funzioni, cioè oltre un miliardo di miliardi di miliardi, e tanti sono i nodi (ciascuno con 223=133+90 formule) da aggiungere dopo la foglia di T_5 per ottenere T_6 applicando la regola R_2. Se anche si riuscisse a miniaturizzare la scrittura in modo da scrivere in un millimetro tutte le formule di ciascuna delle foglie di T_6, accostando una foglia all'altra si coprirebbe una distanza di oltre cento milioni di anni luce. E' vero che scegliendo la seconda alternativa in una delle 15 formule seguite dal sagno ° si ottengono nodi chiusi e la probabilità (in senso classico) di ottenere un nodo aperto è $1/2^{15}$, ma, scegliendo in tutte queste 15 formule la prima alternativa, rimangono 2^{75} nodi aperti.

E' ovvio che non è praticamente possibile continuare l'esercizio pur sapendo che tra non molto si dovrebbe arrivare ad un albero chiuso e così arrivare alla fine di questo esempio (In effettti in ciascun nodo a livello 7 dell'albero T_7, sarà presente la formula $\neg\wedge\wedge Pc_1c_2Pc_2c_1\neg Pc_1c_1$, e metà dei nodi a livello 8 dell'albero T_8 saranno chiusi per la presenza della seconda alternativa della formula appena vista, mentre gli altri si chiuderanno a livello 9 nell'albero T_9 dell'una o dell'altra sottoalternativa della prima alternativa della formula riportata).

Pur avendo ottenuto i risultati desiderati di validità, completezza e semidecidibilità per il metodi degli alberi di confutazione, tale metodo non è molto agevole per vari motivi, come mostra l'esempio sopra svolto.

Un primo motivo è legato al fatto che si sono voluti ottenere i risultati a partire da insiemi di formule di cardinalità arbitrariamente grande in linguaggi di adeguata cardinalità. Di fatto, se si parte da un insieme infinito più che numerabile di formule (e il linguaggio per esprimerle è un linguaggio più che numerabile), non si sa neppure come elencare le formule dell'insieme, tanto meno analizzarle in pratica. Il punto di vista teorico, sinora adottato, ha permesso di mostrare risultati di carattere generale altrimenti irraggiungibili: per ottenere il teorema di Lowenheim Skolem si sono usati linguaggi della cardinalità voluta dal risultato da ottenere. Ma, una volta che si è visto che i risultati di non categoricità valgono per linguaggi di ogni cardinalità, non è più sostenibile un ricorso a linguaggi enormemente ricchi nella speranza di ottenere una maggiore espressività del linguaggio, e diventa del tutto naturale limitarsi a linguaggi numerabili. Se le formule sono in un linguaggio numerabile, possono essere messe in biiettività con i numeri naturali e pertanto invece di utilizzare regole che aggiungono tante formule ad ogni singola applicazione, si potrebbe passare a regole che aggiungono una sola formula per ogni singola applicazione della regola, perché, adottando una opportuna strategia, se non si arriva ad un albero della successione in costruzione già chiuso, ogni formula rilevante prima o poi verrà analizzata anche con questo metodo.

Un secondo motivo può essere il seguente di carattere estremamente pratico. Per come sono state enunciate le regole 1 e 2 ogni nodo contiene i nodi che lo precedono, impeno una formula e la sua negazione. Se si andasse a controllare se in un ramo ci sono una formula e la sua negazione (e non solo nella foglia) potremmo evitare di riscrivere in nodi successivi formule che già sono in qualche nodo precedente: ciò diminuirebbe notevolmente il peso della scrittura nei nodi degli alberi della successione (ciò è già stato fatto nell'esempio studiato).

Inoltre l'analisi di formule di certi tipi ($\neg\neg,\wedge,\neg\forall$) non porta solo a condizioni necessarie, ma a condizioni necessarie e sufficienti per la soddisfacibilità di un insieme di formule. Ad esempio, se ad un insieme di formule X appartiene una formula del tipo $\neg\forall v_0 \neg\varphi(v_0)$, allora non solo $X\cup\{\neg\varphi(v_0/c)\}$, con c nuovo simbolo di costante, è soddisfacibile, ma anche dalla soddisfacibilità di $X\cup\{\neg\varphi(v_0/c)\}$ segue quella di X.

Ancora si sa che le varianti di una formula sono vere esattamente nelle stesse realizzazioni in cui è vera quella formula: pertanto si può decidere di tenere nei nodi degli alberi in costruzione una sola delle varianti di una formula e non le altre.

Un'osservazione, infine, sull'analisi delle formule del tipo $\forall v_0\varphi$. In questo caso l'aggiunta della formula $\varphi(v_0/t)$, dove t è un termine, ad un insieme di formule X, che contiene la formula $\forall v_0\varphi$, preserva la soddisfacibiltà dell'insieme di formule (se X è soddisfacibile lo è anche $X\cup\{\varphi(c/t)\}$), ma la soddisfacibilità di X non equivale a quella di $(X-\{\forall v_0\varphi\})\cup\{\varphi(v_0/t)\}$. Ciò si può leggere affermando che la formula $\varphi(v_0/t)$ non è così ricca di richieste come la formula $\forall v_0\varphi$. Di fatto $\varphi(v_0/t)$ potrebbe essere vera in una realizzazione che rende vere le formule di $X-\{\forall v_0\varphi\}$, mentre nella stessa realizzazione $\forall v_0\varphi$ potrebbe esser falsa. Quanto richiede $\forall v_0\varphi$ è superiore o uguale a ciò che richiede l'intero insieme di formula $Y=\{\varphi(v_0/t)$: t termine$\}$. Nell'ottica di sviluppare l'analisi aggiungendo una formula alla volta durante l'analisi, il modo per aggiungere tutte le formule di Y è di analizzare ripetutamente la formula $\forall v_0\varphi$ ed aggiungere, ad ogni ripetizione, una delle formule dell'insieme Y: così facendo saranno considerate tutte le formule dell'insieme Y perché si è supposto che il linguaggio in cui sono scritte queste formule sia numerabile e tale linguaggio ha un numero numerabile di termini. Però, se, nel voler controllare la soddisfacibilità o meno di un insieme di formule, ci si intestardisce a voler analizzare fino in fondo una formula del tipo $\forall v_0\varphi$, si rischia di rimanere per sempre ad analizzare quella formula senza analizzarne altre che magari porterebbero velocemente alla soluzione del problema. Se, ad esempio, fosse dato l'insieme, chiaramente non soddisfacibile, di enunciati $\forall v_0 Pv_0$ e $\forall v_1\neg Pv_1$, dove P è un predicato unario, e ci si intestardisse ad analizzare sempre l'enunciato $\forall v_0 Pv_0$ ottenendo successivamente le formule Pv_0, Pv_1, Pv_2, ..., Pv_m, ... si arriverebbe ad una successione di alberi tutti aperti; mentre se dopo aver analizzato una colta la prima formula si analizzasse $\forall v_1\neg Pv_1$ ottenendo $\neg Pv_0$, si perverrebbe dopo due passaggi ad un albero chiuso. La situazione è analoga a quella di una coda al supermercato: un cliente non può farsi servire ripetutamente per sempre mentre gli altri aspettano indefinitamente in coda; ognuno deve avere il suo turno, cioè ad ognuno deve essere assegnato un numero d'ordine che indica a che punto toccherà a lui essere servito, e quel numero deve arrivare, prima o poi; chi è già stato servito eventualmente si può rimettere in coda ma alla fine di questa.

Con in mente tutte le esigenze esposte, si cercherà di proporre delle nuove regole, che prevedano l'aggiunta di una formula alla volta, e una strategia (modo di organizzare l'uso delle regole) che ci permettano di controllare sintatticamente se un insieme dato di formule Γ è soddisfacibile o meno.

Prima, però, per mettere in luce come una scelta astuta e non meccanica dei passi dell'analisi porti velocemente al risultato, è utile riprendere l'esempio all'inizio di questo paragrafo per svilupparlo con un'analisi intelligente, un po' libera, ma comunque corretta.

A partire dall'insieme dato, che è formato dagli enunciati $\forall v_0\neg Pv_0v_0$; $\forall v_0\forall v_1\forall v_2\neg\wedge\wedge Pv_0v_1Pv_1v_2\neg Pv_0v_2$; $\neg\forall v_0\forall v_1\neg\wedge Pv_0v_1Pv_1v_0$, si costruisce una successione di alberi di cui il primo T_0 ha per unico nodo la radice costituita dal dato insieme di enunciati. Ora si analizzi l'ultimo enunciato ottenendo $\neg\forall v_1\neg\wedge Pc_1v_1Pv_1c_1$, e si costruisca T_1, a partire da T_0, con l'aggiunta dopo la radice di un solo nodo costituito dal solo enunciato $\neg\forall v_1\neg\wedge Pc_1v_1Pv_1c_1$. Poi si analizzi ancora l'ultimo enunciato aggiunto, ottenendo $\neg\neg\wedge Pc_1c_2Pc_2c_1$, e si costruisca T_2, a partire da T_1, con l'aggiunta dopo la foglia di T_1 di un solo nodo costituito dal solo enunciato $\neg\neg\wedge\wedge Pc_1c_2Pc_2c_1$. Si noti come si siano anzitutto analizzate le formula del tipo $\neg\forall$ considerandole una sola volta. Per ottenere T_3 si analizza ancora l'ultima formula aggiunta e si aggiunge un solo nuovo nodo dopo la foglia di T_2 costituito dall'enunciato $\wedge Pc_1c_2\ Pc_2c_1$. Analogamente l'albero T_4 si ottiene aggiungendo un nuovo nodo dopo la foglia di T_3 costituito dai due enunciati Pc_1c_2 e Pc_2c_1. Così si è completata questa prima parte, in cui si è posposta l'analisi delle formule del tipo $\forall$. L'albero T_4 può essere rappresentato come segue.

$$
\begin{array}{c}
\forall v_0\neg Pv_0v_0;\ \ \forall v_0\forall v_1\forall v_2\neg\wedge\wedge Pv_0v_1Pv_1v_2\neg Pv_0v_2;\ \ \neg\forall v_0\forall v_1\neg\wedge Pv_0v_1Pyv_1v_0 \\
| \\
\neg\forall v_1\neg\wedge Pc_1v_1Pv_1c_1 \\
| \\
\neg\neg\wedge Pc_1c_2Pc_2c_1 \\
| \\
\wedge Pc_1c_2\ Pc_2c_1 \\
| \\
Pc_1c_2\ ,\ Pc_2c_1
\end{array}
$$

Non essendoci nell'albero altri enunciati da analizzare per la prima volta se non quelli del tipo $\forall$, si passi finalmente ad analizzare uno di questi e precisamente $\forall v_0\forall v_1\forall v_2\neg\wedge\wedge Pv_0v_1Pv_1v_2\neg Pv_0v_2$. Si ottengono così successivamente T_7, T_8, T_9 eliminando via via i quantificatori dell'enunciato considerato e scegliendo di mettere al posto della variabile v_0 il termine c_1, della variabile v_1 il termine c_2, e della variabile v_2 ancora il termine c_1. L'albero T_7 può essere rappresentato come segue.

$$
\begin{array}{c}
\forall v_0\neg Pv_0v_0;\ \ \forall v_0\forall v_1\forall v_2\neg\wedge\wedge Pv_0v_1Pv_1v_2\neg Pv_0v_2;\ \ \neg\forall v_0\forall v_1\neg\wedge Pv_0v_1Pv_1v_0 \\
| \\
\neg\forall v_1\neg\wedge Pc_1v_1Pv_1c_1 \\
| \\
\neg\neg\wedge Pc_1c_2Pc_2c_1 \\
| \\
\wedge Pc_1c_2\ Pc_2c_1 \\
| \\
Pc_1c_2\ ,\ Pc_2c_1 \\
| \\
\forall v_1\forall v_2\neg\wedge\wedge Pc_1v_1Pv_1v_2\neg Pc_1v_2 \\
| \\
\forall v_2\neg\wedge\wedge Pc_1c_2Pc_2v_2\neg Pc_1v_2 \\
| \\
\neg\wedge\wedge Pc_1c_2Pc_2c_1\neg Pc_1c_1
\end{array}
$$

Ora si comincino ad analizzare le formule del tipo $\neg\wedge$ (e quella del tipo $\neg\neg$) che compaiono per la prima volta. Si otterranno così gli alberi T_8 e T_9, il secondo dei quali può essere rappresentato così:

$$
\begin{array}{c}
\forall v_0\neg Pv_0v_0;\ \ \forall v_0\forall v_1\forall v_2\neg\wedge\wedge Pv_0v_1Pv_1v_2\neg Pv_0v_2;\ \ \neg\forall v_0\forall v_1\neg\wedge Pv_0v_1Pv_1v_0 \\
| \\
\neg\forall v_1\neg\wedge Pc_1v_1Pv_1c_1 \\
| \\
\neg\neg\wedge Pc_1c_2Pc_2c_1 \\
| \\
\wedge Pc_1c_2\ Pc_2c_1 \\
| \\
Pc_1c_2\ ,\ Pc_2c_1 \\
| \\
\forall v_1\forall v_2\neg\wedge\wedge Pc_1v_1Pv_1v_2\neg Pc_1v_2 \\
| \\
\forall v_2\neg\wedge\wedge Pc_1c_2Pc_2v_2\neg Pc_1v_2 \\
|
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\multicolumn{3}{c}{\neg\wedge\wedge Pc_1c_2Pc_2c_1\neg Pc_1c_1} \\
\multicolumn{2}{c}{/} & \backslash \\
\multicolumn{2}{c}{\neg\wedge Pc_1c_2Pc_2c_1} & \neg\neg Pc_1c_1 \\
/ \quad & \backslash & | \\
\neg Pc_1c_2 & \neg Pc_2c_1 & Pc_1c_1 \\
== & == &
\end{array}
$$

Due rami sono chiusi poiché in essi compaiono una formula e la sua negazione, uno è ancora aperto.

Per arrivare a chiudere anche questo ramo si analizzi ora la formula $\forall v_0\neg Pv_0v_0$;, che non era mai stata utilizzata, scegliendo di mettere al posto della variabile v_0 il termine c_1. Finalmente si otterrà l'albero T_{10} che è chiuso e che si può rappresentare come segue

$$
\begin{array}{ccc}
\multicolumn{3}{c}{\forall v_0\neg Pv_0v_0;\ \ \forall v_0\forall v_1\forall v_2\neg\wedge\wedge Pv_0v_1Pv_1v_2\neg Pv_0v_2;\ \ \neg\forall x\forall v_1\neg\wedge Pv_0v_1Pv_1v_0} \\
\multicolumn{3}{c}{|} \\
\multicolumn{3}{c}{\neg\forall v_1\neg\wedge Pc_1v_1Pv_1c_1} \\
\multicolumn{3}{c}{|} \\
\multicolumn{3}{c}{\neg\neg\wedge Pc_1c_2Pc_2c_1} \\
\multicolumn{3}{c}{|} \\
\multicolumn{3}{c}{\wedge Pc_1c_2\ Pc_2c_1} \\
\multicolumn{3}{c}{|} \\
\multicolumn{3}{c}{Pc_1c_2\ ,\ Pc_2c_1} \\
\multicolumn{3}{c}{|} \\
\multicolumn{3}{c}{\forall v_1\forall v_2\neg\wedge\wedge Pc_1v_1Pv_1v_2\neg Pc_1v_2} \\
\multicolumn{3}{c}{|} \\
\multicolumn{3}{c}{\forall v_2\neg\wedge\wedge Pc_1c_2Pc_2v_2\neg Pc_1v_2} \\
\multicolumn{3}{c}{|} \\
\multicolumn{3}{c}{\neg\wedge\wedge Pc_1c_2Pc_2c_1\neg Pc_1c_1} \\
\multicolumn{2}{c}{/} & \backslash \\
\multicolumn{2}{c}{\neg\wedge Pc_1c_2Pc_2c_1} & \neg\neg Pc_1c_1 \\
/ \quad & \backslash & | \\
\neg Pc_1c_2 & \neg Pc_2c_1 & Pc_1c_1 \\
== & == & | \\
 & & \neg Pc_1c_1 \\
 & & ==
\end{array}
$$

Così al decimo albero si è riusciti ad ottenere un albero chiuso. Ma, anche se nel pasare da un albero al prossimo si sono applicati metodi di analisi delle formule che preservano la soddisfacibilità, non è assolutamente evidente un criterio in base al quale, di volta in volta, si è scelto di analizzare una formula piuttosto che un'altra, se non che, con la scelta fatta, si arriva velocemente al risultato. Ciò che può aver guidato le scelte è un riferimento al significato degli enunciati dati.

ESERCIZIO. In analogia a quanto appena fatto, ma a partire dall'insieme dei tre enunciati

$$\forall v_0\neg Pv_0v_0;\ \ \forall v_0\forall v_1\forall v_2\neg\wedge\wedge Pv_0v_1Pv_1v_2\neg Pv_0v_2;\ \ \neg\forall v_0\forall v_1\forall v_2\neg\wedge\wedge Pv_0v_1Pv_1v_2Pv_2v_0$$

si costruisca una successione finita di alberi ottenuti ciascuno dal precedente applicando un metodo di analisi ad una formula opportuna nell'albero precedente, in modo che l'ultimo albero della successione sia chiuso permettendo così di concludere sintatticamente che l'insieme dato di enunciati non è soddisfacibile.

32. REGOLE PER L'ANALISI DI UNA SOLA FORMULA ALLA VOLTA.

Volendo analizzare una sola formula alla volta, ora le regole dovranno essere molteplici in corrispondenza dei vari tipi di formule che si possono incontrare.

Ecco l'elenco delle regole che si adotteranno. Chiamiamo queste regole **regole di confutazione** perché, come vedremo, preservando la soddisfacibilità, portano a concludere la non soddisfacibilità di (cioè a confutare) un insieme di formule se si può giungere in un numero finito di passaggi ad un albero chiuso costruito con queste regole a partire da quell'insieme di formule.

R : *Regola del*

Se ad un insieme X di formule appartiene una formula del tipo $\neg\neg\varphi$, l'applicazione di questa regola all'insieme X relativamente alla formula $\neg\neg\varphi$ fa passare ad un nuovo insieme X' ottenuto da X aggiungendo la formula φ, cioè $X'=X\cup\{\varphi\}$.

$R_C\wedge$: *Regola del* $\wedge$.
Se ad un insieme X di formule appartiene una formula del tipo $\wedge\varphi\psi$, l'applicazione di questa regola all'insieme X relativamente alla formula $\wedge\varphi\psi$ fa passare ad un nuovo insieme X' ottenuto da X aggiungendo le formule φ e ψ, cioè $X'=X\cup\{\varphi,\psi\}$.

$R_C\neg\wedge$: *Regola del* $\neg\wedge$.
Se ad un insieme X di formule appartiene una formula del tipo $\neg\wedge\varphi\psi$, l'applicazione di questa regola all'insieme X relativamente alla formula $\neg\wedge\varphi\psi$ fa passare a due nuovi insiemi X' e X'' ottenuti da X aggiungendo in un caso la formula $\neg\varphi$ e nell'altro caso la formula $\neg\psi$, cioè $X'=X\cup\{\neg\varphi\}$ e $X''=X\cup\{\neg\psi\}$.

$R_C\forall$: *Regola del* $\forall$ *relativamente al termine t.*
Se ad un insieme X di formule appartiene una formula del tipo $\forall x\varphi$, l'applicazione di questa regola all'insieme X relativamente alla formula $\forall x\varphi$ e al termine t, fa passare ad un nuovo insieme X' ottenuto da X aggiungendo la formula $\varphi(x/t)$, cioè $X'=X\cup\{\varphi(x/t)\}$.

$R_C\neg\forall$: *Regola del* $\neg\forall$.
Se ad un insieme X di formule appartiene una formula del tipo $\neg\forall x\varphi$, l'applicazione di questa regola all'insieme X relativamente alla formula $\neg\forall x\varphi$, fa passare ad un nuovo insieme X' ottenuto da X aggiungendo la formula $\neg\varphi(x/t)$ dove t o è una variabile che non occorre libera in X o un simbolo di costante che non è nel linguaggio di X, cioè $X'=X\cup\{\neg\varphi(x/t)\}$ con la stessa condizione su t.

$R_C=$: *Regola dell'* $=$ *relativamente al termine t.*
L'applicazione di questa regola ad un insieme X di formule relativamente al termine t, fa passare ad un nuovo insieme X' ottenuto da X aggiungendo la formula t=t, cioè $X'=X\cup\{t=t\}$.

$R_C/$: *Regola di sostituzione.*
Se ad un insieme X di formule appartengono sia una formula del tipo $\varphi(t)$ che la formula t=t', l'applicazione di questa regola all'insieme X relativamente alle formule $\varphi(t)$ e t=t', fa passare ad un nuovo insieme X' ottenuto da X aggiungendo la formula $\varphi(t/t')$, cioè $X'=X\cup\{\varphi(t/t')\}$. Qui, come altrove, con la scrittura $\varphi(t/t')$ si indica la formula ottenuta dalla formula $\varphi(t)$ sostituendo il termine t' a una o più occorrenze di t in $\varphi(t)$.

Teorema. Le regole introdotte preservano la soddisfacibilità. Cioè, se si parte da un insieme X soddisfacibile, allora anche l'insieme che la regola fa ottenere (almeno uno degli insiemi che la regola fa ottenere, nel caso della regola $\neg\wedge$) è soddisfacibile.
DIMOSTRAZIONE. Per quasi tutte le regole l'affermazione è banale dal momento che le formule dell'insieme X' (o di X' o di X'', per la regola $\neg\wedge$) sono vere nella stessa realizzazione che rende vere le formule di X. Unico caso che si discosta leggermente dalla precedente affermazione è quello riguardante la regola del $\neg\forall$. In tale caso, sia σ una realizzazione che rende vere tutte le formule di X. In particolare, $(\neg\forall x\varphi)^{\sigma}=V$. Pertanto esiste un elemento a appartenente all'universo della realizzazione tale che $(\neg\varphi)^{\sigma(x/a)}= V$. Si consideri ora la formula $\neg\varphi(x/t)$ introdotta dalla regola. Se t è una variabile che non occorre in X allora la realizzazione $\sigma(t/a)$ rende vere tutte le formule di X, perché t non occorre libera in X, ed anche rende vera $\neg\varphi(x/t)$, perché $\neg\varphi(x/t)^{\sigma(t/a)}=(\neg\varphi)^{\sigma(x/a)}$ che già sappiamo essere vera. Se invece t è un nuovo simbolo di costante, allora si consideri l'espansione σ' della realizzazione σ ottenuta interpretando t in a. In tale realizzazione le formule di X continuano ad essere vere perché t non occorre in esse, ed anche $\neg\varphi(x/t)^{\sigma'}=(\neg\varphi)^{\sigma'(x/t^{\sigma'})}=(\neg\varphi)^{\sigma'(x/a)}=(\neg\varphi)^{\sigma(x/a)}=V$, cosicché possiamo affermare che tutte le formule di X' sono vere in σ'.

33. UNA STRATEGIA PER LE REGOLE DI ANALISI ESAMINANDO UNA FORMULA ALLA VOLTA.

Si vuol studiare ora come utilizzare queste regole per costruire una successione di alberi finiti (che indicheremo con T_i, $i\in\mathbb{N}$), uno estensione finale del precente, per l'analisi della soddisfacibilità o meno di un insieme di formule in un linguaggio numerabile.

Poiché la regola del $\neg\forall$ può richiedere l'uso di nuovi simboli per costanti, si introduca subito un insieme numerabile $C=\{c_i: i\in\mathbb{N}\}$ di nuovi simboli per costanti ottenendo dal linguaggio iniziale $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_0$ i linguaggi $\mathfrak{L}_i$ tali che $\mathfrak{L}_{i+1}=\mathfrak{L}_i\cup\{c_i\}$, e il linguaggio $\mathfrak{L}^\infty=\mathfrak{L}\cup C$.

Dovendo poi usare anche le regole del $\forall$ e del $=$ relativamente a certi termini, è opportuno stabilire un buon ordinamento dei termini di $\mathfrak{L}^\infty$ onde poter determinare in relazione a quale termine va applicata una occorrenza di una tale regola. Così l'insieme dei termini sia $\{t_i: i\in\mathbb{N}\}$. Non è restrittivo supporre che i termini vengano ordinati in modo che, per ogni $i\in\mathbb{N}$, t_i sia nel linguaggio $\mathfrak{L}_i$, anzi questa ipotesi, che viene adottata, semplificherà l'esposizione in seguito.

Per poter decidere rispetto a quale formula utilizzare la regola di sostituzione, si stabilisca un buon ordinamento, usando i numeri naturali come indici, delle formule del linguaggio $\mathfrak{L}^\infty$. Così sia $\{\varphi_i: i\in\mathbb{N}\}$ l'insieme delle formule di $\mathfrak{L}^\infty$, ed ancora non è restrittivo supporre che φ_i sia in $\mathfrak{L}_i$.

Infine, nello spirito di analizzare una formula alla volta, si bene ordini anche l'insieme iniziale Γ di formule del linguaggio $\mathfrak{L}$ da analizzare, usando i numeri naturali come indici: $\Gamma=\{\gamma_i: i\in\mathbb{N}\}$.

Non solo si dovrà definire la successione degli alberi, ma anche una successione degli insiemi finiti bene ordinati delle formule che sono in attesa d'essere analizzate. Tali insiemi, che saranno chiamati code e indicati con Co_i con $i\in\mathbb{N}$, in generale varieranno nel passare da un albero all'altro.

STRATEGIA.

Iniziamo la definizione per induzione della successione degli alberi e delle code che costituiranno la strategia di utilizzazione delle regole introdotte per l'analisi della soddisfacibilità dell'insieme di formule Γ.

T_0 sia l'albero con la sola radice costituita dall'insieme di formule Γ. Co_0 sia l'insieme bene ordinato costituito dalla sola formula γ_0.

Per passare da un albero ad un altro utilizzando una regola, si considererà l'insieme delle formule di un ramo r dell'albero da estendere come l'insieme X al quale applicare la regola, mentre l'insieme X' prodotto dalla regola (gli insiemi X' e X'', nel caso della regola del $\neg\wedge$) sarà l'insieme delle formule del ramo r' (dei rami r' e r'', nel caso della regola del $\neg\wedge$), nel nuovo albero, che estende r mediante l'aggiunta di un nodo come immediato successore della foglia di r (due nodi entrambi immediati successori della foglia di r nel caso della regola del $\neg\wedge$) costituito dalle formule aggiunte ad X per ottenere X' (ciascuno costituito dalla formula aggiunta ad X per ottenere X' e X'' rispettivamente).

L'albero T'_n si ottiene dall'albero T_n mediante il seguente procedimento. Sia α la prima formula di Co_n, si devono considerare vari casi dipendenti da quale tipo di formula è α. Se α è $\neg\neg\beta$, oppure $\wedge\beta\delta$, oppure $\neg\wedge\beta\delta$ si applichi la regola del $\neg\neg$, o la regola dell'$\wedge$, o la regola del $\neg\wedge$, rispettivamente, come sopra descritto, a tutti i rami aperti di T_n che contengono la formula α. Se α è $\forall x\beta$ si applichi la regola del $\forall$, come sopra descritto, a tutti i rami aperti di T_n che contengono la formula α, relativamente al primo termine t (nell'ordine stabilito dei termini) tale che la formula $\beta(x/t)$ non occorra nel ramo da estendere. Se α è $\neg\forall x\beta$ si applichi la regola del $\neg\forall$, come sopra descritto, a tutti i rami aperti di T_n che contengono la formula α, utilizzando il simbolo per costante c_n nella formula $\neg\beta(x/c_n)$: di fatto tale simbolo per costante non occorre nel ramo da estendere perché, come si potrà osservare facilmente per induzione, per ogni n, $\mathfrak{L}_n$ è un linguaggio sufficiente per le formule dell'albero T_n.

L'albero T_{n+1} si ottiene dall'albero T'_n aggiungendo ad ogni foglia di un ramo aperto dell'albero T'_n, come immediato successore, un nuovo nodo costituito dalla formula $t_n=t_n$ e, se c'è, dalla prima formula dell'ordinamento delle formule che sia nel linguaggio $\mathfrak{L}_n$ e tale che è del tipo $\varphi(t/t')$ con $\varphi(t)$ e $t=t'$ (dove t è diverso dal termine t') formule che occorrono nel ramo di T'_n che viene esteso: in pratica si sono applicate contemporaneamente le regole dell'uguale, relativamente al termine t_n, e di sostituzione riguardo alla formula sopra specificata.

Per ottenere Co_{n+1} da Co_n si deve togliere il primo elemento di Co_n ed aggiungere alla fine di ciò che resta prima, se c'è e non è atomica o negazione di atomica, la formula γ_{n+1} di Γ, seguita, in buon ordine, dalle formule non atomiche che sono nei nodi di T_{n+1} e non nei nodi di T_n, poi dalle formule del tipo $\varphi(t/t')$ introdotte nel passare da T'_n a T_{n+1}, ed, infine, la formula tolta all'inizio di Co_n se questa è del tipo $\forall$.

Dalla definizione della stategia, è immediato osservare che, per ogni $n\in N$, l'albero T_n è finito nel linguaggio $\mathfrak{L}_n$, con un numero finito di successori immediati di ogni nodo, di fatto al più due, e con un numero finito di formule, ancora al più due, in ogni nodo diverso dalla radice; ed anche ogni coda Co_n è costituita da un insieme finito e ben ordinato di formule, tutte nel linguaggio $\mathfrak{L}_n$.

Se l'insieme Γ iniziale di formule da analizzare è soddisfacibile, allora ciascuno degli alberi della successione ha almeno un ramo soddisfacibile, dal momento che le regole adottate per la costruzione degli alberi della successione preservano la soddisfacibilità. Inoltre ogni ramo soddisfacibile è aperto e nel passare da un albero con almeno un ramo aperto al prossimo albero della successione il numero di nodi aumenta di almeno uno. Così, a partire da un insieme Γ soddisfacibile, per ogni $n\in N$, l'albero T_n ha almeno un ramo aperto e almeno n nodi.

Sicché vale il seguente

Teorema di validità. Se esiste un $n\in N$ tale che l'albero T_n è chiuso allora l'insieme iniziale di formule, dal quale si è costruita la successione di alberi, è non soddisfacibile.

D'altra parte se, per ogni $n\in N$, l'albero T_n è aperto, essendo ciascuno di questi alberi un'estensione finale del precedente (cioè contiene il precedente e i nodi che eventualmente ha in più seguono le foglie del precedente), si può considerare l'albero $T^\infty= \cup T_n$, che contiene ciascuno di questi. L'albero T^∞ ha infiniti nodi e ogni suo nodo ha un numero finito di immediati successori. Pertanto, in base al lemma di König, T^∞ ha un ramo infinito. Il ramo infinito non può essere chiuso, perché, altrimenti, conterrebbe una formula in un suo nodo e la negazione di quella formula in un altro nodo, e il ramo si chiuderebbe immediatamente dopo il secondo (nell'ordine del ramo) dei due nodi considerati, e sarebbe finito.

Se si dimostra che un ramo infinito è un insieme di Hintikka (e si è organizzata la strategia proprio per arrivare a ciò) allora sarà pure soddisfacibile (poiché lo è ogni insieme di Hintikka), ed in particolare sarà soddisfacibile la radice costituita dall'insieme Γ di cui si voleva sapere se era soddisfacibile o meno.

Pertanto ci accingiamo a dimostrare il seguente

Lemma. Un ramo aperto di T^∞ è un insieme di Hintikka.

DIMOSTRAZIONE. Ovviamente bisogna controllare se le singole clausole di un insieme di Hintikka sono rispettate dall'insieme delle formule di T^∞.

La clausola 0) segue dall'osservazione precedente che un ramo infinito è aperto.

Per le clausole 1), 2), 3), 5), sia φ la formula non atomica o negazione di atomica che si i-

caso in esame. O φ è nella radice, o è in un nodo come risultato dell'applicazione delle regole. In entrambi i casi ad un certo punto entra in una coda, diciamo Co_n, e quando lo fa è ad un certo punto, diciamo al k-esimo. Nella coda $Co_{n+(k-1)}$ la formula φ sarà all'inizio di quella coda. Così, nel passare dall'albero $T_{n+(k-1)}$ all'albero $T'_{n+(k-1)}$, si applica proprio la regola relativa alla formula φ, e si inserisce dopo la foglia di ogni ramo aperto di $T_{n+(k-1)}$, e anche in quello che diverrà parte del ramo infinito, un nodo con la formula o le formule richieste dalla clausola relativa alla formula φ.
Per quanto riguarda la clausola 4), sia $\forall x\varphi$ la formula che si ipotizza essere tra le formule del ramo infinito, e sia $\varphi(x/t)$ la formula che deve pure essere nell'insieme affinché sia verificata la clausola 4). Come prima, verrà un certo momento in cui questa formula sarà all'inizio di una coda e ad essa si dovrà applicare la regola del $\forall$. Ma non è detto che la formula $\varphi(x/t')$ introdotta dalla regola del $\forall$ sia proprio quella con il t voluto dalla clausola 4): può succedere che t preceda t' nel buon ordine dei termini (questo buon ordine era stato considerato fin dalla presentazione della strategia), o che t sia uguale a t', o che t segua t'. Nel primo caso, proprio per come è stata definita la stategia, si è in una situazione in cui la formula $\varphi(x/t)$ è già presente nel ramo infinito. Nel secondo caso la formula $\varphi(x/t)$ viene inserita anche nel ramo infinito proprio dalla presente applicazione della regola. Nel terzo caso la situazione è più delicata: anche se la formula voluta $\varphi(x/t)$ non viene inserita nel ramo al momento, la stessa formula $\forall x\varphi$ continuerà a tornare all'inizio della coda, perché viene rimessa alla fine della coda dopo ciascuna volta che è giunta all'inizio, e ogni volta provoca l'applicazione della regola del $\forall$ introducendo nel ramo la formula $\varphi(x/t^*)$ con termini t* sempre più avanti nel buon ordinamento dei termini, sicché t* dovrà arrivare a superare nell'ordinamento dei termini anche t, ed allora si sarà sicuri che anche $\varphi(x/t)$ sarà presente nel ramo infinito. Così si sarà finalmente mostrato che anche la clausola 4) è rispettata.
Per quanto riguarda la clausola 6), sia t=t la formula che si vuol far vedere che è presente nell'insieme. Avendo bene ordinato l'insieme di tutti i termini, t sarà il k-esimo termine nell'elenco, e nel passare dall'albero T'_k all'albero T_{k+1} si aggiunge in ogni ramo aperto, e quindi anche nel ramo che fa parte del ramo infinito considerato di T^∞, la formula t=t, sicché anche la clausola 6) è rispettata.
Infine, per quanto riguarda la clausola 7), se le formule φ e t'=t'' sono nel ramo infinito considerato di T^∞, esse sono nel tratto iniziale di tale ramo contenuto in un opportuno albero T_n. Sia $\varphi(t'/t'')$ la formula che la clausola vorrebbe presente nel ramo infinito, essa sarà la formula φ_i nell'iniziale buon ordinamento delle formule. Al più tardi nel passare dall'albero T'_{n+i} all'albero T_{n+i+1} sarà introdotta in ogni ramo aperto di T_{n+i+1}, e quindi anche nel ramo infinito di T^∞, la formula $\varphi(t'/t'')$, e ciò mostra che anche la clausola 7) è rispettata.
Ciò conclude la dimostrazione.

Avendo acquisito il precedente lemma possiamo dire di aver completato anche la dimostrazione, avviata precedentemente, del seguente

Teorema di completezza. Se per ogni $n\in\mathbb{N}$ l'albero T_n è aperto, allora la radice di tutti questi alberi è un insieme soddisfacibile.

Il precedente risultato fa riferimento a una successione di alberi costruiti grazie ad una strategia che prescrive come utilizzare le regola. Tuttavia una volta acquisito tale risultato, anzi proprio a causa di questo, si può affermare che

Teorema di completezza (ulteriore versione). Un insieme di formule è non soddisfacibile se si riesce a costruire, a partire da quell'insieme e mediante le regole introdotte (anche senza seguire una strategia), un albero chiuso. Un insieme di formule è soddisfacibile se non esiste alcun albero chiuso costruito a partire da quell'insieme mediante le regole introdotte.

Quest'ultima versione è utile quando si vuole mostrare la non soddisfacibilità di un insieme di formule, nel qual caso basta costruire un albero chiuso, che, a volte, può essere ottenuto più rapidamente non seguendo pedissequamente le prescrizioni della stategia, ma scegliendo un ordine di applicazione delle regole ad hoc (per l'insieme di formule che si vuole analizzare) astuto ed opportuno.

Si può osservare che se si parte da un insieme Γ infinito (numerabile) non soddisfacibile allora, per un opportuno numero naturale i , l'albero T_i della successione di alberi costruiti a partire dall'insieme Γ, dovrà essere chiuso. T_i sarà anche finito e per la sua costruzione si saranno utilizzate effettivamente solo un numero finito Δ di formule di Γ. Lo stesso albero T_i è un albero chiuso della successione di alberi costruita a partire da Δ, che sarà, di conseguenza, non soddisfacibile. Abbiamo così ridimostrato, nella presente situazione, il seguente

Teorema di compattezza (semantico). Se un insieme di formule è non soddisfacibile, allora esiste un suo sottinsieme finito non soddisfacibile. Equivalentemente, nella formulazione contronominale, se ogni sottinsieme finito di un certo insieme di formule è soddisfacibile allora anche l'intero insieme sarà soddisfacibile.

Si osservi che, se l'insieme dato è finito, quanto afferma il teorema è del tutto banale.
Si osservi anche che l'implicazione inversa dell'affermazione del teorema è ovvia, e, combinandola con il teorema stesso, si può affermare che un insieme di formule è soddisfacibile se e solo e ogni suo sottinsieme finito è soddisfaciblie.
Si può osservare ancora che il teorema di compattezza semantico è stato ottenuto dal seguente risultato, dimostrato lungo il percorso, che va sotto il nome di

Teorema di compattezza (sintattico) per questo metodo.
Se un insieme di formule ha un albero chiuso, allora c'è un suo sottinsieme finito che ha un albero chiuso.

34. UN CONTROLLO SINTATTICO PER LA VALIDITA'.

A volte, si è interessati a vedere se una formula è valida o meno, piuttosto che controllare la soddisfacibilirà o meno di una formula.
Si noti che ora ci si interessa ad un'unica formula e non ad un insieme di formule.
Come osservato molto prima, una formula è valida se e solo se la sua negazione è non soddisfacibile. Per non appesantire con troppi segni di negazione le formule, si può riformulare quanto appena affermato nel modo seguente: una formula φ è valida se e solo se è non soddisfacibile la formula che chiameremo negazione semplificata e che indicheremo con $\varphi^{\neg}$, che è o $\neg\varphi$ se la formula non inizia con una negazione o, se questa inizia proprio con una negazione (φ è $\neg\psi$), la formula privata di quella negazione (ψ). Il risultato che lega validità e non soddisfacibilità appena ricordato, permette di usare il metodo sintattico degli alberi di confutazione anche per controllare sintatticamente se una formula φ è valida: infatti basta controllare con detto metodo se $\varphi^{\neg}$ è non soddisfacibile.
Ma ci si può domandare se questo giro attraverso la non soddisfacibilità è proprio indispensabile o, piuttosto, è evitabile costruendo un altro insieme opportuno di regole?
Di fatto si può osservare che nel metodo finora seguito, affinché il nodo iniziale fosse soddisfacibile, le formule di almeno un ramo dovevano essere simultaneamente soddisfacibili, il che equivale, nel caso di una sola formula nel nodo iniziale e quindi di un numero finito di formule in un ramo di un qualsiasi albero T_n, alla soddisfacibilità della congiunzione delle formule di almeno un ramo, cioè alla soddisfacibilità della formula $\wedge\{\alpha$: α è una formula occorrente nel ramo r$\}$. Poiché in questo caso in cui il nodo iniziale è costituito da una sola formula, come si è già visto, il numero degli immediati successori di un nodo è finito, ne segue che i rami di un albero sono finiti, e il fatto che la congiunzione di tutte le formule di almeno un ramo (cioè $\wedge\{\alpha$: α è una formula occorrente nel ramo r$\}$) sia soddisfacibile si può esprimere anche dicendo che la disgiunzione delle congiunzioni delle formule di un ramo, al variare del ramo nell'albero, deve essere soddisfacibile, cioè deve essere soddisfacibile la formula $\vee\{\wedge\{\alpha$: α è una formula occorrente

Analogamente, sempre nel caso di radice costituita da una sola formula, per concludere che il nodo iniziale non è soddisfacibile è sufficiente osservare che ogni ramo di un albero T contiene una formula e la sua negazione. Allora, infatti, per ogni ramo r, la congiunzione delle formule di quel ramo, $\wedge\{\alpha$: α è una formula occorrente nel ramo r$\}$, sarebbe non soddisfacibile e la disgiunzione di queste congiunzioni (non soddisfacibili), $\vee\{\wedge\{\alpha$: α è una formula occorrente nel ramo r$\}$: r è un ramo di T$\}$, sarebbe ancora non soddisfacibile, mentre dovrebbe essere soddisfacibile se la formula della radice fosse soddisfacibile, come osservato appena sopra.

Grazie al teorema di completezza, si può concludere che una formula è non soddisfacibile se e solo se c'è un albero costruito a partire da quella formula tale che la disgiunzione delle congiunzioni delle formule di un ramo, al variare dei rami nell'albero, è non soddisfacibile.

Questo risultato può anche essere letto nel modo seguente: una formula φ è valida se e solo se c'è un albero T, costruito a partire da $\varphi^{\neg}$ usando le regole di confutazione, tale che la negazione della disgiunzione delle congiunzioni delle formule di un ramo, al variare dei rami nell'albero, è valida, cioè $\neg\vee\{\wedge\{\alpha$: α è una formula occorrente nel ramo r$\}$: r è un ramo di T$\}$ è valida. La validità dell'ultima formula è chiaramente equivalente, per il significato delle abbreviazioni usate, alla validità della formula $\wedge\{\vee\{\neg\alpha$: α è una formula occorrente nel ramo r$\}$: r è un ramo di T$\}$, che, a sua volta, è equivalente, per il significato della notazione $\varphi^{\neg}$, alla validità della formula $\wedge\{\vee\{\alpha^{\neg}$: α è una formula occorrente nel ramo r$\}$: r è un ramo di T$\}$. Così si vede che ciò che è interessante è l'albero $T^{\neg}$ ottenuto da T sostituendo ad ogni formula α in esso la formula $\alpha^{\neg}$. Rispetto all'albero $T^{\neg}$, l'affermazione precedente può esser letta così: φ è valida se e solo è valida la formula $\wedge\{\vee\{\beta$: β è una formula occorrente nel ramo r$\}$: r è un ramo di $T^{\neg}\}$

Di fatto l'albero T era stato ottenuto ad un certo punto delle costruzione di una successione finita di alberi T_i, i=0,...,n ciascuno ottenuto dal precedente mediante l'applicazione di regole che preservano la soddisfacibilità. Se però, ora, in tutti gli alberi della successione si sostituisce a ciascuna formula α la formula $\alpha^{\neg}$, si può dire che gli alberi $T_i^{\neg}$ della nuova successione sono stati ottenuti mediante l'applicazione di regole puramente sintattiche ottenute dalle precedenti regole sintattiche sostituendo alle formule occorrenti la loro negazione semplificata.

Le regole precedenti avevano la caratteristica di preservare la soddisfacibilità (cioè se applicate ad un insieme Γ soddisfacibile portavano ad un insieme soddisfacibile Γ') caratteristica che, nel caso ora in esame di applicazione ad un insieme finito, può essere riformulata, facendo ricorso alle formule che sono una la congiunzione delle formule dell'insieme finito Γ e l'altra la congiunzione delle formule dell'insieme finito Γ', nel seguente modo: se la congiunzione delle formule di Γ è soddisfacibile allora anche la congiunzione delle formule di Γ' è soddisfacibile. In contrasto, le nuove regole, proprio per come sono state suggerite, avrebbero la seguente caratteristica: se la disgiunzione delle formule dell'insieme Γ' ottenuto dall'applicazione di una regola è valida, allora la disgiunzione delle formule dell'insieme Γ di partenza è valida. Così si può dire che le nuove regole preservano la validità della disgiunzione di un insieme di formule nella direzione opposta.

Diventa allora conveniente presentare le nuove regole nella direzione opposta, dall'insieme ottenuto all'insieme di partenza: le regole diventano, in qualche modo, regole di riduzione degli insiemi a cui si applicano, e non, come le precedenti, di ampliamento.

Ecco come si presentano le nuove regole per il controllo della validità, che chiamiamo

REGOLE DI DEDUZIONE

$R^{v}_{\neg\neg}$: *Regola del* $\neg\neg$

Siano φ una formula e Γ un insieme finito di formule. L'applicazione di questa regola fa passare dall'insieme di formule $\Gamma\cup\{\neg\neg\varphi, \varphi\}$ all'insieme di formule $\Gamma\cup\{\neg\neg\varphi\}$.

$R^{v}_{\wedge}$: *Regola del* $\wedge$.

Siano φ e ψ formule e Γ un insieme finito di formule. L'applicazione di questa regola fa passare dagli insiemi di formule $\Gamma\cup\{\varphi\#\psi, \varphi\}$ e $\Gamma\cup\{\varphi\#\psi, \psi\}$ all'insieme di formule $\Gamma\cup\{\varphi\#\psi\}$.

$R^v\neg\wedge$: *Regola del* $\neg\wedge$.
Siano φ e ψ formule e Γ un insieme finito di formule. L'applicazione di questa regola fa passare dall'insiemi di formule $\Gamma\cup\{\neg(\varphi\#\psi), \neg\varphi,\neg\psi\}$ all'insieme di formule $\Gamma\cup\{\neg(\varphi\#\psi)\}$.

$R^v\forall$: *Regola del* $\forall$
Siano φ una formula e Γ un insieme finito di formule. L'applicazione di questa regola fa passare dall'insieme di formule $\Gamma\cup\{\forall x\varphi, \varphi(x/y)\}$ all'insieme di formule $\Gamma\cup\{\forall x\varphi\}$, dove y è una variabile che non occorre libera in $\Gamma\cup\{\forall x\varphi\}$.

$R^v\neg\forall$: *Regola del* $\neg\forall$ *relativamente al termine t* .
Siano φ una formula e Γ un insieme finito di formule. L'applicazione di questa regola fa passare dall'insieme di formule $\Gamma\cup\{\neg\forall x\varphi, \neg\varphi(x/t)\}$ all'insieme di formule $\Gamma\cup\{\neg\forall x\varphi\}$, qualunque sia il termine t.

$R^v=$: *Regola t=t.*
Sia Γ un insieme finito di formule. L'applicazione di questa regola fa passare dall'insieme di formule $\Gamma\cup\{\neg t=t\}$ all'insieme di formule Γ, qualunque sia il termine t.

$R^v/$: *Regola di sostituzione*
Sia Γ un insieme finito di formule. L'applicazione di questa regola fa passare dall'insieme di formule

$$\Gamma\cup\{\psi, \neg t=t', \psi(t/t')\}$$

all'insieme di formule $\Gamma\cup\{\psi, \neg t=t'\}$ (qui si è indicato con ψ la formula $\neg\varphi$ che verrebbe dalla trasformazione della corrispondente regole vista prima).

Grazie alle osservazioni prima esposte, possiamo affermare il seguente
Teorema (di validità). Le regole di deduzione fanno passare da insiemi finiti di formule la cui disgiunzione è valida a loro sottinsiemi di formule la cui disgiunzione è valida.

Un esempio può servire ad illustrare meglio il legame tra gli alberi di confutazione e il nuovo modo di leggerli a cui stiamo cercando di arrivare. Si consideri la formula $(Pv_0\wedge Pv_1)\rightarrow(Pv_1\wedge Pv_0)$ che scritta in modo non abbreviato è $\neg\wedge\wedge Pv_0Pv_1\neg\wedge Pv_1Pv_0$ (questa formula rappresenta la commutatività della congiunzione ed è evidentemente valida). Per controllare sintatticamente la sua validità si può controllare sintatticamente la non soddisfacibilità della sua negazione semplificata $\wedge\wedge Pv_0Pv_1\neg\wedge Pv_1Pv_0$. Cosi si avvia la costruzione di alberi di confutazione (e le relative code che qui non vengono indicate) fino a pervenire ad uno chiuso. Trascurando le formule che riguardano l'uguale come simbolo logico, che qui non occorre, si ottiene la seguante successione di quattro alberi di confutazione.

T_0	T_1	T_2
$\wedge\wedge Pv_0Pv_1\neg\wedge Pv_1Pv_0$	$\wedge\wedge Pv_0Pv_1\neg\wedge Pv_1Pv_0$	$\wedge\wedge Pv_0Pv_1\neg\wedge Pv_1Pv_0$
	|	|
	$\wedge Pv_0Pv_1$, $\neg\wedge Pv_1Pv_0$	$\wedge Pv_0Pv_1$, $\neg\wedge Pv_1Pv_0$
		|
		Pv_0 , Pv_1

T_3

$\land\land Pv_0Pv_1\neg\land Pv_1Pv_0$
|
$\land Pv_0Pv_1 \,,\, \neg\land Pv_1Pv_0$
|
$Pv_0 \,,\, Pv_1$
/ \
$\neg Pv_1$ $\neg Pv_0$
= =

I corrispondenti nuovi alberi $T_0^{\neg}$, $T_1^{\neg}$, $T_2^{\neg}$, $T_3^{\neg}$ saranno:

$T_0^{\neg}$

$\neg\land\land Pv_0Pv_1\neg\land Pv_1Pv_0$

$T_1^{\neg}$

$\neg\land\land Pv_0Pv_1\neg\land Pv_1Pv_0$
|
$\neg\land Pv_0Pv_1 \,,\, \land Pv_1Pv_0$

$T_2^{\neg}$

$\neg\land\land Pv_0Pv_1\neg\land Pv_1Pv_0$
|
$\neg\land Pv_0Pv_1 \,,\, \land Pv_1Pv_0$
|
$\neg Pv_0 \,,\, \neg Pv_1$

$T_3^{\neg}$

$\neg\land\land Pv_0Pv_1\neg\land Pv_1Pv_0$
|
$\neg\land Pv_0Pv_1 \,,\, \land Pv_1Pv_0$
|
$\neg Pv_0 \,,\, \neg Pv_1$
/ \
Pv_1 Pv_0
= =

Poiché abbiamo formulato le regole di deduzione dall'insieme più ampio ad un suo sottinsieme (gli insiemi ora sono costituiti dalle formule di un ramo), è opportuno invertire l'ordine negli alberi e considerare alberi invertiti. Per **albero invertito** si intende un insieme parzialmente ordinato tale che ogni suo elemento (detto nodo) ha esattamente un immediato successore, eccetto un unico nodo che non ha successori e che viene detto radice. I nodi che non hanno predecessori sono detti foglie. Ancora i rami sono sottinsiemi dell'albero invertito totalmente ordinati e massimali.

Gli alberi invertiti $T_0^\wedge$, $T_1^\wedge$, $T_2^\wedge$, $T_3^\wedge$, corrispondenti rispettivamente agli alberi $T_0^{\neg}$, $T_1^{\neg}$, $T_2^{\neg}$, $T_3^{\neg}$, saranno:

$T_0^\wedge$

$\neg\land\land Pv_0Pv_1\neg\land Pv_1Pv_0$

$T_1^\wedge$

$\neg\land Pv_0Pv_1 \,,\, \land Pv_1Pv_0$
|
$\neg\land\land Pv_0Pv_1\neg\land Pv_1Pv_0$

$T_2^\wedge$

$\neg Pv_0 \,,\, \neg Pv_1$
|
$\neg\land Pv_0Pv_1 \,,\, \land Pv_1Pv_0$
|
$\neg\land\land Pv_0Pv_1\neg\land Pv_1Pv_0$

$T_3^\wedge$

= =
Pv_1 Pv_0
\ /
$\neg Pv_0 \,,\, \neg Pv_1$
|
$\neg\land Pv_0Pv_1 \,,\, \land Pv_1Pv_0$
|
$\neg\land\land Pv_0Pv_1\neg\land Pv_1Pv_0$

Si noti che il passaggio dall'albero invertito $T_3^\wedge$ all'albero invertito $T_2^\wedge$ è giustificato dalla regola di deduzione $R^{v}{}_{\land}$ applicata agli insiemi costituiti dalle formule di ciascuno dei due rami di $T_3^\wedge$ per ottenere l'insieme costituito dalle formule del ramo di $T_2^\wedge$. Analogamente il passaggio dall'albero invertito $T_2^\wedge$ all'albero invertito $T_1^\wedge$ è giustificato dalla regola di deduzione $R^{v}{}_{\neg\land}$ applicata all'insieme costituito dalle formule del ramo di $T_2^\wedge$ per ottenere l'insieme costituito dalle formule del ramo di $T_1^\wedge$. E ancora il passaggio dall'albero invertito $T_1^\wedge$ all'albero invertito $T_0^\wedge$ è giustificato dalla regola di deduzione $R^{v}{}_{\neg\land}$

applicata all'insieme costituito dalle formule del ramo di T_1^ per ottenere l'insieme costituito dalla formula del ramo di T_0^. Si può dire che nel passare da un albero invertito al prossimo (di indice diminuito di uno) si sono potate delle foglie del primo.

Nel metodo sviluppato per il controllo dell'eventuale soddisfacibilità mediante gli alberi di confutazione non sarebbe cambiato alcun risultato se, invece di chiudere un ramo non appena nel ramo occorre una formula φ e la sua negazione $\neg\varphi$, avessimo convenuto che, in tal caso, si aggiunge nella foglia la formula della coppia $\{\varphi,\neg\varphi\}$, che non è nella foglia, e che un ramo si chiude se nella sua foglia sono presenti sia una formula che la sua negazione.

Adottando il corrispondente di questa stipulazione nel presente contesto, si ha che un albero è chiuso quando tutte le sue foglie (che ora sono nodi senza predecessori, nel nuovo ordinamento, dell'albero invertito ottenuto da un albero di confutazione con foglie chiuse sostituendo le formule con le loro negazioni semplificate e invertendo l'ordine dei nodi) sono costituite da una formula e dalla sua negazione. Si noti che, in tal caso, la disgiunzione delle formule in una foglia di un ramo chiuso è una formula valida.

Con quest'ultima modifica l'albero invertito T_3^ dell'esempio diventa il seguente:

```
    T'3^
      =                        =
Pv1 , ¬Pv1      Pv0 , ¬Pv0
            \      /
        ¬Pv0 , ¬Pv1
               |
   ¬∧Pv0Pv1 , ∧Pv1Pv0
               |
   ¬∧∧Pv0Pv1¬∧Pv1Pv0
```

Fatto fondamentale per arrivare alla conclusione con il metodo degli alberi di confutazione era che in ciascun ramo dell'albero finale fossero presenti una formula e la sua negazione, ora che in ciascuna foglia dell'albero finale sia presente una formula e la sua negazione. Prendendo le negazioni semplificate delle formule che erano presenti, se in un ramo o in una foglia c'erano una formula e la sua negazione, anche dopo aver sostituito le formule negate con le loro negazioni semplificate ancora nello stesso ramo o, corrispondentemente, nella stessa foglia ci sono una formula e la sua negazione. La presenza di una formula e della sua negazione in un ramo o in una foglia, ora che questo insieme viene letto come disgiunzione delle sue formule, garantisce la validità di tale disgiunzione.

Poiché ora le regole che fanno passare da un albero al precedente (nell'ordine degli indici) preservano la validità si potrà arrivare a concludere con la validità della disgiunzione tra le formule (ce n'è una sola) dell'unico ramo del primo albero, cioè con la validità della formula iniziale.

Così si è mostrata la validità di una formula costruendo una successione di alberi invertiti (nel caso dell'esempio la successione degli alberi invertiti T'_3^, T_2^, T_1^, T_0^) tale che 1) il primo ha tutte le foglie chiuse (e quindi anche i rami) e costituite da due sole formule, 2) si passa da uno al prossimo applicando una regola di deduzione all'insieme di formule di un ramo (agli insiemi di formule di ciascuno di due rami nel caso della regola $R^{\vee}{}_{\wedge}$), potando così alcune foglie del primo, e 3) l'ultimo albero è costituito dalla sola radice. Una tale successione finita di alberi invertiti viene detta una **dimostrazione naturale senza indebolimento**. Si noti che una dimostrazione naturale senza indebolimento è un qualcosa puramente sintattico.

Si è abituati a chiamare assiomi le formule valide che vengono scelte come punti di partenza per mostrare sintatticamente la validità di formule. Ora si scelgono come **assiomi** le disgiunzioni tra una formula e la sua negazione; queste sono infinite formule ma tutte del tipo $\varphi\vee\neg\varphi$, sicché si può dire di aver scelto un unico **schema d'assiomi**. Adottando ora esattamente questo schema d'assiomi, la precedente condizione 1) nella definizione di deduzione naturale senza indebolimento può essere ridetta così: 1') tutte le foglie del primo albero invertito della successione sono assiomi.

Prima, nell'applicare le regole di confutazione alla costruzione di una successione di alberi, si era convenuto di considerare come insieme iniziale delle formule, a cui applicare la regola, l'insieme di tutte le formule di un ramo r aperto che si voleva estendere nella costruzione del prossimo albero. Così, nella stessa ottica, nel nuovo nodo (o nei nuovi nodi, nel caso della regola $\neg\wedge$), cioè nel nodo che, per costruire il prossimo albero, si aggiungeva immediatamente dopo la foglia del ramo r, si metteva solo la formula (o le due formule, nel caso della regola $\wedge$) che veniva aggiunta all'insieme di partenza dall'applicazione della regola usata. Si è richiamata questa procedura per osservare che per aggiungere un nuovo nodo non era necessaria la conoscenza dei nodi successivi.

Ora, si possono mantenere nei singoli nodi le negazioni semplificate delle formule che prima erano nello stesso nodo, ma la lettura diventa più difficile poiché, in certo modo, si sta percorrendo l'albero nella direzione opposta (cioè nella direzione secondo la quale si preserva la validità), e, al contrario di quanto si era fatto in precedenza, bisogna conoscere quelli che saranno i nodi successivi (nell'attuale direzione di percorrenza dell'albero verso la radice) per dire a quali insiemi si applica la regola.

Per superare questa difficoltà, può essere d'ausilio la seguente

$R^{v}W$: *Regola W dell'indebolimento (weakening).*
Siano Γ e Δ due insiemi finiti di formule. L'applicazione di questa regola fa passare dall'insieme di formule Γ all'insieme di formule $\Gamma\cup\Delta$.

Si osservi che anche questa regola preserva la validità, nel senso che, se la disgiunzione delle formule di Γ è valida, allora anche la disgiunzione delle formule di $\Gamma\cup\Delta$ è valida.

La regola di indebolimento permette di non considerare tutte le formule dei nodi che seguiranno un nodo che si vuol potare nel passare da un albero invertito al prossimo al fine di verificare che sia stata applicata correttamente una regola di deduzione (con qualche attenzione per la regola $R^{v}\forall$ che preciseremo subito), ma sarà sufficiente inserire tra il nodo che si vuol potare e il prossimo un nuovo nodo, ottenuto dal primo proprio mediante la regola di indebolimento, scegliendo di aggiungere esattamente le formule che giustificheranno poi l'applicazione della regola di deduzione. Il problema con la regola $R^{v}\forall$ è che la stessa regola pone una limitazione sulla variabile menzionata nella regola: essa non deve occorrere libera nei nodi che seguono fino alla radice. Ciò comporta che usando la regola dell'indebolimento successivamente a tale nodo non bisogna introdurre formule con occorrenze libere di quella variabile. Inoltre bisogna ricordare tale impegno anche quando si applica la regola $R^{v}\wedge$ e più rami confluiscono nello stesso nodo: in tal caso, se non viene rispettata la clausola esposta, non si potrà completare la costruzione dell'albero invertito. Se però gli alberi invertiti sono ottenuti da alberi di confutazione sostituendo le formule che in essi occorrono con le loro negazioni semplificate e invertendo l'ordine dei nodi, non c'è pericolo che compaiano variabili che non soddisfano la clausola.

Riprendendo l'esempio già sviluppato, l'albero $T'_3{}^{\wedge}$ diventerebbe:

T''_{3}^

$Pv_1 , \neg Pv_1$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $Pv_0 , \neg Pv_0$

|

$Pv_1 , \neg Pv_1 , \wedge Pv_0 Pv_1 , \neg Pv_0$ $\qquad\qquad$ $Pv_0 , \neg Pv_0 , \wedge Pv_0 Pv_1 , \neg Pv_1$

\ /

$\neg Pv_0 , \neg Pv_1 , \wedge Pv_0 Pv_1$

|

$\neg Pv_0 , \neg Pv_1 , \wedge Pv_0 Pv_1 , \neg\wedge Pv_0 Pv_1$

|

$\neg\wedge Pv_0 Pv_1 , \wedge Pv_1 Pv_0$

|

$\neg\wedge Pv_0 Pv_1 , \wedge Pv_1 Pv_0 , \neg\wedge\wedge Pv_0 Pv_1 \neg\wedge Pv_1 Pv_0$

|

$\neg\wedge\wedge Pv_0 Pv_1 \neg\wedge Pv_1 Pv_0$

Sostanzialmente si è ancora in presenza della seguente successione di alberi invertiti

T''_{3}^, $T''_{2.1}$^, T''_{2}^, $T''_{1.1}$^, T''_{1}^, $T''_{0.1}$^, T''_{0}^

T''_{3}^

$Pv_1 , \neg Pv_1$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $Pv_0 , \neg Pv_0$

|

$Pv_1 , \neg Pv_1 , \wedge Pv_0 Pv_1 , \neg Pv_0$ $\qquad\qquad$ $Pv_0 , \neg Pv_0 , \wedge Pv_0 Pv_1 , \neg Pv_1$

\ /

$\neg Pv_0 , \neg Pv_1 , \wedge Pv_0 Pv_1$

|

$\neg Pv_0 , \neg Pv_1 , \wedge Pv_0 Pv_1 , \neg\wedge Pv_0 Pv_1$

|

$\neg\wedge Pv_0 Pv_1 , \wedge Pv_1 Pv_0$

|

$\neg\wedge Pv_0 Pv_1 , \wedge Pv_1 Pv_0 , \neg\wedge\wedge Pv_0 Pv_1 \neg\wedge Pv_1 Pv_0$

|

$\neg\wedge\wedge Pv_0 Pv_1 \neg\wedge Pv_1 Pv_0$

$T''_{2.1}$^

$Pv_1 , \neg Pv_1 , \wedge Pv_0 Pv_1 , \neg Pv_0$ $\qquad\qquad$ $Pv_0 , \neg Pv_0 , \wedge Pv_0 Pv_1 , \neg Pv_1$

\ /

$\neg Pv_0 , \neg Pv_1 , \wedge Pv_0 Pv_1$

|

$\neg Pv_0 , \neg Pv_1 , \wedge Pv_0 Pv_1 , \neg\wedge Pv_0 Pv_1$

|

$\neg\wedge Pv_0 Pv_1 , \wedge Pv_1 Pv_0$

|

$\neg\wedge Pv_0 Pv_1 , \wedge Pv_1 Pv_0 , \neg\wedge\wedge Pv_0 Pv_1 \neg\wedge Pv_1 Pv_0$

|

$\neg\wedge\wedge Pv_0 Pv_1 \neg\wedge Pv_1 Pv_0$

$T''_2\wedge$

$$\neg Pv_0 , \neg Pv_1 , \wedge Pv_0Pv_1$$
$$|$$
$$\neg Pv_0 , \neg Pv_1 , \wedge Pv_0Pv_1 , \neg\wedge Pv_0Pv_1$$
$$|$$
$$\neg\wedge Pv_0Pv_1 , \wedge Pv_1Pv_0$$
$$|$$
$$\neg\wedge Pv_0Pv_1 , \wedge Pv_1Pv_0 , \neg\wedge\wedge Pv_0Pv_1\neg\wedge Pv_1Pv_0$$
$$|$$
$$\neg\wedge\wedge Pv_0Pv_1\neg\wedge Pv_1Pv_0$$

$T''_{1.1}\wedge$

$$\neg Pv_0 , \neg Pv_1 , \wedge Pv_0Pv_1 , \neg\wedge Pv_0Pv_1$$
$$|$$
$$\neg\wedge Pv_0Pv_1 , \wedge Pv_1Pv_0$$
$$|$$
$$\neg\wedge Pv_0Pv_1 , \wedge Pv_1Pv_0 , \neg\wedge\wedge Pv_0Pv_1\neg\wedge Pv_1Pv_0$$
$$|$$
$$\neg\wedge\wedge Pv_0Pv_1\neg\wedge Pv_1Pv_0$$

$T''1\wedge$

$$\neg\wedge Pv_0Pv_1 , \wedge Pv_1Pv_0$$
$$|$$
$$\neg\wedge Pv_0Pv_1 , \wedge Pv_1Pv_0 , \neg\wedge\wedge Pv_0Pv_1\neg\wedge Pv_1Pv_0$$
$$|$$
$$\neg\wedge\wedge Pv_0Pv_1\neg\wedge Pv_1Pv_0$$

$T''_{0.1}\wedge$

$$\neg\wedge Pv_0Pv_1 , \wedge Pv_1Pv_0 , \neg\wedge\wedge Pv_0Pv_1\neg\wedge Pv_1Pv_0$$
$$|$$
$$\neg\wedge\wedge Pv_0Pv_1\neg\wedge Pv_1Pv_0$$

$T''_0\wedge$

$$\neg\wedge\wedge Pv_0Pv_1\neg\wedge Pv_1Pv_0$$

Si vede direttamente in successione che l'albero invertito $T''_{2.1}\wedge$ è ottenuto da $T''_3\wedge$ applicando alle foglie di questo la regola dell'indebolimento; $T''_2\wedge$ è ottentuto da $T''_{2.1}\wedge$ applicando alle foglie di questo la regola $R^v\wedge$; $T''_{1.1}\wedge$ è ottentuto da $T''_2\wedge$ applicando alle foglie di questo la regola dell'indebolimento; $T''_1\wedge$ è ottentuto da $T''_{1.1}\wedge$ applicando alle foglie di questo la regola $R^v\neg\wedge$; $T''_{0.1}\wedge$ è ottentuto da $T''_1\wedge$ applicando alle foglie di questo la regola dell'indebolimento; $T''_0\wedge$ è ottentuto da $T''_{0.1}\wedge$ applicando alle foglie di questo la regola $R^v\neg\wedge$.

Si noti che in questa successione di alberi invertiti non è mai stato necessario far riferimento a nodi che seguono le foglie per applicare correttamente una regola di deduzione.

In questa situazione non serve considerare l'intera successione degli alberi invertiti, ma basta costruire il primo albero invertito e osservare che 1) le sue foglie sono assiomi, 2) ogni nodo è ottenuto da immediati predecessori mediante l'applicazione di una regola di deduzione, facendo attenzione di non introdurre variabili che occorrano libere se erano le variabili carattestiche di qualche applicazione precedente della regola $R^v\forall$, e 3) la radice è costituita dalla formula che si vuol far vedere essere valida.

Un tale albero invertito verrà detto **dimostrazione naturale** della formula che è nella radice dell'albero. Si noti ancora come una dimostrazione naturale è un qualcosa di puramente sintattico.

Si dice che una formula è **naturalmente dimostrabile** se esiste una dimostrazione naturale di quella formula.

Come conseguenza dei vari risultati finora ottenuti si ha il seguente

Teorema di completezza per la dimostrazione naturale. Una formula è valida se e solo se è naturalmente dimostrabile.

Si osservi che ci sono due momenti separati nella costruzione di una dimostrazione di una formula: uno è il rendersi conto che un certo albero invertito soddisfa tutti i requisiti per essere considerato una dimostrazione di quella formula, l'altro è il saper trovare un tale albero invertito, cioè vedere se una formula è dimostrabile. Se qualcuno ha fatto il secondo lavoro per noi, ci possiamo accontentare del primo che consta di una verifica formale (cioè sulla scrittura). Il secondo momento, che consiste nella ricerca di un albero invertito che sia dimostrazione di una formula, è un problema molto più delicato. Nei metodi sintattici visti precedentemente si era sempre riusciti a determinare delle regole che prescrivessero con esattezza cosa fare; ora, invece, la regola dell'indebolimento non fornisce istruzioni precise su quali formule aggiungere, se non la vaga proposta di prendere quelle che servono per concludere con successo la dimostrazione. Ma quali sono quelle che servono? Ci sono due approcci per tentare una risposta: uno si affida ad una ricerca generalizzata a tutto campo e consiste nel generare tanti (forse tutti i possibili) alberi invertiti, che siano dimostrazioni, fino a riconoscere tra questi uno, se c'è, che sia dimostrazione di quella formula; l'altro approccio, invece, prevede di costruire un albero invertito secondo una strategia più efficiente, sviluppata proprio a partire dalla formula che si vuole dimostrare, magari facendosi guidare dalla scrittura della formula che si vuol dimostrare e dalla scrittura delle formule che man mano si trovano come precedenti nell'albero dimostrativo. Secondo una tale strategia, si percorre l'albero invertito non dalle foglie alla radice, secondo il suo ordinamento, ma a ritroso, dalla radice alle foglie (in modo analogo a quello che si faceva nei metodi precedentemente visti): così dalla formula che si vuol dimostrare si passa a formule (in genere una) dimostrate le quali si può arrivare alla dimostrazione voluta mediante l'applicazione di una regola di deduzione, e da queste alle formule da cui queste si possono dimostrare, e così via continuando a ritroso. Resta il problema di quali regole di deduzione applicare a quali formule: questo problema ha una soluzione naturale facendo ricorso ad una strategia analoga a quella utilizzata per gli alberi di confutazione quando si analizzava una formula alla volta, con l'ulteriore difficoltà del dover determinare quali formule considerare nelle singole applicazioni della regola dell'indebilimento. Ma anche questa difficoltà può essere affrontata con successo: Si costruisca prima la successione T_n^ di alberi invertiti richiesti dalla dimostrazione naturale senza indebolimento. Poi, se questa perviene ad un albero invertito chiuso T_m^, si consideri questo e si ottenga un nuovo albero invertito T'_m^ inserendo tra un nodo ν e quello immediatamente precedente ν' (e i due precedenti ν' e ν'' nel caso di uso della regola $R^{\vee}_{\wedge}$) un nuovo nodo ν* (due nuovi nodi ν* e ν** nel caso di uso della regola $R^{\vee}_{\wedge}$), ottenibili da ν' (da ν' e ν''), aggiungendo esattamente le formule che sono nei successivi nodi del ramo e che giustificano l'applicazione della regola usata nel passaggio da ν' (da ν' e ν'') a ν. Anche se l'approccio così descritto è più efficiente di una ricerca a tappeto di una dimostrazione naturale di una formula, nel caso che la formula che si vuol far vedere essere dimostrabile sia valida, nel caso invece che questa non sia valida entrambi i metodi richiedono di proseguire all'infinito senza né soluzioni né risposte definitive ad ogni stadio finito della ricerca, e danno una risposta solo quando si sono esaurite tutte le infinite possibilita di alberi invertiti.

35. CALCOLO CON I SEQUENTI.

Abbiamo già osservato che l'utilizzo di linguaggi di cardinalità arbitrariamente grande, anche più che numerabile, ci ha portato ad interessanti risultati teorici, tra i quali anche l'inutilità di aumentare la cardinalità del linguaggio nel tentativo di otterere la categoricità di un teoria. Così anche in questo paragrafo considereremo solo linguaggi numerabili.

In quanto sviluppato finora sia con il metodo degli alberi di confutazione che con quello di deduzione, le regole dovevano preservare la soddisfacibilità o la validità di formule o insiemi di formule, sicché nell'analizzare formule del tipo ¬α si doveva sempre considerare anche il tipo della formula α (il che portava ad analizzare negazioni di formule atomiche o formule dei tipi ¬¬α, ¬∧αβ, ¬∀xα) per evitare di passare da formule vere in un

Alternativamente, si potrebbe decidere di considerare due di insiemi di formule (eventualmente vuoti), un primo con le formule che devono essere vere in una certa interpretazione e l'altro con quelle che devono essere false nella stessa interpretazione. Così facendo, i tipi di formule non atomiche sono solo tre ($\neg\alpha$, $\wedge\alpha\beta$, $\forall x\alpha$), ma le regole che li riguardano sono sei, due per ciascuno dei tipi ricordati, a seconda che la formula occorra nel primo o nel secondo insieme.
Indicheremo con Γ,Δ una coppia di insiemi di formule, che chiameremo **sequente**.

35.1. SODDISFACIBILITA' DI SEQUENTI.
Se ci si interessa all'analisi della soddisfacibilità, si dirà che un sequente è soddisfacibile se c'è una realizzazione nella quale è vero, cioè in quella realizzazione tutte le formule del primo insieme sono vere e tutte le formule del secondo insieme sono false. E' immediato che un sequente non è soddisfacibile se una formula compare sia nel primo che nel secondo insieme del sequente. Nel caso che entrambi gli insiemi che costituiscono il sequente siano finiti, possiamo pensare $\Gamma=\{\gamma_1,...,\gamma_m\}$ e $\Delta=\{\delta_1,...,\delta_n\}$, e la soddisfacibilità del sequente è la soddisfacibilità della formula $\gamma_1\wedge...\wedge\gamma_m\wedge\neg\delta_1\wedge. ..\wedge\neg\delta_n$, che equivale a quella della formula $\neg((\gamma_1\wedge...\wedge\gamma_m)\rightarrow(\delta_1\vee.. .\vee\delta_n))$.
Si osservi anche che se il secondo insieme, Δ, di un sequente è costituito da una sola formula, $\Delta=\{\delta\}$, la non soddisfacibilità del sequente è la non soddisfacibilità dell'insieme $\Gamma\cup\{\neg\delta\}$, che sappiamo essere equivalente all'affermazione che δ è conseguenza logica del primo insieme di formule che costituisce il sequente. Questa osservazione dà un nuovo interesse ai sequenti, perché sono più vicini all'analisi della conseguenza logica, piuttosto che all'analisi della soddisfacibilità o della validità a cui ci si era interessati in precedenza. Un po' più in generale, se il secondo insieme di un sequente è costituito da un numero finito di formule, $\Delta=\{\delta_1,...,\delta_n\}$, allora la non soddisfacibilità del sequente equivale all'affermazione che la formula $\delta_1\vee.. .\vee\delta_n$ è conseguenza logica di del primo insieme di formule che costituisce il sequente.
Volendo sviluppare un calcolo (cioè un sistema di controllo sintattico) che prenda in considerazione una formula alla volta, adattando alla situazione presente le regole già viste per il controllo della soddisfacibilità di insiemi di formule con l'analisi di una formula alla volta, si perviene alle regole seguenti, che chiameremo regole dei sequenti per la confutazione.

$R_cS\neg^1$:
Regola del $\neg$ nel primo insieme: da $\Gamma\cup\{\neg\alpha\},\Delta$ si passa a $\Gamma,\Delta\cup\{\alpha\}$.

$R_cS\neg^2$:
Regola del $\neg$ nel secondo insieme: da $\Gamma,\Delta\cup\{\neg\alpha\}$ si passa a $\Gamma\cup\{\alpha\},\Delta$.

$R_cS\wedge^1$:
Regola dell'$\wedge$ nel primo insieme: da $\Gamma\cup\{\alpha\wedge\beta\},\Delta$ si passa a $\Gamma\cup\{\alpha,\beta\},\Delta$

$R_cS\wedge^2$:
Regola dell'$\wedge$ nel secondo insieme: da $\Gamma,\Delta\cup\{\alpha\wedge\beta\}$ si passa ai due sequenti $\Gamma,\Delta\cup\{\alpha\}$ e $\Gamma,\Delta\cup\{\beta\}$.

$R_cS\forall^1$:
Regola del $\forall$ nel primo insieme: da $\Gamma\cup\{\forall x\alpha\},\Delta$ si passa a $\Gamma\cup\{\forall x\alpha, \alpha(x/t)\}, \Delta$ qualunque sia il termine t.

$R_cS\forall^2$:
Regola del $\forall$ nel secondo insieme: da $\Gamma,\Delta\cup\{\forall x\alpha\}$ si passa a $\Gamma,\Delta\cup\{\alpha(x /t)\}$ dove t è o una variabile che non occorre libera in $\Gamma,\Delta\cup\{\forall x\alpha\}$ o una costante che non occorre in $\Gamma,\Delta\cup\{\forall x\alpha\}$.

$R_cS=$:
Regola dell' = : da Γ,Δ si passa a $\Gamma\cup\{t=t\},\Delta$ con t termine arbitrario

$R_cS/^1$:
 Regola di sostituzione di identici nel primo insieme: da $\Gamma\cup\{t=t'\}\cup\{\varphi\},\Delta$ si passa a $\Gamma\cup\{t=t'\}\cup\{\varphi(t/t')\},\Delta$, dove $\varphi(t/t')$ indica la sostituzione di alcune occorrenze di t in φ mediante t'.

$R_cS/^2$:
 Regola di sostituzione di identici nel secondo insieme: da $\Gamma\cup\{t=t'\},\Delta\cup\{\varphi\}$ si passa a $\Gamma\cup\{t=t'\},\Delta\cup\{\varphi(t/t')\}$, dove $\varphi(t/t')$ indica la sostituzione di alcune occorrenze di t in φ mediante t'.

Si notino alcune peculiarità di queste regole. Le regole $R_cS\neg^1$, $R_cS\neg^2$, $R_cS\wedge^1$, $R_cS\wedge^2$, $R_cS\forall^2$ portano ad un sequente in cui la formula esaminata è sparita ma viene inserita una sottoformula ad essa logicamente equivalente (visto in quale dei due iniemi del sequente è introdotta) esaurendo l'analisi di quella formula. Invece la regola $R_cS\forall^1$ porta ad un sequente in cui si aggiunge una sottoformula della formula analizzata, ma anche si mantiene la formula analizzata, e ciò per i noti problemi della verità delle formule di tipo $\forall$ la cui analisi non è completata da una sola istanziazione di quella formula. Le ulteriori regole sono quelle richieste dal considerare l'= come simbolo logico; l'ultima potrebbe anche essere saltata perché nel tendere, come si tenderà, a cercare una stessa formula sia nel primo che nel secondo insieme del sequente basta considerare le possibili sostituzioni per equivalenza in uno degli insiemi che costituiscono il sequente e non necessariamente in entrambi.

Anche per queste regole si dimostra che preservano la soddisfacibilità dei sequenti come definita precedentemente, cioè vale il seguente

Teorema. Dato un sequente X soddisfacibile, allora anche il sequente X' ottenuto da quello applicado una regola (almeno uno dei due sequenti ottenuti nel caso di applicazione della regola $R_cS\wedge^2$) è soddisfacibile.
 DIMOSTRAZIONE. Come per il caso delle regole per l'analisi della soddisfacibilità di un insieme di formule una alla volta, anche ora per quasi tutte le regole l'affermazione è banale dal momento che il sequente X' (o uno dei due sequenti ottenuti nel caso della regola $R_cS\wedge^2$) è vero nella stessa interpretazione che rende vero il sequente X. Unico caso che si discosta leggermente dalla precedente affermazione è quello riguardante la regola del $R_cS\forall^2$. In tale caso, sia σ una realizzazione che rende vero il sequente X. In particolare, poiché la formula $\forall x\varphi$ è nel secondo insieme, sarà $(\forall x\varphi)^{\sigma}$=F. Pertanto esiste un elemento a appartenente all'universo della realizzazione tale che $(\varphi)^{\sigma(x/a)}$=F. Si consideri ora la formula $\varphi(x/t)$ introdotta dalla regola nel secondo insieme. Se t è una variabile che non occorre in X allora la realizzazione $\sigma(t/a)$ rende vero il sequente X, perché t non occorre libera in X, ed anche rende falsa $\varphi(x/t)$, perché $\varphi(x/t)^{\sigma(t/a)}=(\varphi)^{\sigma(x/a)}$ che già si sa essere falsa: così anche il sequente X' è vero. Se invece t è un nuovo simbolo di costante, allora si consideri l'espansione σ' della realizzazione σ ottenuta interpretando t in a. In tale realizzazione X continua ad essere vero perché t non occorre in X, ed anche $\varphi(x/t)^{\sigma'}=(\varphi)^{\sigma'(x/t^{\sigma'})}=(\varphi)^{\sigma'(x/a)}=(\varphi)^{\sigma(x/a)}$=F, cosicché si può affermare che X' è vero in σ', come volevasi dimostrare.

 Anche ora si vogliono usare queste regole per analizzare la soddisfacibilità di un certo sequente (in un linguaggio numerabile) considerando le formule da analizzare ad una ad una. Così bisognerà adottare una buona strategia, sempre allo scopo di non tralasciare di analizzare alcune formule. Ancora, in analogia a quanto già visto, si può adottare una opportuna strategia per la costruzione di una successione di alberi i cui nodi sono costituiti da un sequente.
 Poiché la regola del $\neg\forall$ può richiedere l'uso di nuovi simboli per costanti, si introduca subito un insieme numerabile $C=\{c_i: i\in N\}$ di nuovi simboli per costanti, ottenendo dal

linguaggio iniziale $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_0$ i linguaggi $\mathfrak{L}_i$ tali che $\mathfrak{L}_{i+1}=\mathfrak{L}_i\cup\{c_i\}$, e il linguaggio $\mathfrak{L}^\infty=\mathfrak{L}\cup C=\cup\{\mathfrak{L}_i$: i è un numero naturale$\}$.

Dovendo poi usare anche le regole del $\forall$ e del = relativamente a certi termini, è opportuno stabilire un buon ordinamento dei termini di $\mathfrak{L}^\infty$ onde poter determinare in relazione a quale termine va applicata una occorrenza di una tale regola. Così l'insieme dei termini sia $\{t_i: i\in N\}$. Non è restrittivo supporre che i termini vengano ordinati in modo che, per ogni $i\in N$, t_i sia nel linguaggio $\mathfrak{L}_i$, anzi questa ipotesi che adottiamo semplificherà l'esposizione in seguito.

Per poter decidere rispetto a quale formula utilizzare la regola di sostituzione, si stabilisca un buon ordinamento, usando i numeri naturali come indici, delle formule del linguaggio $\mathfrak{L}^\infty$. Così sia $\{\varphi_i: i\in N\}$ l'insieme delle formule di $\mathfrak{L}^\infty$, ed ancora non è restrittivo supporre che φ_i sia in $\mathfrak{L}_i$.

Infine, nello spirito di analizzare una formula alla volta, si bene ordinino anche i due insiemi del sequente iniziale X del linguaggio $\mathfrak{L}$ da analizzare, usando i numeri naturali come indici: $\Gamma=\{\gamma_i: i\in N\}$ e $\Delta=\{\delta_i: i\in N\}$.

Non solo si dovrà definire la successione degli alberi, ma anche una successione degli insiemi finiti bene ordinati delle formule che sono in attesa d'essere analizzate. Tali insiemi, che saranno dette code e indicate con Co_i con $i\in N$, in generale varieranno nel passare da un albero all'altro.

STRATEGIA.

Si definirà, per induzione, una successione di alberi, i cui nodi sono costituiti ciascuno da un sequente, e una corrispondente successione di code (insiemi finiti ordinati di formule) che costituiranno la strategia di utilizzazione delle regole introdotte per l'analisi della soddisfacibilità del sequente X. Nella successiva definizione, per ramo finito aperto si intenderà un ramo la cui foglia è costituita da un sequente aperto, per il quale, cioè, l'intersezione dei due insiemi che lo costituiscono è vuota. Un ramo non aperto verrà detto chiuso.

T_0 sia l'albero con la sola radice costituita dal sequente X. Co_0 sia l'insieme bene ordinato costituito dalle sole due formule γ_0 e δ_0. Per passare da un albero ad un altro utilizzando una regola, si considererà il sequente che costituisce la foglia di un ramo r dell'albero da estendere come sequente al quale applicare la regola, mentre il sequente X' prodotto dalla regola (i sequenti X' e X'', nel caso della regola del $R_cS\wedge^2$) sarà il sequente che costituisce la foglia del ramo r' (dei rami r' e r'', nel caso della regola del $R_cS\wedge^2$), nel nuovo albero, che estende r mediante l'aggiunta di un nodo come immediato successore della foglia di r (due nodi entrambi immediati successori della foglia di r nel caso della regola del $R_cS\wedge^2$).

L'albero T'_n si ottiene dall'albero T_n mediante il seguente procedimento. Sia α la prima formula di Co_n, e si devono considerare vari casi dipendenti da quale tipo di formula è α.

- Se α è $\neg\beta$, a ciascuno dei rami aperti di T_n la cui foglia è un sequente Y che contiene α o nel primo o nel secondo insieme si aggiunge un nodo come immediato successore della foglia costituito dal sequente ottenuto applicando a Y o la regola $R_cS\neg^1$ se α occorre nel primo insieme del sequente, o la regola $R_cS\neg^2$, se α occorre nel secondo insieme del sequente.
- Se α è $\wedge\beta\delta$, a ciascuno dei rami aperti di T_n la cui foglia è un sequente Y che contiene α nel primo insieme si aggiunge un nodo come immediato successore della foglia costituito dal sequente ottenuto applicando a Y la regola $R_cS\wedge^1$, e a ciascuno dei rami aperti di T_n la cui foglia è un sequente Y che contiene α nel secondo insieme si aggiungono due nodi ciascuno come immediato successore della foglia costituiti dai due sequenti ottenuti applicanco la regola $R_cS\wedge^2$.
- Se α è $\forall x\beta$, a ciascuno dei rami aperti di T_n la cui foglia è un sequente Y che contiene α nel primo insieme si aggiunge un nodo come immediato successore della foglia costitui-

to dal sequente Y' ottenuto applicando a Y la regola $R_cS\forall^1$, in cui si prende per termine t voluto dalla regola il primo termine nell'ordinamento dei termini tale che la formula introdotta nel primo insieme del sequente Y' è nel linguaggio $\mathfrak{L}_n$ e non occorre già in quell'insieme. Inoltre, a ciascuno dei rami aperti di T_n la cui foglia è un sequente Y che contiene α nel secondo insieme si aggiunge un nodo come immediato successore della foglia costituito dal sequente ottenuto applicando a Y la regola $R_cS\forall^2$, in cui si prende come termine t il nuovo simbolo di costante c_n. potendosi dimostrare per induzione che, per ogni n, $\mathfrak{L}_n$ è un linguaggio sufficiente per l'intero albero T_n

L'albero T_{n+1} si ottiene dall'albero T'_n aggiungendo ad ogni foglia di un ramo aperto dell'albero T'_n, come immediato successore, un nuovo nodo costituito dal sequente Y' ottenuto dal sequente Y che costituiva la foglia aggiungendo la formula $t_n=t_n$ al primo insieme di Y; e aggiungendo ad Y anche la prima formula dell'ordinamento delle formule, se c'è, che sia nel linguaggio $\mathfrak{L}_n$, e che soddisfi le seguenti condizioni: 1) sia del tipo $\varphi(t/t')$ e non occorra già nell'insieme di Y a cui la si aggiungerebbe, mettendola nel primo o nel secondo insieme a seconda che la formula $\varphi(t)$ sia nel primo o nel secondo insieme di Y, e 2) t=t' appartenente al primo insieme di Y (dove t è un termine diverso dal termine t'). In pratica si sono applicate contemporaneamente le regole dell'uguale, relativamente al termine t_n, e di sostituzione riguardo alla formula sopra specificata $\varphi(t/t')$.

Per ottenere Co_{n+1} da Co_n si deve togliere il primo elemento di Co_n ed aggiungere alla fine di ciò che resta prima, se c'è e non è atomica, la formula γ_{n+1} di Γ, poi, ancora se c'è e non è atomica, la formula δ_n di Δ, seguita, in buon ordine, dalle formule non atomiche che sono nelle foglie di T_{n+1} e non nelle foglie di T_n ed, infine, dalla formula tolta all'inizio di Co_n se questa è del tipo $\forall$.

Questo completa la descrizione della strategia.

Poiché, come si è visto, le regole preservano la soddisfacibilità, se si perviene ad un albero i cui rami sono tutti chiusi, il sequente nella radice sarà non soddisfacibile. Si è così raggiunto anche per questo metodo di analisi il **teorema di validità**.

D'altra parte è facile vedere che se gli alberi della successione sono tutti aperti e si considera l'albero infinito T^∞, che è la loro unione, sarà infinito e, per il lemma di Könug applicabile in questa situazione, dovrà avere un ramo infinito, lo si chiami r, che non potrà che essere aperto. Inoltre l'insieme S delle formule che occorrono nei primi insieme dei sequenti di r e delle negazioni delle formule che occorrono nei secondi insiemi dei sequenti di r è un insieme di Hintikka, e, dunque, è soddisfacibile. Una realizzazione che rende vere tutte le formule di S ovviamente rende vere le formule del primo insieme del sequente che costituisce la radice dell'albero, e false tutte le formule del secondo insieme di quel sequente, sicché il sequente che si voleva analizzare sarà soddisfacibile. Si è cosi raggiunto anche il **teorema di completezza** per questo metodo.

Riassumendo possiamo enunciare il seguente

Teorema di validità e completezza per la soddisfacibilità di sequenti. Un sequente è non soddisfacibile se e solo se uno degli alberi costruito con la strategia è chiuso. Equivalentemente (contronominale), un sequente è soddisfacibile se e solo se ogni albero costruito con la strategia è aperto.

35.2.. VALIDITA' DI SEQUENTI.

Anche per i sequenti si può essere interessati ad una analisi della loro validità, invece dell'analisi della soddisfacibilità, ricordando che la validità di una formula non è altro che la non soddisfacibilità della sua negazione.

Così, rifacendosi all'analisi della non soddisfacibilità appena vista, nel caso che entrambi gli insiemi che costituiscono il sequente siano finiti, siano $\Gamma=\{\gamma_1,...,\gamma_m\}$ e $\Delta=\{\delta_1,...,\delta_n\}$, **la validità del sequente è la validità della formula** $((\gamma_1\wedge ... \wedge\gamma_m)\rightarrow(\delta_1\vee ... \vee\delta_n))$ (negazione della formula usata per caratterizzare la soddisfacibilità o meno di un sequente), **che equivale a quella della formula** $\neg\gamma_1\vee...\vee\neg\gamma_m\vee\delta_1\vee ... \vee\delta_n$.

Più in generale, si dirà che un sequente è valido se in ogni realizzazione c'è o una formula del primo insieme che è falsa o una formula del secondo insieme che è vera. E' immediato che un sequente è valido se una formula compare sia nel primo che nel secondo insieme del sequente.

Volendo sviluppare un calcolo (cioè un sistema di controllo sintattico) che prenda in considerazione una formula alla volta, adattando alla situazione presente le regole già viste per il controllo della validità di insiemi di formule con l'analisi di una formula alla volta, si perviene alle regole seguenti, che chiameremo regole di deduzione naturale per i sequenti.

$R_VS\neg^1$:
Regola del $\neg$ nel primo insieme: da $\Gamma,\Delta\cup\{\alpha\}$ si passa a $\Gamma\cup\{\neg\alpha\},\Delta$.

$R_VS\neg^2$:
Regola del $\neg$ nel secondo insieme: da $\Gamma\cup\{\alpha\},\Delta$ si passa a $\Gamma,\Delta\cup\{\neg\alpha\}$.

$R_VS\wedge^1$:
Regola dell'$\wedge$ nel primo insieme: da $\Gamma\cup\{\alpha,\beta\},\Delta$ si passa a $\Gamma\cup\{\alpha\wedge\beta\},\Delta$.

$R_VS\wedge^2$:
Regola dell'$\wedge$ nel secondo insieme: dai due insiemi $\Gamma,\Delta\cup\{\alpha\}$ e $\Gamma,\Delta\cup\{\beta\}$ si passa a $\Gamma,\Delta\cup\{\alpha\wedge\beta\}$.

$R_VS\forall^1$:
Regola del $\forall$ nel primo insieme: da $\Gamma\cup\{\forall x\alpha, \alpha(x/t)\},\Delta$, con t termine qualsiasi, si passa a $\Gamma\cup\{\forall x\alpha\},\Delta$.

$R_VS\forall^2$:
Regola del $\forall$ nel secondo insieme: da $\Gamma,\Delta\cup\{\alpha(x/t)\}$, dove t è o una variabile che non occorre libera in $\Gamma,\Delta\cup\{\forall x\alpha\}$ o un simbolo di costante che non occorre in $\Gamma,\Delta\cup\{\forall x\alpha\}$, si passa a $\Gamma,\Delta\cup\{\forall x\alpha\}$.

$R_VS=$:
Regola dell' = : da $\Gamma\cup\{t=t\},\Delta$, con t termine arbitrario, si passa a Γ,Δ.

$R_VS/^1$:
Regola di sostituzione di identici nel primo insieme: da $\Gamma\cup\{t=t'\}\cup\{\varphi(t/t')\},\Delta$ si passa a $\Gamma\cup\{t=t'\}\cup\{\varphi\},\Delta$, dove $\varphi(t/t')$ indica la sostituzione di alcune occorrenze di t in φ mediante t'.

$R_VS/^2$:
Regola di sostituzione di identici nel secondo insieme: da $\Gamma\cup\{t=t'\},\Delta\cup\{\varphi(t/t')\}$ si passa a $\Gamma\cup\{t=t'\},\Delta\cup\{\varphi\}$, dove $\varphi(t/t')$ indica la sostituzione di alcune occorrenze di t in φ mediante t'.

Visto come le nuove regole corrispondono a insiemi di regole per cui si era già ottenuto il teorema di validità, si può affermare, anche in questo caso, il seguente

Teorema di validità. Le regole di validità dei sequenti fanno passare da sequenti validi a sequenti validi.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione potrebbe seguire la via annunciata prima dell'enunciazione del teorema, mostrando come le regole di questo sistema corrispondano a quelle di altri sistemi visti precedentemente ereditando il teorema di validità da questi per i quali si era già stato stabilito. Altrimenti si può dimostrare, regola per regola, che, se si parte da sequenti del tipo prescritto dalla regola che sono validi, allora anche il sequente a cui fa pervenire la regola è valido. Lo svolgimento di queste dimostrazioni, che sono facili, è lasciato al lettore.

Come si fece per la deduzione naturale, e con le stesse motivazioni, anche in questa si-

R_vSW:
Regola dell'indebolimento: da Γ,Δ si passa a $\Gamma\cup\Gamma',\Delta\cup\Delta'$, dove Γ,Δ è un sequente finito e Γ' e Δ' sono arbitrari insiemi finiti di formule.

Si vede immediatamente che anche questa regola preserva la validità.

Ancora con le stesse motivazioni addotte nel caso della deduzione naturale, anche ora si possono introdurre gli **assiomi**. Più precisamente gli assiomi del calcolo dei sequenti sono i sequenti che contengono una stessa formula sia nel primo insieme che nel secondo insieme. E' immediato che tali sequenti sono sequenti validi.

in costruzione

36. COME RIDURRE IL NUMERO DELLE REGOLE DI DEDUZIONE.

Nel sistema di dimostrazione naturale presentato sostanzialmente si disponeva di uno schema d'assiomi e di 8 regole.
E' possibile ridurre il numero delle regole, eventualmente aumentando la quantità dei tipi di formule da cui partire per una dimostrazione, cioè la quantità degli schemi di assiomi?
Trascurando l'insieme di formule Γ (che potrebbe essere vuoto) nella formulazione delle regole e non ripetendo nelle premesse di una regola la formula che si ottiene nelle conclusioni, le regole $R^v\neg\neg$, $R^v\wedge$, $R^v\neg\wedge$, $R^v\neg\forall$, $R^v{=}$ e $R^v/$ possono essere anche rappresentate dai seguenti schemi (si noti che non si sta considerando la regola $R^v\forall$):

$$R^v\neg\neg\ \frac{\alpha}{\neg\neg\alpha}\ ; \qquad R^v\wedge\ \frac{\alpha \mid \beta}{\wedge\alpha\beta}\ ; \qquad R^v\neg\wedge\ \frac{\begin{matrix}\neg\alpha\\ \neg\beta\end{matrix}}{\neg\wedge\alpha\beta}\ ; \qquad R^v\neg\forall\ \frac{\neg\alpha(x/t)}{\neg\forall x\alpha}\ ;$$

$$R^v{=}\ \frac{\neg{=}tt}{\quad}\ ; \qquad R^v/\ \frac{\alpha(t/t')}{\neg{=}tt'\ ,\ \alpha} \qquad R^vW\ \frac{\quad}{\alpha}.$$

Si osservi che, in corrispondenza di ciascuna delle regole così rappresentate (eccetto le regole $R^v{=}$ e R^vW), sono valide le formule che sono implicazioni che hanno per antecedente la formula nella premessa di una regola (la disgiunzione delle formule nella premessa che dovrebbero essere nello stesso ramo nel caso della regola $R^v\neg\wedge$, la congiunzione delle formule nelle premesse di rami diversi nel caso della regola $R^v\wedge$) e per conseguente la formula nella conclusione di quella regola (la disgiunzione delle formule nella conclusione che dovrebbero essere nello stesso ramo nel caso della regola $R^v/$), cioè, rispettivamente, le formule $\alpha\rightarrow(\neg\neg\alpha)$, $(\wedge\alpha\beta)\rightarrow(\wedge\alpha\beta)$, $(\neg\wedge\neg\neg\alpha\neg\neg\beta)\rightarrow(\neg\wedge\alpha\beta)$, $(\neg\alpha(x/t))\rightarrow(\neg\forall x\alpha)$, $(\alpha(t/t'))\rightarrow(\neg\wedge\neg\neg{=}tt'\neg\alpha)$. Per quanto riguarda la regola $R^v{=}$, si osservi che la rappresentazione precedente sta ad indicare che, se è valida una disgiunzione uno dei cui disgiunti è $\neg{=}tt'$, allora è valida la disgiunzione delle altre formule. La corrispondente formula valida può essere individuata nelle formule $\neg t{=}t'\rightarrow\varphi$, qualunque sia la formula φ.
Per la regola R^vW la situazione è analoga, anche se nella direzione opposta: se una disgiunzione è valida, allora lo è anche la disgiunzione tra le formule della disgiunzione precedente ed una ulteriore formula. La corrispondente formula valida può essere individuata nelle formule $\varphi\rightarrow(\neg\wedge\neg\varphi\neg\alpha)$, qualunque sia la formula φ.
Così, per ridurre il numero di regole, si potrebbe pensare ad una sola regola che preservi la validità, e che, partendo dalla premessa (dalle premesse) di uno degli schemi esposti e dalla corrispondente formula valida dia come risultato la conclusione di quello schema: questa regola da sola e le formule corrispondenti alle regole precedenti avrebbero lo stesso effetto di tutte quelle regole.

Di fatto la seguente regola, nota dall'antichità col nome di Modus ponens, ha l'effetto desiderato.

Regola del Modus Ponens (MP).
L'applicazione di questa regola fa passare dalle formule $\varphi\rightarrow\psi$ e φ alla formula ψ.
Si può rappresentarla con lo schema

$$\frac{\begin{array}{c}\varphi\\ \varphi\rightarrow\psi\end{array}}{\psi}$$

In effetti, ad esempio, utilizzando il modus ponens per avere lo stesso effetto della regola $R^{v}\neg\neg$, a partire da α e dalla formula $\alpha\rightarrow\neg\neg\alpha$, che corrisponde a quella regola, si ha

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha\\ \alpha\rightarrow(\neg\neg\alpha)\end{array}}{\neg\neg\alpha}$$

oppure, per avere lo stesso effetto della regola $R^{v}\neg\forall$, a partire da $\neg\alpha(x/t)$ e dalla formula $(\neg\alpha(x/t))\rightarrow(\neg\forall x\alpha)$, che corrisponde a quella regola, sempre utilizzando il modus ponens, si ha

$$\frac{\begin{array}{c}\neg\alpha(x/t)\\ (\neg\alpha(x/t))\rightarrow(\neg\forall x\alpha)\end{array}}{\neg\forall x\alpha}$$

Viste le potenzialità fin qui individuate della regola chiamata modus ponens assieme agli assiomi presentati nel sostituire le regole della deduzione naturale, è naturale voler indagare se si riesce a mettere in piedi un ulteriore metodo di controllo sintattico, possibilmente valido e completo, che si basi sulla nuova regola e sugli assiomi introdotti.
Ma prima di passare a questo studio, che è l'argomento dei prossimi paragrafi, vanno notate subito delle difficoltà insite nel modus ponens.
Date le premesse della regola è ben determinato l'effetto dell'applicazione della regola; ma volendo pervenire ad un certo risultato con l'uso del modus ponens da quali premesse si deve partire? Nella formula ψ che si ottiene applicando la regola non c'è alcuna indicazione di quale deve essere la formula φ usata nelle premesse φ e $\varphi\rightarrow\psi$ del modus ponens in modo che si possa giungere a queste premesse con questo stesso metodo che si sta introducendo. La situazione è analoga a quella già vista per la regola dell'indebolimento, $R^{v}W$, e ancora presenta due vie di soluzione: una prevede una serie di tentativi a tappeto con tutte le formule fino a trovarne una che vada bene, l'altra via vorrebbe essere più efficiente.
Per la regola $R^{v}W$ la via efficiente era stata trovata sostanzialmente facendo ricorso a quanto fatto precedentemente per gli alberi di confutazione, eliminando così la necessità di dover far ricorso a qualche metodo "astuto e intelligente" che avrebbe superato i limiti, che si vogliono rispettare, di un controllo puramente sintattico (e così meccanizzabile, almeno in teoria).
Anche qui si potrebbe fare altrettanto ricorrendo al fatto che il modus ponens, per come è stato finora introdotto, tende a ridurre certe regole, per le quali il metodo sintattico funzionava bene (il metodo determinava completamente le operazioni sintattiche da eseguire e si erano ottenuti i teoremi di validità e completezza), ad una sola regola e a degli assiomi, sicché si potrebbe far ricorso a quel metodo per determinare nel dettaglio come deve operare il nuovo metodo con il modus ponens. Tuttavia, se si vuol utilizzare la regola del modus ponens a partire da altri assiomi, la strada indicata non è così ovviamente percorribile.
Questa osservazione giustifica il percorso seguito in questa presentazione, che differisce dalle altre che partono generalmente da analisi sintattiche basate sul modus ponens. Infatti, mentre queste ultime possono lasciare il sospetto che anche l'analisi sintattica sotto sotto faccia ricorso ad "astuzia ed intelligenza", la via scelta qui mostra che si può fabbricare un controllo sintattico completamente "stupido", che determina esattamente i

passi da compiere, che tuttavia perviene ai risultati di validità e completezza, anche se in modo non molto efficiente.

37. CALCOLO PREDICATIVO.

Ancora una volta si cerca un metodo sintattico per determinare la validità di una formula, o il fatto che sia conseguenza logica di un insieme di formule.

Anche se si è già osservato che, da un certo punto di vista, non si guadagna alcunché a considerare linguaggi di cardinalità più che numerabile, in questa e nella prossima sezione non ci si guadagna, né si perde, considerando linguaggi di cardinalità arbitraria, come si farà, se non nel teorema per la completezza della prossima sezione dove se il linguaggio è più che numerabile si dovrà far ricorso all'assioma della scelta.

L'idea è, come prima, di partire da certe particolari formule, rientranti in un numero finito di tipi ben precisati, che sono valide. La conoscenza della loro validità può essere acquisita come si è acquisita la conoscenza della validità di $\varphi\rightarrow\varphi$, cioè verificando, in base alle definizioni, la validità di una generica formula di quel tipo. Poi si usano dei metodi di trasformazione di scrittura che facciano passare da formule valide a formule valide. Il metodo di trasformazione più usato è quello che va sotto il nome di **modus ponens**. Esso afferma che se si hanno le formule $\varphi\rightarrow\psi$ e φ allora si passa alla formula ψ. Questo metodo rispetta il criterio detto.

Infatti se le due formule date $\varphi\rightarrow\psi$ e φ sono valide, allora anche la terza, ψ, è valida. Di fatto si dimostra anche di più, e cioè se $\varphi\rightarrow\psi$ e φ sono vere in una certa realizzazione, allora ψ è vera proprio in quella realizzazione. Infatti, se $\varphi\rightarrow\psi$ è vera in una realizzazione allora o φ è falsa o ψ è vera; ma, per ipotesi, anche φ è vera in quella realizzazione, e così anche ψ deve essere vera in quella realizzazione. Poiché questa argomentazione va bene in ogni realizzazione, allora, se $\varphi\rightarrow\psi$ e φ sono valide, anche ψ sarà valida.

Si noti che il modo di trasformazione, di passaggio, da certe formule ad altre, è un modo puramente sintattico, opera sulle scritture. Tale trasformazione sulle scritture mantiene la validità.

Con questa tecnica, che sta emergendo, non solo si dispone di alcune formule iniziali che sono valide, ma se ne possono costruire tante altre che continuano ad essere valide, in quanto costruite mediante un numero finito di trasformazioni che preservano la validità. Le formula così ottenute si dicono **dimostrate**.

Per fissare i primi aspetti di questa tecnica è opportuno esplicitare le prime definizioni.

Si dicono **assiomi** le formule di un prefissato insieme. E' opportuno che queste formule siano valide e che sia possibile riconoscere effettivamente se una formula appartiene o meno a detto insieme, cioè se è o meno un assioma.

Si dice **dimostrazione** una successione finita di formule che o sono assiomi o sono ottenute da formule precedenti nella successione mediante l'applicazione di una regola sintattica, in particolare mediante l'applicazione del modus ponens, nel caso in esame.

Per **dimostrazione di una formula** φ si intende una dimostrazione tale che l'ultima formula della successione finita, che è la dimostrazione, sia proprio φ.

Una formula φ si dice **dimostrabile** , e lo si denota con la scrittura $\vdash\varphi$, se esiste una dimostrazione di quella formula.

Tutte le formule ottenibili con questa tecnica, a partire da assiomi validi, saranno valide, ma si possono ottenere così tutte le formule valide? Cioè, ogni formula valida può essere catturata mediante questo processo? Detto altrimenti, ciascuna formula valida è dimostrabile?

La tecnica che utilizza il modus ponens può essere usata non solo per far vedere che certe formule sono valide dimostrandole, ma anche per far vedere che una certa formula φ è conseguenza logica di un dato insieme di altre formule Φ costruendo una successione di formule che o sono assiomi, cioè quelle valide di un certo insieme fissato una volta per tutte, o appartengono all'insieme di formule dato Φ, o sono ottenute da precedenti mediante il modus ponens, successione che porta alla formula φ che si vuol far vedere essere conseguenza logica di Φ. Infatti, come già osservato, il modus ponens preserva la verità in una certa realizzazione, sicché le formule che si otterranno saranno vere in tutte le realizzazioni in cui sono vere le formule dell'insieme dato.

Continuando a fissare esplicitamente le nozioni basilari del metodo che si sta cercando di introdurre, si definisce **deduzione da un insieme di formule** Φ una successione finita di formule che o sono assiomi, o appartengono a Φ, o sono ottenute da formule precedenti nella successione applicando il modus ponens. Si dirà poi che **la formula** φ è **deducubile da** Φ, e si usa la notazione $\Phi|\text{-}\varphi$, se esiste una deduzione da Φ la cui ultima formula sia φ. E' immediato che una dimostrazione (di una formula) è una deduzione (di quella formula) dall'insieme vuoto. Si usano chiamare **premesse** le formule che appartengono all'insieme Φ da cui si fa una deduzione. Se poi tale insieme è costituito da una sola formula, $\Phi=\{\psi\}$, invece di scrivere $\{\psi\}|\text{-}\varphi$, si usa scrivere $\psi|\text{-}\varphi$.

Avendo scelto di utilizzare il modus ponens in questo sistema, il problema diventa quello si determinare opportunamente gli assiomi, cioè le formule valide da prendere come punti di partenza, affinché siano dimostrabili tutte le formule valide e affinché siano deducibili da Φ tutte le formule che sono conseguenze logiche di Φ. Invece di far ricorso agli assiomi corrispondenti alle regole della deduzione naturale (che, tra l'altro, non riuscivano a cogliere la regola $R^{\vee}\forall$) si vogliono introdurre degli assiomi che giustifichino una divesa tecnica, precisamente quella di scaricare il più possibile gli antecedenti di implicazioni sulle premesse di una conseguenza logica.

Di fatto, dal punto di vista semantico, vale la seguente affermazione: $\Phi|=\alpha\to\beta$ se e solo se $\Phi\cup\{\alpha\}|=\beta$. Se si potesse ottenere la stessa equivalenza da un punto di vista sintattico (cioè $\Phi|\text{-}\alpha\to\beta$ se e solo se $\Phi\cup\{\alpha\}|\text{-}\beta$, equivalenza che va sotto il nome di teorema di deduzione) ci sarebbe il vantaggio di poter ridurre la deduzione di una formula da certe premesse a deduzioni di una formula più semplice da più premesse. Questa sembra una direzione promettente e dunque si cercheranno di introdurre come assiomi delle formule che permettano di arrivare a questo risultato.

In concreto, si decide di considerare come assiomi le formule dei seguenti tipi, detto altrimenti si considerano come schemi di assiomi i seguenti (per comodità, visto che per una più facile lettura la regola del modus ponens è stata espressa usando l'abbreviazione $\to$, anche gli assiomi verranno espressi usando la stessa abbreviazione).

Ax 1. $\alpha\to(\beta\to\alpha)$,
Ax. 2. $(\alpha\to(\beta\to\gamma))\to((\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\gamma))$,
Ax. 3. $(\neg\alpha\to\beta)\to((\neg\alpha\to\neg\beta)\to\alpha)$,
Ax. 4. $(\forall x(\alpha\to\beta))\to((\forall x\alpha)\to(\forall x\beta))$,
Ax. 5. $\alpha\to(\forall x\alpha)$ dove x è una variabile che non è libera in α,
Ax. 6. $\forall x\alpha\to\alpha(x/t)$,
Ax. 7. $t=t$,
Ax. 8. $(t_1=t'_1)\to(\ldots\to((t_n=t'_n)\to(ft_1\ldots t_n=ft'_1\ldots t'_n))\ldots)$,
Ax. 9. $(t_1=t'_1)\to(\ldots\to((t_n=t'_n)\to(Pt_1\ldots t_n\to Pt'_1\ldots t'_n))\ldots)$,
Ax. 10 le generalizzazioni di assiomi dei tipi precedenti sono anche assiomi.

Per generalizzazione di una formula α si intende la formula $\forall x_1\ldots\forall x_i\alpha$, qualunque siano il numero naturale i e le i variabili quantificate universalmente all'inizio della nuova formula.

Si noti che negli Ax. 8. e Ax. 9. non c'è nessuna richiesta che i termini $t_1, \ldots , t_n, t'_1, \ldots , t_n'$ siano termini diversi.

Poiché tutte le formule introdotte come assiomi sono valide, come si verifica direttamente con facilità, e poiché il modus ponens preserva la validità, una formula dimostrata sarà valida; di più una formula dedotta da un certo insieme di formule sarà una conseguenza logica di quell'insieme di formule, in base a quanto si era osservato che il modus ponens non preserva solo la validità ma anche la verità in una realizzazione. Si può fissare quanto osservato con l'enunciazione del seguente

Teorema di validità. Una formula dimostrata è valida, e una formula che sia dedotta da un insieme di formule è conseguenza logica di quell'insieme di formule.

Il naturale problema che si pone è se ogni formula valida è dimostrabile e se ogni formula che sia conseguenza logica un certo insieme di formule è anche deducibile da quell'insieme. Rispondere positivamente a questo dubbio sarà gran parte del lavoro successivo. Giusto per cominciare si vorrebbe trovare una dimostrazione almeno delle formule più ovviamente valide, ad esempio di una formula del tipo $\alpha\to\alpha$.

Ecco una dimostrazione di tale formula. Essa è una successione finita di cinque formule: se ne scriverà una per in ogni riga indicando a fianco il motivo per cui è stata introdotta.

$\varphi\to((\varphi\to\varphi)\to\varphi)$	Ax. 1 con φ al posto di α e $\varphi\to\varphi$ al posto di β
$(\varphi\to((\varphi\to\varphi)\to\varphi))\to((\varphi\to(\varphi\to\varphi))\to(\varphi\to\varphi))$	Ax. 2. con φ al posto sia di α che di γ, e $\varphi\to\varphi$ al posto di β
$(\varphi\to(\varphi\to\varphi))\to(\varphi\to\varphi)$	Modus ponens tra le prime due righe
$\varphi\to(\varphi\to\varphi)$	Ax. 1 con φ al posto sia di α e che di β
$\varphi\to\varphi$	Modus ponens tra la terza e la quarta riga

Si noti come, una volta vista la successione di formule, è facile vedere che essa è proprio una dimostrazione di $\varphi\to\varphi$. Ma se fosse stato richiesto di trovarla a partire dalla formula da dimostrare $\varphi\to\varphi$, chi ne sarebbe stato capace? Questa è una constatazione pratica dei limiti del modus ponens, già osservati discutendo quella regola.

E' opportuno notare subito alcune proprietà immediate della nozione |-.
Anzitutto si dimostra che
Teorema di transitività del |-. Se Φ|-α_1,...,Φ|-α_k, e $\{\alpha_1,...,\alpha_k\}$|-$\beta$, allora Φ|-β.
DIMOSTRAZIONE. Infatti, si consideri la successione finita di formule D che è la deduzione di β da $\{\alpha_1,...,\alpha_k\}$: in essa occorrono formule che sono o assiomi, o ottenute da precedenti per modus ponens, o appartengono all'insieme $\{\alpha_1,...,\alpha_k\}$. Si ottenga una nuova successione D' dalla successione D inserendo al posto delle occorrenze della formula α_i la successione finita di formule D_i che è la deduzione di α_i da Φ, per ogni i tra 1 e k. Le formule presenti in D' sono o assiomi o appartengono a Φ, o sono ottenute per modus ponens da formule precedenti in D' come avveniva nelle deduzioni D_1,...,D_k, o D, dal momento che le formule α_1,...,α_k rimangono in D', non più con la giustificazione che sono premesse (come in D), bensì che sono ottenute al termine di una sottosuccessione D_i di D'.

Un ulteriore risultato che segue immediatamente dalla nozione di deduzione è il seguente
Teorema. Se Φ|-α e $\Psi\supseteq\Phi$, allora Ψ|-α.
DIMOSTRAZIONE. Sia D una successione finita di formule che è una deduzione di α da Φ. E' immediato che la stessa D è anche una deduzione di α da Ψ (si noti che non si è mai richiesto che ciascuna formula nell'insieme delle premesse compaia nella successione che è la deduzione).

Un altro aspetto della nozione di deduzione è messo in luce dal seguente
Teorema di compattezza sintattico. Φ|-α se e solo se esiste un sottinsieme finito Φ_0 di Φ tale che Φ_0|-α.
DIMOSTRAZIONE. La direzione che se Φ_0|-α allora Φ|-α è una banale conseguenza del teorema precedente. Per l'altra direzione, si osservi che la deduzione D di α da Φ è una successione finita in cui non possono occorrere più che un numero finito di premesse. Sia Φ_0 il sottinsieme finito di Φ costituito dalle premesse che occorrono in D. D è anche una deduzione di α da Φ_0, sicché c'è questo Φ_0 sottinsieme finito di Φ tale che Φ_0|-α.

Tornando al problema della dimostrabilità delle formule valide, ovviamente non si dimostrerà formula per formula che se è valida allora è dimostrabile, magari esibendone una dimostrazione: sarebbe un lavoro infinito che non darebbe risposta definitiva a nessuno stadio del lavoro.
Nel cercare un approccio più sistematico, va richiamata l'osservazione, già presentata, sulla prevedibile riduzione della difficoltà deduttiva dovendo dedurre una formula più semplice e, per di più, da un maggior numero di premesse. E' stata proprio questa osservazione a suggerire di cercare di ottenere quello che è stato chiamato teorema di deduzione e a scegliere gli assiomi perché sia facile arrivare a tale risultato. Ora si vuol dimostrare proprio il teorema di deduzione, facendo così notare l'opportunità degli assiomi scelti.

Teorema di deduzione. $\Phi|\text{-}\alpha\to\beta$ se e solo se $\Phi\cup\{\alpha\}|\text{-}\beta$.

DIMOSTRAZIONE. Una direzione è facile e precisamente quella che afferma che se $\Phi|\text{-}\alpha\to\beta$ allora $\Phi\cup\{\alpha\}|\text{-}\beta$. Infatti essa segue quasi direttamente dall'ovvia osservazione che, in generale, se $\Phi\subseteq\Phi'$, allora la stessa successione finita di formule che mostra che $\Phi|\text{-}\varphi$, mostra anche che $\Phi'|\text{-}\varphi$. Nel caso in esame si ha che da $\Phi|\text{-}\alpha\to\beta$ segue che $\Phi\cup\{\alpha\}|\text{-}\alpha\to\beta$. Si consideri ora la successione finita che termina con la formula $\alpha\to\beta$ che è la deduzione di $\alpha\to\beta$ da $\Phi\cup\{\alpha\}$, e la si prolunghi con la formula α, perché nelle premesse, e dalla formula β, perché ottenuta dalle ultime due, $\alpha\to\beta$ e α, mediante modus ponens. La nuova successione finita, ottenuta dalla precedente allungandola delle due formule α e β, è una deduzione di β da $\Phi\cup\{\alpha\}$, e la dimostrazione di questa direzione del teorema di deduzione è completata.

L'altra direzione è più delicata poiché ora si vuole dedurre una formula più complessa, $\alpha\to\beta$, da meno premesse, solo quelle di Φ. Quello che si deve fare è costruire una successione finita di formule che sia una deduzione di $\alpha\to\beta$ da Φ, e per fare ciò si ha a disposizione un'altra successione finita di formule, diciamo $\varphi_1,\ldots,\varphi_j$, dove φ_j è β, che è la deduzione di β da $\Phi\cup\{\alpha\}$. L'idea è che nella successione finita di formule da costruire, che deve essere una deduzione da Φ, oltre ad altre formule, compaiano anche le formule $\alpha\to\varphi_i$ per ogni $i\leq j$, e ciò per ogni formula φ_i della deduzione data: così in corrispondenza della formula φ_j, che è β, si otterrà proprio $\alpha\to\beta$. Ora, per dimostrare che esiste una successione finita con le caratteristiche appena precisate, si può procedere per induzione sulla lunghezza j della deduzione data D di β da $\Phi\cup\{\alpha\}$.

Per iniziare l'induzione si consideri j=1. In tale caso la formula φ_1 della prima deduzione D non può che essere o un assioma o una formula di $\Phi\cup\{\alpha\}$. Si cominci con il considerare il caso che φ_1 sia un assioma; allora la seguente successione è una dimostrazione, e quindi anche una deduzione da Φ, di $\alpha\to\varphi_1$.

φ_1	Assioma
$\varphi_1\to(\alpha\to\varphi_1)$	Ax. 1.
$\alpha\to\varphi_1$	MP dalle righe precedenti.

Il caso che φ_1 appartenga a $\Phi\cup\{\alpha\}$ si divide in due sottocasi, a seconda che φ_1 appartenga a Φ oppure che φ_1 sia α.

Nel primo sottocaso la seguente successione è una deduzione da Φ

φ_1	perché appartenente a Φ
$\varphi_1\to(\alpha\to\varphi_1)$	Ax. 1.
$\alpha\to\varphi_1$	MP dalle righe precedenti.

Nel secondo caso si vuol arrivare a dedurre da Φ la formula $\alpha\to\alpha$, ma si è già visto che le formule di questo tipo hanno una dimostrazione, e si utilizzi proprio quella. Così si conclude la base dell'induzione.

Per il passo induttivo, si consideri una successione D di lunghezza j+1, che sia una deduzione di φ_{j+1} da $\Phi\cup\{\alpha\}$, supponendo di aver già acquisito il risultato per le successioni di lunghezza j, ed in particolare per la successione delle prime j formule di D (che è una deduzione D_0 di φ_j da $\Phi\cup\{\alpha\}$, cioè si sappia già costruire una ulteriore successione finita D_0' di formule che sono una deduzione da Φ e che contiene, eventualmente oltre altre formule, le formule del tipo $\alpha\to\varphi_i$ per ogni formula φ_i, con $i\leq j$, nella deduzione D_0. La presenza in D dell'ultima sua formula φ_{j+1} può essere giustificata perché o 1) è un assioma, o 2) è una premessa (cioè appartiene a $\Phi\cup\{\alpha\}$) che può o appartenere a Φ o essere α, o 3) è ottenuta da formule precedenti per modus ponens. Nei primi due casi (inclusi entrambi i sottocasi del secondo) si può allungare la successione D' con le formule già viste nelle rispettive situazioni quando si è trattato il passo base di questa induzione, ottenendo così delle successioni finite, diciamo D'', che sono deduzioni da Φ e che estendono anche a φ_{j+1} la proprietà che in D'' ci sono, eventualmente oltre altre formule, le formule del tipo $\alpha\to\varphi_i$ per ogni formula φ_i, con $i\leq j+1$, nella deduzione iniziale D.

Sicché l'ultimo caso che rimane da analizzare è quello in cui φ_{j+1} è ottenuta per modus ponens da formule precedenti in D. Ciò significa che in D ci sono due formule φ_h e φ_k, che precedono φ_{j+1}, da cui questa si ottiene per modus ponens. Ma allora una delle due, diciamo φ_k, è del tipo $\varphi_h\to\varphi_{j+1}$. Per l'ipotesi induttiva, nella successione D_0' ci dovranno essere le formule $\alpha\to\varphi_h$ e $\alpha\to(\varphi_h\to\varphi_{j+1})$. A questo punto si consideri la successione finita D'' ottenuta prolungando la successione D_0' aggiungendo via via le seguenti formule indicate qui di seguito riga per riga con accanto l'indicazione del perché possono essere inserite in una deduzione da Φ.

$(\alpha\to(\varphi_h\to\varphi_{j+1}))\to((\alpha\to\varphi_h)\to(\alpha\to\varphi_{j+1}))$	Ax. 2.
$(\alpha\to\varphi_h)\to(\alpha\to\varphi_{j+1})$	MP dalla precedente e da $\alpha\to(\varphi_h\to\varphi_{j+1})$ che è prima in D_0'
$\alpha\to\varphi_{j+1}$	MP dalla precedente e da $\alpha\to\varphi_h$ che è prima in D_0'

La successione D'' è una deduzione di $\alpha\to\varphi_{j+1}$ da Φ, e con questo si sono completati anche quest'ultimo caso del passo, l'intera induzione e la dimostrazione del teorema di deduzione.

Si noti che il teorema di deduzione stabilisce un certo legame tra le nozioni rappresentate dai simboli $\to$ e |-. Per come sono stati definiti questi simboli rappresentano concetti diversi: $\to$ è una abbreviazione di una successione finita di simboli del linguaggio (o un simbolo del linguaggio se si sceglie di considerare $\neg$ e $\to$ come i connetivi base da cui ottenere gli altri come abbreviazioni) associata alla funzione dalle coppie di valori di verità nei valori di verità che fa corrispondere il falso solo alla coppia (V,F); mentre |- è un simbolo per rappresentare una nozione sugli oggetti dello studio che si sta eseguendo che lega un insieme di formule (anche vuoto) ad una formula se c'è una successione finita di formule che è una deduzione. Si era già osservato all'inizio che il nome generalmente scelto per il connettivo $\to$ è fuorviante: la parola implicazione ci suggerisce una consequenzialità che non è né nella nozione di funzione binaria sui valori di verità, né nell'intento di voler descrivere una situazione attraverso espressioni linguistiche. La nozione di deduzione, invece, include una certa consequenzialità: partendo da formule valide e applicando regole sintattiche che preservano la validità si giunge "di conseguenza" a formule valide.
Qualcuno potrebbe affermare che il teorema di deduzione trasferisce questa consequenzialità dalla nozione di deduzione a quella di implicazione. Ma non è così: la stessa scrittura del teorema, nel caso che l'insieme delle premesse per dedurre l'implicazione sia vuoto, è la seguente "$|\!-\alpha\to\beta$ se e solo se $\alpha|\!-\beta$", e non "$\alpha\to\beta$ se e solo se $\alpha|\!-\beta$". Così viene messo in evidenza come il teorema di deduzione leghi la deduzione di una formula di tipo implica ad un'altra deduzione, e non sia un trasferimento all'implicazione di significati consequenziali che restano propri della deduzione. Lo stesso fatto, per certi versi antiintuitivo, che una implicazione sia vera quando l'antecedente è falso è una indicazione che nell'implicazione non ci sono aspetti di consequenzialità: se ci fossero non avrebbe senso partire da un antecedente falso. Che una implicazione sia vera quando l'antecedente è falso risulta invece del tutto consono alle aspettative se l'implicazione è vista come una operazione che descrive una situazione complessa facendo riferimento alle descrizioni di situazioni più semplici che si combinino in un certo modo: quel modo di combinarsi deve rendere conto di tutte le possibilità che si presentano per le componenti, in questo senso si usa dire che i connettivi, ed anche l'implicazione, hanno un carattere vero funzionale.
Si osservi che sia nella dimostrazione di $\alpha\to\alpha$ che nel mostrare il teorema di deduzione gli unici assiomi espressamente utilizzati sono assiomi del tipo Ax. 1. o Ax. 2..

Ottenuto il teorema di deduzione si può vedere come esso può essere utilizzato per ottenere dimostrazioni e deduzioni. Gli esempi che seguiranno non sono solo un esercizio fine a sè stesso, ma serviranno successivamente nello sviluppo della presentazione.

Come primo esempio si è interessati ad una dimostrazione di $\neg\neg\alpha\to\alpha$. Anzitutto, per il teorema di deduzione, ciò è equivalente a mostrare che $\neg\neg\alpha|\!-\alpha$. La seguente successione finita di formule è una deduzione di α da $\neg\neg\alpha$ per i motivi segnati a margine.

$(\neg\alpha\to\neg\alpha)\to((\neg\alpha\to\neg\neg\alpha)\to\alpha)$	Ax. 3. con $\neg\alpha$ al posto di β.
$\neg\neg\alpha\to(\neg\alpha\to\neg\neg\alpha)$	Ax. 1. con $\neg\alpha$ al posto di β e $\neg\neg\alpha$ al posto di α.
$\neg\neg\alpha$	Premessa
$\neg\alpha\to\neg\neg\alpha$	MP 2,3
$\neg\alpha\to\neg\alpha$	Risultato già ottenuto (inseribile in base al teorema di transitività di $\vdash$)
$(\neg\alpha\to\neg\neg\alpha)\to\alpha$	MP 1,5
α	MP 6,4

Come secondo esempio si vuol esibire una deduzione di $\neg\neg\alpha$ da α: essa può essere formata dalla seguente successione per i motivi segnati a margine.

$(\neg\neg\neg\alpha\to\alpha)\to((\neg\neg\neg\alpha\to\neg\alpha)\to\neg\neg\alpha)$	Ax. 3. con $\neg\alpha$ al posto di β e con $\neg\neg\alpha$ al posto di α.
$\alpha\to(\neg\neg\neg\alpha\to\alpha)$	Ax. 1.
α	Premessa
$\neg\neg\neg\alpha\to\alpha$	MP 2,3
$(\neg\neg\neg\alpha\to\neg\neg\alpha)\to\neg\neg\alpha$	MP 1,4
$\neg\neg\neg\alpha\to\neg\alpha$	Risultato già ottenuto (inseribile in base al teorema di transitività di $\vdash$)
$\neg\neg\alpha$	MP 5,6

Come terzo esempio ecco una deduzione di α da $\{\beta , \neg\beta\}$.

$(\neg\alpha\to\beta)\to((\neg\alpha\to\neg\beta)\to\alpha)$	Ax. 3.
$\beta\to(\neg\alpha\to\beta)$	Ax. 1.
β	Premessa
$\neg\alpha\to\beta$	MP 2,3
$(\neg\alpha\to\neg\beta)\to\alpha$	MP 1,4
$\neg\beta\to(\neg\alpha\to\neg\beta)$	Ax. 1
$\neg\beta$	Premessa
$\neg\alpha\to\neg\beta$	MP 6,7
α	MP 5,8

Il quarto esempio vuole mostrare sintatticamente l'equivalenza di una affermazione con la sua contronominale. Si esibirà una deduzione di $\alpha\to\beta$ da $\neg\beta\to\neg\alpha$. Per il teorema di deduzione, mostrare che $\neg\beta\to\neg\alpha\vdash\alpha\to\beta$ equivale a mostrare che $\{\neg\beta\to\neg\alpha,\alpha\}\vdash\beta$, e la seguente è una tale deduzione.

$\alpha\to(\neg\beta\to\alpha)$	Ax. 1.
α	Premessa
$\neg\beta\to\alpha$	MP 1,2
$(\neg\beta\to\alpha)\to((\neg\beta\to\neg\alpha)\to\beta)$	Ax. 3.
$(\neg\beta\to\neg\alpha)\to\beta$	MP 3,4
$\neg\beta\to\neg\alpha$	Premessa
β	MP 5,6

L'altra direzione dell'equivalenza, e cioè che $\neg\beta\to\neg\alpha$ si deduce da $\alpha\to\beta$, può essere ricondotta, per il teorema di deduzione, a mostrare che $\{\alpha\to\beta,\neg\beta\}\vdash\neg\alpha$, ma, per arrivare a questo risultato, è opportuno far prima vedere che da $\{\alpha\to\beta,\neg\neg\alpha\}$ si deduce $\neg\neg\beta$. Di fatto si sa già che c'è una deduzione D di α da $\neg\neg\alpha$, e una deduzione D' di $\neg\neg\beta$ da β, sicché la deduzione D'' da $\{\alpha\to\beta,\neg\neg\alpha\}$ che si cerca può essere così ottenuta: si inizia con la successione D che termina con α, a cui si fanno seguire le formule $\alpha\to\beta$ perché è una premessa e β per modus ponens tra le ultime due, poi si mettono tutte le formule di D' meno le occorrenze di β, giustificando la presenza delle successive formule di D' ottenute per modus ponens, usando anche un'occorrenza di β che è stata tolta, con il fatto che β è già precedentemente nella deduzione D'' che si sta costruendo. E' immediato che D'' è una deduzione da $\{\alpha\to\beta,\neg\neg\alpha\}$ e che la sua ultima formula è $\neg\neg\beta$, come volevasi. Per il teorema di deduzione, il risultato ottenuto può essere visto anche così: esiste una deduzione D* che giustifica l'affermazione $\alpha\to\beta\vdash\neg\neg\alpha\to\neg\neg\beta$.

Tornando all'altra direzione della contronominale, la seguente è una deduzione di $\neg\alpha$ da $\{\alpha\to\beta,\neg\beta\}$.

$\neg\beta\to(\neg\neg\alpha\to\neg\beta)$	Ax. 1.	
$\neg\beta$	Premessa	
$\neg\neg\alpha\to\neg\beta$	MP 1,2	
$(\neg\neg\alpha\to\neg\beta)\to((\neg\neg\alpha\to\neg\neg\beta)\to\neg\alpha)$	Ax. 3.	
$(\neg\neg\alpha\to\neg\neg\beta)\to\neg\alpha$	MP 3,4	
$\alpha\to\beta$	Premessa	
...		
...		D*
...		
$\neg\neg\alpha\to\neg\neg\beta$		
$\neg\alpha$	MP 6,precedente	

Come quinto esempio si cercherà di far vedere che $\wedge\alpha\beta\vdash\alpha$. Si è già detto che nel presente contesto è opportuno adottare come connettivi del linguaggio $\neg$ e $\to$, sicché $\wedge\alpha\beta$ va considerato come una abbreviazione, e precisamente della formula $\neg\to\alpha\neg\beta$ ($\neg(\alpha\to\neg\beta)$ nella notazione con le parentesi). Così ciò che si vuol far vedere diviene $\neg(\alpha\to\neg\beta)\vdash\alpha$. Per il teorema di deduzione ciò equivale ad affermare che $\neg(\alpha\to\neg\beta)\to\alpha$ è dimostrabile. Si è già visto che la contronominale di una formula è dimostrabile se e solo se quella formula è dimostrabile, per cui il problema si trasforma equivalentemente nel seguente: $\vdash \neg\alpha\to(\alpha\to\neg\beta)$. Per il teorema di deduzione ciò equivale successivamente a $\neg\alpha\vdash \alpha\to\neg\beta$ e a $\neg\alpha,\alpha\vdash \neg\beta$. Ma l'ultima formulazione è corretta pereché è proprio quanto si è mostrato nel terzo esempio.

Analogo è il modo per far vedere che $\wedge\alpha\beta\vdash\beta$. Ciò vuol dire mostrare che $\neg(\alpha\to\neg\beta)\to\beta$ è dimostrabile e, quindi, per contronominale e teorema di deduzione, mostrare che $\neg\beta\vdash \alpha\to\neg\beta$. Con un ulteriore passaggio alla contronominale ciò vuol dire mostrare che $\neg\beta\vdash \beta\to\neg\alpha$, ossia, ancora per il teorema di deduzione, che $\neg\beta,\beta\vdash\neg\alpha$, il che è proprio così per quanto visto nel terzo esempio.

Come sesto esempio si vuol mostrare che $\alpha\vdash\neg\wedge\neg\alpha\neg\beta$ e $\beta\vdash\neg\wedge\neg\alpha\neg\beta$. Con altra notazione queste affermazioni corrispondono rispettivamente a $\alpha\vdash \alpha\vee\beta$ e a $\beta\vdash \alpha\vee\beta$, oppure a $\alpha\vdash \neg\alpha\to\beta$ e a $\beta\vdash \neg\alpha\to\beta$. Ma, per il teorema di deduzione,. $\alpha\vdash \neg\alpha\to\beta$ equivale a $\alpha,\neg\alpha\vdash \beta$, che si sa essere corretta per il terzo esempio. Per mostrare l'altra affermazione conviene far ricorso alla contronominale, cioè a $\beta\vdash \neg\beta\to\alpha$, che , ancora per il teorema di deduzione, equivale a mostrare che $\beta,\neg\beta\vdash \alpha$, che si sa essere corretta sempre per il terzo esempio.

Una delle difficoltà indicate nel ridurre le regole al solo modus ponens e ad assiomi consisteva nell'incapacità di trovare un modo di esprimere la regola $R^{v}\forall$ tenendo conto delle limitazioni che riguardano il termine su cui la regola si appoggia. Nell'introdurre i nuovi assiomi si è prestata attenzione a questo problema, in particolare con gli assiomi del tipo Ax. 4., Ax. 5. e Ax.10.. Ora si vuol mostrare che nel sistema costruito ci sono procedure che possono prendere il posto della regola $R^{v}\forall$, riuscendo anche a precisare, in modo diverso, come tener conto delle limitazioni sul termine caratteristico della regola. Allo scopo si dimostra il seguente

Teorema di generalizzazione. Se x è una variabile che non occorre libera in Φ, data una deduzione D di α da Φ, c'è un'altra deduzione D' di $\forall x\alpha$ da Φ tale che 1) x non occorre libera in D', e 2) ogni variabile che ha occorrenze libere in D' ha anche occorrenze libere in D.

DIMOSTRAZIONE. Si mostrerà questo risultato per induzione sulla lunghezza della deduzione D. Se la lunghezza è 1, D è una successione con una sola formula φ_1 che, per essere in una deduzione, dovrà essere o un assioma o una premessa. Nel primo caso la deduzione D' sarà $\forall x\varphi_1$ che è pure un assioma del tipo Ax. 10.. Nel secondo caso, dal momento che φ_1 appartiene a Φ, la variabile x non può occorrere libera in φ_1, sicché la formula $\varphi_1\to(\forall x\varphi_1)$ è un assioma del tipo Ax. 5., e la seguente successione di formule, in cui l'ultima formula è ottenuta dalle precedenti per modus ponens, è la deduzione cercata da Φ

φ_1
$\varphi_1 \to (\forall x \varphi_1)$
$\forall x \varphi_1$

Si noti come la variabile x non occorra libera in queste deduzioni e come le variabili che occorrono libere in queste deduzioni lo siano anche in φ_1, cioè in D.

Completata la base dell'induzione, si consideri ora il passo, e sia D una deduzione di lunghezza i+1 da Φ che termina con la formula φ_{i+1}, e D_0 il suo tratto iniziale di lunghezza i. Per ipotesi induttiva ci sarà una deduzione D_0', che corrisponde a D_0, in cui, eventualmente oltre altre formule, ci sono le formule $\forall x \varphi_j$ per ogni formula φ_j di D che rispettano le richieste sulle variabili precisate nell'enunciato di questo teorema. Si devono considerare tre casi: o 1) φ_{i+1} è un assioma, o 2) φ_{i+1} è una formula di Φ, o 3) φ_{i+1} è ottenuta da formule precedenti, φ_h e φ_k che è $\varphi_h \to \varphi_{i+1}$, in D mediante modus ponens. Nei primi due casi si aggiungono alla fine della deduzione D_0' le formule rispettivamente viste per il passo base in relazione agli stessi casi. Rimane da considerare il terzo caso. Ora, per ipotesi induttiva, le formule $\forall x \varphi_h$ e $\forall x(\varphi_h \to \varphi_{i+1})$ sono in D_0'. La deduzione D' si ottiene aggiungendo alla fine di D_0' le seguenti formule

$(\forall x(\varphi_h \to \varphi_{i+1})) \to ((\forall x \varphi_h) \to (\forall x \varphi_{i+1}))$,
$(\forall x \varphi_h) \to (\forall x \varphi_{i+1})$
$\forall x \varphi_{i+1}$

D' è la deduzione cercata poiché la prima di queste formule è un assioma del tipo Ax. 4., la seconda è ottenuta per modus ponens dalla prima delle aggiunte e da $\forall x(\varphi_h \to \varphi_{i+1})$, e la terza è ottenuta ancora per modus ponens dalla seconda delle aggiunte e da $\forall x \varphi_h$, ed inoltre x non occorre libera neppure in queste formule, ed anche le variabili che occorrono libere in queste formule occorrono libere pure in D. Ciò conclude questo caso, il passo dell'induzione e la dimostrazione del presente teorema.

Come si diceva prima di enunciare il teorema precedente, questo permette di avere uno strumento corrispondente alla regola $R^{\vee}\forall$ nel senso che, se si ha una deduzione di α da Φ, e se x non occorre libera in α o in Φ (e questo è il nuovo modo di esprimere la limitazione che era presente nella regola $R^{\vee}\forall$), allora c'è anche una (altra) deduzione di $\forall x \alpha$ da Φ.

Il teorema appena dimostrato ha delle facili e rilevanti conseguenze che ora andranno esplicitate.

Corollario. Se esite una deduzione di α da Φ, allora esiste anche una deduzione di α da Φ in cui le variabili che hanno occorrenze libere sono quelle che hanno occorrenze libere o in α o in Φ.

DIMOSTRAZIONE. Le variabili che hanno occorrenze libere in una deduzione sono in numero finito dal momento che una deduzione è una successione finita, con prescritte caratteristiche, di formule le quali, a lor volta, sono particolari successioni finite di simboli. Se x è una variabile che non ha occorrenze libere o in α o in Φ, si cercherà di passare da una deduzione di α da Φ che abbia occorrenze libere di x a una deduzione ancora di α da Φ ma senza occorrenze libere di x. Infatti, per il teorema precedente, esiste una deduzione D' di $\forall x \alpha$ da Φ in cui non occorre libera la variabile x. Si ottiene una nuova deduzione D'' prolungando la deduzione D' aggiungendo le formule $\forall x \alpha \to \alpha$ la cui presenza nella nuova deduzione è giustificata perché è un assioma di tipo Ax. 6. ($\alpha(x/t)$ è proprio α perché x non occorre libera in α), e α ottenuta per modus ponens dalle ultime due. Si osservi che anche in D'' la variabile x non ha occorrenze libere. Così le variabili che hanno occorrenze libere in una deduzione di α da Φ, ma non hanno occorrenze libere in α o in Φ, possono essere eliminate una alla volta passando ad altre deduzioni sempre di α da Φ, fino ad arrivare ad una deduzione α da Φ senza tali variabili, come si voleva.

Come caso particolare del precedente corollario si ha

Corollario. Se un enunciato α è deducibile da un insieme di enunciati Φ allora c'è una deduzione di α da Φ costituita da soli enunciati.

Un risultato analogo a quello stabilito dal precedente teorema è il seguente

Teorema di generalizzazione sui simboli di costante. Si supponga che $\Phi|-\alpha(x/c)$, dove c è un simbolo di costante non occorrente in Φ. Allora $\Phi|-\forall z\alpha(x/z)$ per una opportuna variabile z.

DIMOSTRAZIONE. D sia una deduzione di $\alpha(x/c)$ da Φ. Sia Φ_0 il sottinsieme finito di Φ costituito dalle formule di Φ che occorrono in D, e z sia una variabile che non occorre libera in D (sicuramente c'è perché D ha un insieme finito di formule che sono successioni finite di simboli, e le variabili sono infinite). Sia D' la successione di formule ottenuta dalla successione D sostituendo z al posto di c in ciascuna delle formule di D. Così facendo si ottiene ancora una deduzione D' da Φ_0 poiché la sostituzione indicata muta assiomi in assiomi, formule di Φ_0 in sè stesse (poiché in esse non occorre c), e le formule ottenute per modus ponens in formule ottenute per modus ponens dalle corrispondenti. Così $\Phi_0|-\alpha(x/z)$, e z non occorre libera in Φ_0. Per il teorema di generalizzazione, c'è anche una deduzione di $\forall z\alpha(x/z)$ da Φ_0. Infine, poiché $\Phi\supseteq\Phi_0$, si può concludere che $\Phi|-\forall z\alpha(x/z)$.

Forse è opportuno un commento sull'Ax. 6., che è stato utilizzato poco fa. In esso c'è la sottoformula $\alpha(x/t)$ con nessuna precisazione ulteriore su chi è il termine t. t potrebbe non essere libero per x in α, e, in tal caso, si sa che, per evitare cattura di variabili, con la scrittura $\alpha(x/t)$ si intende la nuova formula che si ottiene da α eseguendo prima dei cambi alfabetici che diano una variante α' di α in cui t è libero per x, e poi eseguendo la sostituzione $\alpha'(x/t)$. Si è già visto che tutta questa procedura dal punto di vista semantico non provoca problemi grazie alla equivalenza logica tra formule e loro varianti. Ma ora, con gli assiomi e il modus ponens, si sta affrontando un aspetto sintattico e sorge naturale la domanda se sono equideducibili una formula e una sua variante, dove per equideducibili si indende che una può essere dedotta dall'altra e viceversa. La risposta sarà affermativa come conseguenza del

Teorema di sostituzione di sottoformule equideducibili. Sia α una sottoformula di β, e siano α e α' formule equideducibili. Sia β' la formula che si ottiene da β sostituendo in essa le occorrenze della sottoformula α con la formula α'. Allora β e β' sono equideducibili.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione si svolge per induzione sulla costruzione della formula β a partire da α. In questo contesto in cui la regola scelta, il modus ponens, usa il connettivo $\rightarrow$ e gli assiomi sono pure formulati con riferimento a detto connettivo, nel considerare i passi di construzione di una formula, è conveniente assumere che i due connettivi, da cui si possono ottenere tutti gli altri come abbreviazioni di espressioni che usano quei due, siano $\neg$ e $\rightarrow$.

Se β è α, allora β' è α', e pertanto β e β' sono equideducibili, e così si è mostrata la correttezza della base dell'induzione.

Si supponga ora che β sia $\neg\gamma$ e che, per ipotesi induttiva, il risultato valga per γ, cioè che γ e γ' sono equideducibili con γ' ottenuta da γ sostituendo le sottoformule α di γ con α'. Per pervenire alla equideducibilità di β e β' bisogna dimostrare che $\neg\gamma|-\neg\gamma'$ e che $\neg\gamma'|-\neg\gamma$.

Infatti, dall'ipotesi che $\gamma'|-\gamma$, per il teorema di deduzione, si ha che $|-\gamma'\rightarrow\gamma$, sicché, passando alla contronominale, si ha che $|-\neg\gamma\rightarrow\neg\gamma'$, e, ancora per il teorema di deduzione, si perviene a $\neg\gamma|-\neg\gamma'$. Analogamente, $\neg\gamma'|-\neg\gamma$ si ottiene a partire da $\gamma|-\gamma'$.

Si supponga poi che β sia $\gamma_1\rightarrow\gamma_2$ e che, per ipotesi induttiva, il risultato valga per entrambe γ_1 e γ_2, cioè che γ_1 e γ_1' sono equideducibili con γ_1' ottenuta da γ_1 sostituendo le sottoformule α di γ_1 con α', e che γ_2 e γ_2' sono equideducibili con γ_2' ottenuta da γ_2 sostituendo le sottoformule α di γ_2 con α'. Per pervenire alla equideducibilità di β e β' bisogna dimostrare che $\gamma_1\rightarrow\gamma_2|-\gamma_1'\rightarrow\gamma_2'$ e che $\gamma_1'\rightarrow\gamma_2'|-\gamma_1\rightarrow\gamma_2$. Per il teorema di deduzione, le ultime due affermazioni equivalgono rispettivamente a $\{\gamma_1\rightarrow\gamma_2,\gamma_1'\}|-\gamma_2'$ e $\{\gamma_1'\rightarrow\gamma_2',\gamma_1\}|-\gamma_2$. La prima può essere giustificata dalla seguente deduzione: si inizia con la deduzione che dalla premessa γ_1' fa ottenere γ_1, poi si aggiungono la premessa $\gamma_1\rightarrow\gamma_2$ e la formula γ_2 ottenuta per modus ponens dalle ultime due, e si conclude con la deduzione di γ_2' da γ_2. La seconda affermazione si giustifica in modo analogo.

Si consideri ora il caso che β sia $\forall x\gamma$ e che, per ipotesi induttiva, il risultato valga per γ, cioè che γ e γ' sono equideducibili con γ' ottenuta da γ sostituendo le sottoformule α di γ con α'. Per pervenire alla equideducibilità di β e β' bisogna dimostrare che $\forall x\gamma|-\forall x\gamma'$ e che $\forall x\gamma'|-\forall x\gamma$. La prima affermazione può essere giustificata dalla seguente deduzione:

si inizia con la premessa $\forall x\gamma$ seguita dall'assioma 6 $\forall x\gamma\rightarrow\gamma$, e da queste due, per modus ponens si ottiene e si aggiunge γ, poi si fa seguire la deduzione che da γ porta a γ', sicché si può affermare che c'è anche una deduzione di $\forall x\gamma'$ da $\forall x\gamma$ per generalizzazione poiché la variabile x non occorre libera nelle premesse. Analoga è l'altra deduzione che porta giustificare per intero quanto si era dichiarato.

Così si sono provati tutti i casi del passo dell'induzione e questa è completa, e il teorema è provato.

Dal teorema appena dimostrato segue il

Corollario. Una variante di una formula e la formula stessa sono equideducibili.

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione si sviluppa per induzione sulla complessità della formula φ. I casi in cui φ è atomica o negazione di una formula o implicazione tra due formule è banale mostrare la equideducibilità con una sua variante proprio per la definizione di variante in questi casi. Sicché resta da considerare il caso in cui φ sia $\forall x\alpha$. Una sua variante è del tipo $\forall y\alpha'(x/y)$, dove α' è una variante di α e y è libera per x in α' e non vi occorre libera. Bisogna far vedere che $\forall x\alpha|\!-\forall y\alpha'(x/y)$ e che $\forall y\alpha'(x/y)|\!-\forall x\alpha$. Poiché il passaggio da una formula ad una sua variante è reversibile, basta giustificare una delle due affermazioni. Da $\forall x\alpha$ e dall'assioma 6 $\forall x\alpha\rightarrow\alpha(x/y)$ segue $\alpha(x/y)$ per modus ponens. Così $\forall x\alpha|\!-\alpha(x/y)$. Per ipotesi induttiva si ha che $\alpha(x/y)|\!-\alpha'(x/y)$, da cui segue che $\forall x\alpha|\!-\alpha'(x/y)$ per la transitività di $|\!-$. Poiché y non occorre libera in $\forall x\alpha$, per il teorema di generalizzazione, si ha che $\forall x\alpha|\!-\forall y\alpha'(x/y)$.

Si noti che, per il teorema di deduzione e poiché $\{\alpha,\beta\}|\!-\ \alpha\wedge\beta$ (come si dimostrerà alla fine di questa sezione, ma in modo indipendente) due formule, φ_1 e φ_2, sono equideducibili se e solo se $|\!-\ \varphi_1\leftrightarrow\varphi_2$ (si ricordi che $\varphi_1\leftrightarrow\varphi_2$ è una abbreviazione di $(\varphi_1\rightarrow\varphi_2)\wedge(\varphi_2\rightarrow\varphi_1)$).

Finora si sono usati i vari assiomi eccetto quelli che riguardano il predicato =, cioè gli assiomi 7., 8., 9.. Si vuole ora mostrare come questi assiomi entrino in gioco per dedurre le proprietà dell'uguaglianza.

La formula del linguaggio $\forall x(x=x)$ (che è vera in ogni interpretazione con = simbolo logico per la riflessività dell'uguaglianza) è dimostrabile: è infatti una istanza dell'Ax. 10. una volta notato che x=x è un esempio dell'Ax. 7..

La formula del linguaggio $\forall x\forall y(x=y\rightarrow y=x)$ (che è vera in ogni interpretazione con = simbolo logico per la simmetria dell'uguaglianza) è dimostrabile: infatti dall'Ax. 9., nella forma $x=y\rightarrow(x=x\rightarrow y=x)$, grazie al il teorema di deduzione si passa a $x=y|\!-x=x\rightarrow y=x$, e da qui, poiché x=x è un assioma e applicando il modus ponens, si può affermare che $x=y|\!-y=x$, donde, sempre per il teorema di deduzione $|\!-\ x=y\rightarrow y=x$, ed infine applicando due volte il teorema di generalizzazione si perviene alla dimostrazione cercata.

La formula del linguaggio $\forall x\forall y\forall z(x=y\rightarrow(y=z\rightarrow x=z))$ (che è vera in ogni interpretazione con = simbolo logico per la transitività dell'uguaglianza) è dimostrabile: infatti si è appena visto che $x=y|\!-y=x$. Da ciò e dall'Ax. 8. nella forma $y=x\rightarrow(y=z\rightarrow x=z)$ per modus ponens si ottiene che $x=y|\!-y=z\rightarrow x=z$. Usando il teorema di deduzione si ha $x=y\rightarrow(y=z\rightarrow x=z)$, e si perviene alla conclusione generalizzando tre volte.

Primo teorema di sostituzione. Si supponga che t sia un termine in cui possono esserci delle occorrenza della variabile x; si indichino con t(x/t') e con t(x/t'/t'') i termini ottenuti da t il primo sostituendo alla variabile x il termine t' e il secondo sostituendo alla variabile x a volte t' e a volte t''. Allora risulta che $t'=t''|\!-\ t(x/t')=t(x/t'/t'')$.

DIMOSTRAZIONE. L'argomento si svolge per induzione sulla costruzione del termine t. Se t è una costante o una variabile diversa da x, allora t(x/t') e t(x/t'/t'') sono lo stesso termine t e la formula t=t è un assioma e quindi deducibile da qualsiasi insieme di premesse. Se t è proprio la variabile x, allora t(x/t') è t' e t(x/t'/t'') è o t' o t'': nel primo caso si conclude come prima, nell'altro chiaramente la formula t'=t'' si deduce da t'=t''. Si supponga ora che il termine t sia del tipo $ft_1...t_n$ (per cui t(x/t') è $ft_1(x/t')...t_n(x/t')$ e t(x/t'/t'') è $ft_1(x/t'/t'')...t_n(x/t'/t'')$) e che da t'=t'' si possano dedurre le formule $t_1(x/t')= t_1(x/t'/t'')$, ..., $t_n(x/t')=t_n(x/t'/t'')$. Da queste ultime uguaglianze e dall'assioma Ax. 8. applicando ripetutamente il modus ponens si deduce $ft_1(x/t')...t_n(x/t')=ft_1(x/t'/t'')..\,.t_n(x/t'/t'')$, ovvero $t(x/t')=t(x/t'/t'')$, come si voleva.

Secondo teorema di sostituzione. Si supponga che φ sia una formula in cui possono esserci delle occorrenza della variabile x; si indichino con $\varphi(x/t')$ e con $\varphi(x/t'/t'')$ le formule ottenute da φ il primo sostituendo alla variabile x il termini t' e il secondo sostituendo alla variabile x delle volte t' e delle volte t''. Allora risulta che $t'=t''|\!-\varphi(x/t')\rightarrow\varphi(x/t'/t'')$.

DIMOSTRAZIONE. L'argomento si svolge per induzione sulla costruzione della formula φ. Sia φ la formula atomica $Pt_1...t_n$. La formula $\varphi(x/t')$ sarà $Pt_1(x/t')...t_n(x/t')$. Per il primo teorema di sostituzione da $t'=t''$ si possono dedurre tutte le formule $t_1(x/t')=t_1(x/t'/t''),...,t_n(x/t')=t_n(x/t'/t'')$. Da queste e dall'Ax.9. nella forma $(t_1(x/t')= t_1(x/t'/t'')\rightarrow(...\rightarrow(t_n(x/t')=t_n(x/t'/t'')\rightarrow(Pt_1(x/t')...t_n(x/t')\rightarrow Pt_1(x/t'/t'')...t_n(x/t'/t'')))\ ...\ ))$ con n applicazioni del modus ponens segue che da $t'=t''$ si deduce $Pt_1(x/t')...t_n(x/t')\rightarrow Pt_1(x/t'/t'')...t_n(x/t'/t'')$ che è $\varphi(x/t')\rightarrow\varphi(x/t'/t'')$.

Il passo dell'induzione, nei vari casi, si prova controllando che dall'ipotesi induttiva segue immediatamente la conclusione per mezzo di una facile applicazione del teorema di sostituzione di sottoformule equideducibili.

E' immediato che se $\Phi|\!-\alpha$ allora l'insieme $\Phi\cup\{\neg\alpha\}$ è non soddisfacibile perché da $\Phi\cup\{\neg\alpha\}$ si possono dedurre sia α che $\neg\alpha$, che devono essere entrambe conseguenze logiche di $\Phi\cup\{\neg\alpha\}$ per il teorema di validità, e ciò può essere solo se $\Phi\cup\{\neg\alpha\}$ è non soddisfacibile.

Si è pervenuti alla non soddisfacibilità di un insieme nel caso che da questo si possano dedurre sia una formula che la sua negazione.

Questa nozione diventa importante, perché potrebbe divenire una nuova caratterizzazione sintattica della non soddisfacibilità, e così le si dà un nome.

Si dirà **non consistente** un insieme di formule da cui si possano dedurre sia una formula che la sua negazione. **Consistente** sarà detto un insieme di formule che non è non consistente.

Generalizzando quando detto nel caso particolare, dal teorema di validità segue
Corollario di validità. Un insieme non consistente non è soddisfacibile.

Gli insiemi di formule non consistenti sono caratterizzati dal fatto che da essi si può dedurre ogni formula. Ciò è precisato nel seguente

Teorema. L'insieme di formule Φ è non consistente se e solo se per ogni formula α si ha che $\Phi|\!-\alpha$.

DIMOSTRAZIONE. In una direzione è banale: se da Φ si può dedurre qualsiasi formula, in particolare si potrà dedurre una certa formula e che la sua negazione.

Per l'altra direzione, si supponga che ci sia una formula β tale che $\Phi|\!-\beta$ ed anche $\Phi|\!-\neg\beta$. Poiché per il teorema di deduzione e per transitività di |-, (ripetendo quanto si è già visto nella dimostrazione che ex falso sequitur quodlibet) dai due assiomi di tipo1 $\beta\rightarrow(\neg\alpha\rightarrow\beta)$ e $\neg\beta\rightarrow(\neg\alpha\rightarrow\neg\beta)$ segue che $\Phi|\!-\neg\alpha\rightarrow\beta$ ed anche $\Phi|\!-\neg\alpha\rightarrow\neg\beta$, applicando due volte il modus ponens all'assioma di tipo 3 $(\neg\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow((\neg\alpha\rightarrow\neg\beta)\rightarrow\alpha)$, prima con $\neg\alpha\rightarrow\beta$ e poi a quello che resta con $\neg\alpha\rightarrow\neg\beta$, si perviene ad α che è così dedotta da Φ.

Il legame tra non consistenza e deducibilità è molto stretto come è indicato dal seguente

Teorema. $\Phi|\!-\alpha$ se e solo se $\Phi\cup\{\neg\alpha\}$ è non consistente.

DIMOSTRAZIONE. La direzione da sinistra a destra è già stata mostrata nell'ottenere che, nella stessa ipotesi, $\Phi\cup\{\neg\alpha\}$ è non soddisfacibile.

Per mostrare l'altra direzione si osservi che l'ipotesi afferma che, per qualche formula β, $\Phi\cup\{\neg\alpha\}|\!-\beta$ e $\Phi\cup\{\neg\alpha\}|\!-\neg\beta$. Ma si vorrebbe arrivare a dedurre qualcosa da Φ, cioè si vogliono ridurre le premesse, e per far ciò si dispone proprio del teorema di deduzione. In base a questo le ipotesi divengono $\Phi|\!-\neg\alpha\rightarrow\beta$ e $\Phi|\!-\neg\alpha\rightarrow\neg\beta$. Si può allora costruire una nuova deduzione da Φ facendo seguire alle due deduzioni indicate l'assioma 3 $(\neg\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow((\neg\alpha\rightarrow\neg\beta)\rightarrow\alpha)$ e poi la formula $(\neg\alpha\rightarrow\neg\beta)\rightarrow\alpha$ ottenuta per modus ponens dalla precedente e dalla conclusione della prima deduzione inserita in questa, ed infine la formula α ottenuta per modus ponens dalla precedente formula e dalla conclusione della seconda deduzione che è inserita in questa.

Questo teorema può anche essere usato per mostrare l'esistenza di certe deduzioni. Ad esempio, si vuol mostrare che $\{\alpha,\beta\}|\!- \wedge\alpha\beta$, che è una abbreviazione di $\{\alpha,\beta\}|\!-\neg(\alpha\rightarrow\neg\beta)$. Per il teorema appena dimostrato ciò è equivalente a mostrare che $\{\alpha,\beta,\alpha\rightarrow\neg\beta\}$ è non consistente, e questo è corretto perché da α e $\alpha\rightarrow\neg\beta$ si ottiene $\neg\beta$, per modus ponens, sicché da $\{\alpha,\beta,\alpha\rightarrow\neg\beta\}$ si deducono sia la formula β che la sua negazione $\neg\beta$.

38. LA COMPLETEZZA DEL CALCOLO PREDICATIVO.

Si è visto che i teoremi, cioè le formule dimostrabili, sono valide, le formule deducibili da un insieme di formule sono conseguenze logiche di quell'insieme di formule, gli insiemi di formule non consistenti sono non soddisfacibili. Tutti questi risultati, che sono stati ricapitolati nel teorema di validità, seguono dal fatto che il modus ponens preserva la verità in una realizzazione, e che assiomi e premesse sono vere nelle realizzazioni che rendono vere le premesse. Inoltre detti risultati mostrano che il controllo sintattico basato sulle deduzioni porta a risultati corretti, ma sarebbe bello, e questo era l'obiettivo nell'architettare questo metodo ed in particolare nel determinare gli assiomi, che fosse anche completo, cioè che ogni formula valida fosse un teorema, che ogni conseguenza logica di un insieme di formule fosse deducibile da quell'insieme, che ogni insieme non soddisfacibile fosse non consistente, brevemente che per i risultati del teorema di validità valesse un se e solo se.

Si era già notato a suo tempo come, da un punto di vista semantico, la validità, la conseguenza logica e la non soddisfacibilità fossero strettamente legate e si potesse determinare una di queste nozioni facendo ricorso ad un'altra ($|\!=\alpha$ se e solo se $\varnothing|\!=\alpha$, $\Phi\cup\{\alpha\}|\!=\beta$ se e solo se $\Phi|\!=\alpha\rightarrow\beta$, $\Phi|\!=\alpha$ se e solo se $\Phi\cup\{\neg\alpha\}$ è non soddisfacibile).

Ma si è anche visto che valgono i corrispondenti legami tra le nozioni sintattiche collegate a quelle semantiche menzionate ($|\!-\alpha$ se e solo se $\varnothing|\!-\alpha$, $\Phi\cup\{\alpha\}|\!-\beta$ se e solo se $\Phi|\!-\alpha\rightarrow\beta$, $\Phi|\!-\alpha$ se e solo se $\Phi\cup\{\neg\alpha\}$ è non consistente).

Così per giungere alla completezza dei rapporti tra le nozioni semantiche e quelle sintattiche collegate basta stabilirla per una di queste nozioni che immediatamente si estende alle altre visti i legami sopra ricordati. Di fatto si cercherà di mostrare che se un insieme di formule è non soddisfacibile allora è non consistente.

Questa affermazione sarà studiata nella forma contronominale, e cioè si cercherà di mostrare che un insieme consistente è soddisfacibile. Il motivo di questa scelta è che esse richiede di costruire una realizzazione che renda vere tutte le formule di un insieme consistente, mentre negli altri casi si dovrebbero analizzare tutte le realizzazioni, eventualmente tutte le realizzazioni di una certa famiglia, e questo compito appare ancora più difficile di quello già complesso di costruire un'opportuna realizzazione.

Fatta questa scelta, si deve cercare di analizzare quali sono le difficoltà che comporta. Un insieme consistente di formule, non permettendo di dedurre una formula e la sua negazione, potrebbe essere soddisfacibile, ma le interpretazioni in cui le sue formule sono vere potrebbero anche essere molte. Questa molteplicità può costituire una difficoltà perché non permette di individuare una singola realizzazione dalla quale partire per mostrare che essa rende vere tutte le formule dell'insieme, come richiesto. Allora si può pensare di aggiungere all'insieme consistente di formule delle altre formule che rendano l'insieme arricchito ancora consistente, ma che determinino meglio quale deve essere la realizzazione in cui sono vere.

Portando questa idea alle estreme conseguenze, si vogliono considerare insiemi consistenti di formule così ricchi che non si può più aggiungere alcuna ulteriore formula senza perdere la consistenza. Ciò può essere precisato nella seguente definizione.

Un insieme di formule è detto **massimale consistente** se è consistente e non è contenuto propriamente in alcun insieme consistente di formule.

Anzitutto è opportuno caretterizzare gli insiemi massimali consistenti. A tale scopo è rilevante il seguente

Teorema. Un insieme di formule è massimale consistente se e solo se è consistente e, per ogni formula, o lei o la sua negazione appartiene all'insieme.

DIMOSTRAZIONE. Si affronti dapprima la direzione più facile da destra a sinistra. Si supponga così di avere un insieme Φ consistente di formule tale che per ogni formula o lei o la sua negazione appartiene all'insieme. Sia Φ' un insieme che contiene propriamente Φ, e sia α una formula di Φ'-Φ. Per la proprietà di Φ, in esso dovrà essere presente la negazione di α, $\neg\alpha$, che sarà anche in Φ'. Così Φ' è non consistente. Per l'arbitrarietà di Φ' questa direzione è dimostrata.

Per mostrare l'altra direzione, si supponga, per assurdo, che ci sia una formula α tale che né lei né la sua negazione appartengono a un insieme massimale consistente Φ. Allora per la massimalità della consistenza di Φ, gli insiemi $\Phi\cup\{\alpha\}$ e $\Phi\cup\{\neg\alpha\}$ sono non consistenti, sicché per quanto visto, si ha che $\Phi|\text{-}\ \neg\alpha$ e che $\Phi|\text{-}\ \alpha$. Da ciò segue che Φ è non consistente, contro l'ipotesi, e l'assurdo prova l'affermazione.

Corollario. Se una formula si deduce da un insieme massimale consistente, allora gli appartiene.

DIMOSTRAZIONE. Infatti, per il teorema appena dimostrato, o la formula α o la sua negazione $\neg\alpha$ appartiene all'insieme massimale consistente Φ. Se fosse $\neg\alpha$, la negazione della formula, ad appartenere all'insieme, allora sia questa che, per ipotesi, la formula α di partenza sarebbero deducibili dall'insieme Φ (sia $\Phi|\text{-}\alpha$ che $\Phi|\text{-}\neg\alpha$), e Φ sarebbe non consistente. Pertanto la formula α appartiene a Φ.

Si noti che il teorema precedente mette bene in luce il fatto che la nozione di massimale consistenza è relativo al linguaggio che si considera. Infatti arricchendo il linguaggio un insieme che era massimale consistente rimane consistente, ma non è più massimale consistente perché nel linguaggio più ricco ci sono altre formule tali che né loro né le loro negazioni appartengono all'insieme.

Si erano introdotti gli insiemi massimali consistenti nel tentativo di precisare al massimo una eventuale interpretazione che renda vere tutte le formule dell'insieme dato.

Si era già visto che insiemi di formule che hanno certe caratteristiche (essere insieme di Hintikka) sono soddisfacibili. Se un insieme massimale consistente fosse un insieme di Hintikka, allora sarebbe soddisfacibile, e si resterebbe con il solo problema di estendere un insieme consistente ad un insieme massimale consistente. Ma le cose non vanno esattamente così come afferma il seguente

Teorema. Un insieme massimale consistente di formule è quasi un insieme di Hintikka, nel senso che soddisfa tutte le clausole di un insieme di Hintikka eccetto quella che riguarda le formule del tipo $\neg\forall$.

DIMOSTRAZIONE. Per provare questo teorema si dovranno controllare, una per una, le varie clausole della definizione di insieme di Hintikka

La prima chiede che nell'insieme non ci siano una formula e la sua negazione. Per un insieme consistente, ed in particolare massimale consistente, deve essere evidentemente così.

Poi se una formula del tipo $\neg\neg\alpha$ appartiene all'insieme deve appartenervi anche la formula α. Ma si è visto che da $\neg\neg\alpha$ si deduce α, e che le formule che si deducono da un insieme massimale consistente gli appartengono. Così anche α appartiene all'insieme.

Ancora se una formula del tipo $\wedge\alpha\beta$ appartiene all'insieme allora anche le formule α e β devono appartenere all'insieme. In questo caso l'argomentazione è del tutto analoga alla precedente poiché si è già visto che $\wedge\alpha\beta|\text{-}\ \alpha$ e che $\wedge\alpha\beta|\text{-}\ \beta$.

Se poi una formula del tipo $\neg\wedge\alpha\beta$ appartiene all'insieme allora almeno una delle due formule $\neg\alpha$ o $\neg\beta$ devono appartenervi. Se nessuna delle due appartenesse, poiché l'insieme è massimale consistente, dovrebbero appartenervi entrambe le loro negazioni $\neg\neg\alpha$ e $\neg\neg\beta$, sicche; l'insieme $\{\neg\wedge\alpha\beta,\neg\neg\alpha,\neg\neg\beta\}$ sarebbe un sottinsieme dell'insieme massimale consistente dato. Ma ciò è impossibile perché l'insieme $\{\neg\wedge\alpha\beta,\neg\neg\alpha,\neg\neg\beta\}$ è non consistente in quanto da $\neg\neg\alpha$ e $\neg\neg\beta$ si possono dedurre rispettivamente α e β e da queste si deduce $\wedge\alpha\beta$,come si è visto alla fine della sezione precedente.

Si deve far anche vedere che se una formula del tipo $\forall x\alpha$ appartiene all'insieme allora, per ogni termine t, la formula $\alpha(x/t)$ appartiene all'insieme. Di fatto, se la formula $\forall x\alpha$ appartiene all'insieme allora applicando il modus ponens a quella formula e all'Ax. 6. da quell'insieme di deduce $\alpha(x/t)$ per il termine t voluto. Ancora, poiché ciò che si deduce da un insieme massimale consistente appartiene all'insieme, anche $\alpha(x/t)$ appartiene all'insieme.

Non si deve considerare la clausola che riguarda le formule del tipo $\neg\forall$ poiché è stata esclusa nell'enunciare questo teorema.

Ovviamente le formule del tipo =tt oppartengono ad un insieme massimale consistente in quanto sono dimostrabili e dunque anche deducibili dall'insieme.

Infine si consideri il caso in cui la formula =t't'' appartenga all'insieme massimale consistente ed anche la formula $\alpha(x/t')$ vi appartenga. Il secondo teorema di sostituzione, grazie al teorema di deduzione, può essere letto anche nel seguente modo: $\{t'=t'', \alpha(x/t')\}\vdash \alpha(x/t'/t'')$. Così la formula $\alpha(x/t'/t'')$ sarà deducibile dall'insieme massimale consistente e, dunque, anche gli apparterrà, e ciò è quanto richiede l'ultima clausola della definizione di insieme di Hintikka.

Il fatto che non si è riusciti a mostrare che un insieme massimale consistente è un insieme di Hintikka, non dipende da una scarsa conoscenza al momento, ma dipende dall'impossibilità di raggiungere un risultato migliore, come il seguente esempio può giustificare. In questo esempio si costruirà un insieme massimale consistente che non è un insieme di Hintikka.

Si consideri una struttura il cui universo è formato da esattamente due elementi, a e b, con la sola relazione di uguaglianza, senza funzioni e senza costanti, $\mathfrak{A}=(\{a,b\},\{=\},\emptyset,\emptyset)$. Fissata l'attribuzione di valori alle variabili $\underline{a}$ che ad ogni variabile assegna l'elemento a, $\underline{a}(v_i)=a$, si consideri la realizzazione $\sigma=(\mathfrak{A},\underline{a})$. Infine si consideri il seguente insieme Σ di formule $\{\varphi: \varphi^\sigma=V\}$. Σ è consistente perché se non lo fosse dovrebbe anche essere non soddisfacibile, per il teorema di validità, ma invece le sue formule sono tutte vere nella realizzazione σ, sicché è soddisfacibile. Inoltre Σ è massimale consistente perché per ogni formula o lei o la sua negazione appartengono a Σ dal momento che o l'una o l'altra è vera nella realizzazione σ. Per mostrare che Σ non è un insieme di Hintikka, si consideri la formula $\neg\forall v_0{=}v_0v_1$. Questa è vera nella realizzazione σ dal momento che σ interpreta v_1 in a ma esiste un altro elemento diverso da a. Così questa formula appartiene all'insieme Σ. Se Σ fosse un insieme di Hintikka, allora ci dovrebbe essere un termine t tale che anche la formula $\neg{=}tv_1$ appartenga a Σ. Ma nel linguaggio adatto a questa struttura i soli termini sono le variabili e σ interpreta ogni variabile in a, sicché $(\neg{=}tv_1)^\sigma=F$ e, per ogni termine t, $\neg{=}tv_1$ non appartiene a Σ. Così Σ non è un insieme di Hintikka.

Ci si può domandare qual'è la causa di questo ostacolo, e si vede immediatamente che, per ogni termine t, la formula $\neg{=}tv_1$ non appartiene a Σ perché non c'è alcun termine che possa essere interpretato nell'elemento b. Ecco allora l'idea, già sfruttata precedentemente proprio per trovare nomi per elementi di cui si asserisce l'esistenza, di arricchire il linguaggio con un numero sufficiente di nuovi simboli di costante da interpretare opportunamente.

Dalle osservazioni sviluppate si vede che, per mostrare che un insieme consistente è soddisfacibile sfruttando la soddisfacibilità degli insiemi di Hintikka, non basta trovare un insieme massimale consistente che lo contenga, ma ci vuole qualcosa di più.

Si chiama **insieme di Henkin** un insieme di formule di un linguaggio $\mathfrak{L}$ che sia massimale consitente e che abbia la seguente ulteriore proprietà: per ogni formula del tipo $\neg\forall x\alpha$ dell'insieme esiste un termine t nel linguaggio $\mathfrak{L}$ tale che la formula $\neg\alpha(x/t)$ appartenga all'insieme.

E' immediato dal risultato precedente e dalla definizione che un insieme di Henkin è un insieme di Hintikka, ed è, quindi, soddisfacibile.

Così, tornando al problema di mostrare che un insieme consistente è soddisfacibile, basterebbe mostrare che esiste un insieme di Henkin, in un linguaggio opportunamente arricchito, che lo contiene. Ciò è quando si vuole ora far vedere.

Anzitutto si deve ricordare che il numero di formule di un linguaggio $\mathfrak{L}$, e di conseguenza anche il numero delle formule del tipo $\neg\forall x\alpha$, è uguale alla cardinalità del linguaggio $\mathfrak{L}$. Ciò ci suggerisce che dovrebbe essere sufficiente passare ad un linguaggio

$\mathfrak{L}$' ottenuto arricchendo il linguaggio $\mathfrak{L}$ con un insieme C di nuovi simboli di constante di cardinalità uguale alla cardinalità di $\mathfrak{L}$. La cardinalità del linguaggio $\mathfrak{L}$' è uguale alla cardinalità del linguaggio $\mathfrak{L}$.

Poi si vuole mostrare il seguente

Teorema per la completezza. Sia Φ un insieme consistente in un linguaggio $\mathfrak{L}$. Sia $\mathfrak{L}$' un linguaggio ottenuto aggiungendo al linguaggio $\mathfrak{L}$ un insieme C di nuovi simboli di costante di cardinalità uguale a quella di $\mathfrak{L}$. Allora esiste un insieme di formule Ψ del linguaggio $\mathfrak{L}$' che è un insieme di Henkin e che contiene Φ.

DIMOSTRAZIONE. Nelle argomentazioni seguenti si farà ricorso ai numeri ordinali per mostrare il risultato a partire da un linguaggio $\mathfrak{L}$ di cardinalità qualsiasi. Se invece il linguaggio $\mathfrak{L}$ fosse numerabile, allora sono sufficienti i numeri naturali che sono un tratto iniziale dei numeri ordinali. Non si introdurrà qui la nozione di numero ordinale, ma si farà riferimento ai manuali nei quali è ampliamente svolta. Si aprirà una parentesi per ricordare solo alcuni aspetti dei numeri ordinali particolarmente rilevanti in questo contesto.

I numeri ordinali vogliono rappresentare i tipi di buon ordine di insiemi anche infiniti (un insieme è bene ordinato se c'è una relazione binaria su di esso che è un ordine tale che ogni sottinsieme ha elemento minimo). Per gli insiemi finiti i numeri naturali già svolgono egregiamente questa funzione, sicché i numeri ordinali estenderanno i naturali avendo questi come loro tratto iniziale. L'importanza di rappresentare i tipi di buon ordine di insiemi infiniti segue dal fatto che così si possono in un certo senso individuare i singoli elementi di un insieme infinito, e ciò è reso possibile dall'accettazione dell'assioma della scelta: infatti esso è equivalente al principio del buon ordinamento per cui ogni insieme di qualsiasi cardinalità può essere bene ordinato. Ovviamente, se l'insieme è più che numerabile, il suo tipo di buon ordine non può essere rappresentato con i numeri naturali.Anche per le classi di buoni ordini tra loro isomorfi, come per le classi di equinumerosità, si presenta il problema che queste classi sono proprie (eccetto la classe contenente il buon ordinamento sull'insieme vuoto) e dunque inutili per costruire un loro calcolo non potendo essere considerate elementi pena contraddizioni. Così anche per le classi di buoni ordini tra loro isomorfi si ricorre a scegliere all'interno di ciascuna classe un elemento tipico e con questi poi si svolgerà il calcolo. La scelta dell'elemento tipico nel caso di buoni ordini finiti è proprio il numero naturale (visto insiemisticamente come ordinale) che conta gli elementi dell'insieme. Se invece l'insieme è infinito si può continuare a scegliere come rappresentante di una classe un elemento che mantenga i criteri che avevano portato a scegliere i rappresentanti per i buoni ordini finiti. Così la relazione d'ordine tra gli elementi del buon ordine da scegliersi come rappresentante di una classe sarà l'appartenenza e ogni ordinale avrà per elementi gli ordinali che lo precedono. In tal modo si arriva a definire un ordinale come un insieme bene ordinato dall'appartenenza e transitivo rispetto alla stessa relazione.

Il più piccolo ordinale infinito è l'insieme dei naturali, poiché questo insieme è bene ordinato dall'appartenenza e transitivo per essa e i suoi predecessori, che sono i suoi elementi, rappresentano solo buoni ordini finiti. Se all'insieme dei naturali si aggiunge il singolo elemento che è l'insieme dei naturali e lo si considera come successivo a tutti i numeri naturali, si trova un ulteriore insieme bene ordinato dall'appartenenza e transitivo, e pertanto un nuovo ordinale, che non è ordine isomorfo all'insieme dei numeri naturali, pur essendo equinumeroso allo stesso. Più in generale, partendo da un qualsiasi ordinale, si può considerare l'insieme dei suoi elementi a cui si può aggiungere come ultimo l'elemento che è l'insieme (l'ordinale) stesso. L'insieme che si ottiene è ancora bene ordinato dall'appartenenza e transitivo, e quindi è un ordinale, che non è isomorfo all'ordinale di partenza, ma è il più piccolo che lo contenga come tratto iniziale essendo stato aggiunto un solo elemento: così è naturale chiamare l'ordinale ottenuto l'immediato successore di quello di partenza. Si noti una importante differenza tra i numeri naturali e gli ordinali: mentre due naturali ordinali diversi hanno diverse cardinalità, ci sono ordinali diversi che hanno la stessa cardinalità. Detto altrimenti, il contare gli elementi di un insieme finito in un modo o nell'altro porta a buoni ordinamenti tra loro isomorfi, mentre la stessa cosa non vale per insiemi infiniti, anzi gli insiemi infiniti potrebbero essere proprio caratterizzati dalla mancanza di questa proprietà, cioè dalla proprietà che uno stesso insieme infinito può essere bene ordinato in modi diversi tra loro non isomorfi.

Come si è detto, ogni ordinale, alla stessa stregua di ogni naturale, ha un successore immediato. Invece, mentre ogni naturale diverso da zero ha un predecessore immediato, ci sono ordinali diversi da zero che non hanno predecessore immediato. Un esempio è l'insieme dei naturali, che si è detto essere un ordinale e che si indica con ω; esso è preceduto solo da numeri naturali senza che nessuno di questi sia un predecessore immediato. L'ordinale ω non è l'unico con questa caratteristica: si parta da un qualsiasi ordinale e si ripeta indefinitamente l'operazione di passaggio all'immediato successore, si consideri l'insieme di tutti gli ordinali minori di quelli ora indicati: questo insieme è bene ordinato dall'appartenenza e transitivo, dunque è un ordinale maggiore di quelli che gli appartengono, ma nessuno di questi è suo predecessore immediato. I numeri ordinali diversi da zero che non hanno predecessore immediato sono detti **ordinali limite**. Si può pensare che la costruzione degli ordinali sia realizzata nel modo seguente. Si parte da zero e si passa al successore indefinitamente, dopo essere andati avanti indefinitamente ed aver ottenuto tutta questa successione infinita di nuovi numeri si considera il loro insieme, che è ancora un ordinale e si riprende a passare al successore indefinitamente, e si ripete il considerare l'insieme degli elementi a cui si è arrivati passando al successore immediato indefinitamente, per poi riprendere a considerare, indefinitamente, i successori immediati di quanto si è ottenuto. Quanto è lungo questo ripetersi? In modo impercisabile, poiché, finché si riesce a tener traccia delle ripetizioni attraverso cui si è passati, si rimane a insiemi numerabili, mentre ci sono buoni ordini anche di insiemi non numerabili, sempre a causa del principio del buon ordinamento. Nella visione presentata degli ordinali si inserisce il principio d'induzione e la definizione per induzione, con la differenza, rispetto ai naturali, che ora si devono considerare due tipi di passaggi generativi degli ordinali, e precisamente il passaggio al successore immediato (come già si faceva per i naturali) ed in più (cosa che non ha corrispondente tra i naturali), dopo aver eseguito il primo tipo di costruzione indefinitamente, il collezionare in un nuovo insieme tutto ciò che è stato fatto. Pur essendo questa presentazione degli ordinali solo una traccia lontana dall'essere esaustiva e senza le dovute argomentazioni delle affermazioni fatte, nel rinviare a un qualsiasi manuale sul tema, si ritiene che siano stati ricordati gli aspetti essenziali che servono per le utilizzazioni che seguiranno.

Riprendiamo ora la dimostrazione del teorema per la completezza. L'idea è di considerare una alla volta le formule del linguaggio $\mathfrak{L}'$ e vedere se possono essere via via aggiunte all'insieme consistente di formule dato inizialmente in modo di arrivare possibilmente ad un insieme di Henkin, cioè ad un insieme massimale consistente tale che, per ogni formula del tipo $\neg\forall x\alpha$ che sia nell'insieme, nello stesso ci deve essere anche la formula $\neg\alpha(x/t)$ per un opportuno termine t che sarà uno dei nuovi simboli di costante aggiunti. Se il linguaggio $\mathfrak{L}$ è numerabile lo sarà anche $\mathfrak{L}'$ e tutte le formule possono essere messe in corrispondenza con i numeri naturali, e l'insieme delle formule potrà essere considerato come l'insieme $\{\varphi_i: i\in|N\}$, ovvero come l'insieme $\{\varphi_i: i\in\omega\}$ dove ω indica l'ordinale dell'insieme dei numeri naturali. Se il linguaggio è più che numerabile, sia di cardinalità l'ordinale λ, si farà ricorso ad un buon ordinamento delle formule, che esiste per l'assioma della scelta, e l'insieme delle formule potrà ora essere considerato come l'insieme $\{\varphi_\xi: \xi\in\lambda\}$, dove ξ indica un ordinale.

Volendo considerare per una possibile aggiunta una formula alla volta, si costruirà una successione di insiemi di formule $\Phi=\Phi_0,...,\Phi_\xi,...$ con $\xi\in\lambda$, che dovrammo avere le seguenti caratteristiche: 1) ognuno deve essere consistente, 2) ognuno deve contenere i precedenti, e 3) il numero di nuovi simboli di costante in ciascuno degli insiemi dovrà essere finito o minore o uguale alla cardinalità dell'indice dell'insieme.

Come per i naturali, anche per gli ordinali vale la definizione per induzione, solo che ora, oltre la base, ci saranno due casi da considerare, e precisamente il caso in cui un numero è successore immediato di un altro (come avviene per i naturali diversi da 0), e il caso in cui un numero ordinale, pur non essendo 0, non è un successore immediato di alcun ordinale, ma è un ordinale limite (caso che non si presenta per i numeri naturali).

Ecco ora come costruire una successione di insiemi di formule che abbia le caratteristiche prescritte e che possibilmente porti al risultato cercato.

Come già indicato, si sceglie per primo insieme (0-esimo) della successione proprio l'insieme consistente che si vuol mostrare essere soddisfacibile.

Si supponga ora che ξ sia un ordinale limite (questo caso non va considerato se il linguaggio $\mathfrak{L}'$ è numerabile) e che siano già stati definiti gli insiemi Φ_η per $\eta\in\xi$, ciascuno con le caratteristiche richieste. Si definisce $\Phi_\xi=\cup\{\Phi_\eta: \eta\in\xi\}$. Bisogna mostrare che l'insieme così definito soddisfa ancore le tre proprietà richieste. E' banale controllare che verifica la 2) essendo l'unione degli insiemi precedenti, sicché conterrà cisascuno di essi. La 3) segue dalle proprietà dell'aritmetica ordinale e cardinale: per ogni $\eta\in\xi$ le costanti in Φ_η sono in numero finito o minore od uguale alla cardinalità di η, che è minore od uguale alla cardinalità di ξ, e una unione di ξ insiemi, ciascuno con al più tanti elementi quant'è la cardinalità di ξ, non può avere una cardinalità maggiore della cardinalità di ξ. Rimane da verificare la 1) e per assurdo si supponga che Φ_ξ sia non consistente. Allora ci sono, a partire da Φ_ξ, una deduzione di una formula e una deduzione della sua negazione. In queste deduzioni occorrono un numero finito di formule di Φ_ξ, ognuna in un insieme della successione, Φ_{η_i}, la cui unione è Φ_ξ, ma questi insiemi Φ_{η_i} sono in numero finito e uno contenuto nell'altro; così ce ne sarà uno, Φ_μ, che contiene tutti gli altri e contiene tutte le premesse da cui si erano ottenute le due deduzioni una di una formula e l'altra della sua negazione: così anche Φ_μ sarebbe non consistente, contro l'ipotesi induttiva.

Ora si deve considerare il caso in cui ξ è un ordinale successore, ovvero $\xi=\nu+1$. Per definire $\Phi_{\nu+1}$ a partire da Φ_ν, che si suppone già ottenuto per induzione con le caratteristiche volute, si considererà la ν-esima formula della successione iniziale delle formule del linguaggio $\mathfrak{L}'$. Bisognerà considerare alcuni casi. In primo luogo può darsi che l'insieme $\Phi_\nu\cup\{\varphi_\nu\}$ sia non consistente: in tal caso per $\Phi_{\nu+1}$ si prende l'insieme Φ_ν stesso. In questo caso $\Phi_{\nu+1}$ rispetta tutte le caratteristiche richieste agli insiemi della successione perché Φ_ν le rispettava. Se invece l'insieme $\Phi_\nu\cup\{\varphi_\nu\}$ è consistente, allora si distinguono ancora due sottocasi: il primo quando φ_ν non è del tipo $\neg\forall x\alpha$, il secondo quando è di quel tipo. Nel primo sottocaso, per $\Phi_{\nu+1}$ si prende $\Phi_\nu\cup\{\varphi_\nu\}$. Chiaramente questo insieme è consistente, contiene i precedenti, e ha solo un numero finito di ulteriori nuovi simboli per costante (quelli occorrenti eventualmente in φ_ν), sicché rispetta tutte le caratteristiche richieste per gli insiemi della successione. Rimane solo l'altro sottocaso: se φ_ν è del tipo $\neg\forall x\alpha$, per $\Phi_{\nu+1}$ si prende $\Phi_\nu\cup\{\varphi_\nu\}\cup\{\neg\alpha(x/c)\}$ con c simbolo di costante di C non occorrente in $\Phi_\nu\cup\{\varphi_\nu\}$ (tale c esiste perché la cardinalità di C è λ mentre i simboli per costante già usati sono in numero finito o al più una quantità di cardinalità minore od uguale alla cardinalità di ν che è strettamente minore di λ). Ancora si deve far vedere che l'insieme così definito ha tutte le caratteristiche previste. Per come è definito, ovviamente contiene i precedenti e il numero dei nuovi simboli di costante è aumentato di una quantità finita: così la 2) e la 3) sono soddisfatte. Per completare il controllo di tutte le condizioni che devono soddisfare gli elementi della successione dei Φ_ξ, resta solo da mostrare che $\Phi_\nu\cup\{\varphi_\nu\}\cup\{\neg\alpha(x/c)\}$ è consistente, sapendo che $\Phi_\nu\cup\{\varphi_\nu\}$ lo è perché si sta considerando proprio questa situazione. Se, per assurdo, $\Phi_\nu\cup\{\varphi_\nu\}\cup\{\neg\alpha(x/c)\}$ non fosse consistente, allora, per quanto si è visto, si avrebbe che $\Phi_\nu\cup\{\varphi_\nu\}\vdash\alpha(x/c)$; ma il simbolo di costante c non occorre nelle premesse e, per il teorema di generalizzazione sui simboli di costante, si avrebbe anche che $\Phi_\nu\cup\{\varphi_\nu\}\vdash\forall x\alpha$: impossibile perché φ_ν è $\neg\forall x\alpha$ e $\Phi_\nu\cup\{\varphi_\nu\}$ è consistente.

Così si è completata la definizione della successione degli insiemi Φ_ξ per ogni $\xi\in\lambda$.

Ora si può definire l'insieme Ψ e si prende $\Psi=\cup\{\Phi_\xi: \xi\in\lambda\}$. Evidentemente $\Psi\supseteq\Phi$. Per concludere il teorema basta mostrare che quanto si è fatto raggiunge proprio lo scopo per cui è stato fatto, e cioè che Ψ è un insieme di Henkin, mostrando in successione che è consistente, che è massimale consistente, e che soddisfa l'ulteriore proprietà per essere un insieme di Henkin.

Che Ψ sia un insieme consistente, sia nel caso che il linguaggio sia numerabile sia non numerabile, si mostra nello stesso modo in cui si è mostrata la consistenza di Φ_ξ, con ξ limite.

Per la massimale consistenza, si deve far vedere che, per ogni insieme Δ di formule di $\mathfrak{L}'$ che contiene propriamente Ψ non è consistente. Sia α una formula in Δ-Ψ. α essendo una delle formule di $\mathfrak{L}'$ sarà ad un certo punto nel buon ordinamento di tali formule, α sia φ_ι. Allora $\Phi_\iota\cup\{\varphi_\iota\}$ deve essere non consistente altrimenti φ_ι apparterrebbe a $\Phi_{\iota+1}$ e a Ψ. Poiché Δ contiene $\Phi_\iota\cup\{\varphi_\iota\}$, anche Δ è non consistente. Così Ψ è massimale consistente.

Finalmente si supponga che la formula $\neg\forall x\alpha$ appartenga a Ψ. Anche la formula $\neg\forall x\alpha$ sarà ad un certo punto nel buon ordinamento delle formule di $\mathfrak{L}'$, $\neg\forall x\alpha$ sia φ_ι. Allora $\Phi_\iota\cup\{\varphi_\iota\}$ deve essere consistente altrimenti $\neg\forall x\alpha$ non apparterrebbe a $\Phi_{\iota+1}$ e neppure a Ψ. Ma allora, per definizione di $\Phi_{\iota+1}$, anche $\neg\alpha(x/c)$ gli appartiene e dunque appartiene pure a Ψ, sicché Ψ è proprio un insieme di Henkin, come volevasi mostrare.

Ora che si è mostrato che ogni insieme consistente di formule in un linguaggio $\mathfrak{L}$ è contenuto in un insieme di Henkin in un linguaggio $\mathfrak{L}'$ che contiene $\mathfrak{L}$, si può concludere che un insieme consistente è soddisfacibile, poiché lo è l'insieme di Henkin che lo contiene. Si possono così riassumere i risultati ottenuti enunciando il seguente

Teorema di completezza per il calcolo predicativo. (prima formulazione) Un insieme di formule è soddisfacibile se e solo se è consistente.

Ricordando i legami più volte richiamati tra non soddisfacibilità e conseguenza logica, e tra non consistenza e deducibilità si può riformulare il precedente teorema nel seguente
Teorema di completezza per il calcolo predicativo. (seconda formulazione). Una formula è conseguenza logica di un insieme di formule se e solo se si deduce da quello.

Ovviamente lo stesso risultato si ottiene anche quando l'insieme di formule è costituito da una sola formula: in tal caso la sua non soddisfacibilità equivale alla validità della sua negazione, mentre la sua non consistenza equivale alla dimostrabilità della sua negazione. Questo caso particolare può essere ricordato nel seguente
Teorema debole di completezza. Una formula è valida se e solo se è dimostrabile.

Dal teorema di compattezza sintattico per il calcolo predicativo e dal teorema di completezza appena enunciato segue una ulteriore dimostrazione del teorema di compattezza semantico che afferma che un insieme di formule è non soddisfacibile se e solo se c'è un suo sottinsieme finito che è non soddisfacibile. Infatti, per il teorema di completezza, un insieme di formule è non soddisfacibile se e solo se è non consistente; ma, per il teorema di compattezza sintattico per il calcolo predicativo, ciò è vero se e solo se c'è un suo sottinsieme finito (eventualmente quello costituito dalle premesse delle dimostrazioni una che si conclude con una formula e l'altra che si conclude con la sua negazione) che è non consistente, e questo sottinsieme finito deve essere non soddisfaciblile, sempre per il teorema di completezza.

Si osservi che anche il controllo sintattico basato sul metodo della deduzione con la regola del modus ponens a partire dagli assiomi precisati (calcolo predicativo) è
1) adatto a linguaggi di qualsiasi cardinalità,
2) completo nel senso della completa corrispondenza tra le nozioni semantiche e le loro caratterizzazioni sintattiche,
3) non categorico nel senso che nessuna teoria consistente con modelli infiniti è in grado di individuare i suoi modelli a meno di isomorfismi (a causa del teorema di compattezza),
4) semidecidibile, cioè se un insieme di formule è non consistente il controllo sintattico porta a mostrare che non è consistente dopo un numero finito di passi (in quantità non precedentemente prevedibile), mentre se l'insieme di formule è soddisfacibile il controllo sintattico di questa situazione si protrarrà indefinitamente dovendo verificare che non si giungerà mai a dedurre sia una formula che la sua negazione.
Sostanzialmente si è pervenuti al calcolo predicativo che è un controllo sintattico con le stesse caratteristiche di quello realizzato inizialmente con gli alberi di confutazione a blocchi. Più avanti si cercherà di affrontare il problema della ricerca di un calcolo sintattico migliore dal punto di vista della decidibilita' del metodo: pur sapendo che da un punto di vista generale non si possono ottenere risultati migliori a causa del teorema di Church (strettamente legato al teorema di incompletezza di Gödel, risultati che vanno ben oltre il traguardo che si prefiggono queste note) che afferma che l'insieme delle formule valide non è decidibile, le ulteriori indagini sono rivolte ad individuare casi specifici e utili in cui i risultati possono esser migliorati.
Dal punto di vista delle richieste di principi fondazionali generali per poter sviluppare le argomentazioni la situazione dei due approcci (analisi della soddisfacibilità a blocchi o con gli insiemi consistenti) è analoga. Se il linguaggio è al più numerabile non c'è alcuna particolare richiesta oltre le usuali assunzioni della teoria degli insiemi, ad esempio della teoria ZF. Mentre se il linguaggio è più che numerabile l'assunzione dell'assioma della scelta porta a tutti i risultati voluti in entrambi gli approcci. Ma si può fare anche meglio richiedendo solo la più debole assunzione dell'esistenza di ultrafiltri. Questa può essere utilizzata anche nel caso del calcolo predicativo (anche se qui non si è fatto così) dimostrando, per altra via (eventualmente semantica) che usa solo l'esistenza degli ultrafiltri, il teorema di compattezza e riducendo, mediante questo, i casi di linguaggi più che

numerabili a quelli di linguaggi numerabili (quelli minimi per un insieme finito di formule).

Allora perché tutto questo lavoro?

Si è già accennato al fatto che il metodo presentato per primo metteva in luce la determinatezza dell'analisi svolta e la piena corrispondenza con la costruzione del linguaggio. Questi aspetti non sono immediatamente presenti nel calcolo predicativo che sembra anzi legato ad un certo ingegno nel trovare il percorso per arrivare a una deduzione. Tuttavia, proprio per l'equivalenza dei metodi, ma ancor di più dalla trasformazione deterministica di un metodo nell'altro, che qui non è stato possibile considerare per ovvie limitazioni di estensione, segue che gli aspetti di ingegno sono solo una impressione. Ciononostante, partendo dal primo metodo che non crea false illusioni, si è voluto arrivare al calcolo predicativo per la sua diffusione nella letteratura e per la sua tradizione storica. Nel passare da uno all'altro si sono voluti ricordare sia gli aspetti di carico computazionale sia le varie esigenze e punti di vista a cui i vari controlli sintattici cercano di rispondere, pur rimanendo tutti strettamente imparentati basandosi su varianti di idee che sono sostanzialmente sempre le stesse.

39. QUANTIFICAZIONE DI VARIABILI PREDICATIVE E LOGICA DEL SECONDO ORDINE.

In quanto fatto finora si sono introdotte solo variabili da interpretarsi in individui dell'universo di una realizzazione in cui si interpretano le formule. Nel linguaggio naturale ci si concedono anche espressioni del tipo: le proprietà di un certo individuo hanno certe caratteristiche, ad esempio, le proprietà di un certo individuo sono anche proprietà di un altro ben precisato individuo. Qui una proprietà di un individuo è una relazione unaria non precisata. Come si è fatto per gli individui non precisati, si possono introdurre nel linguaggio formale delle variabili, che saranno chiamate variabili predicative affinché anche questo linguaggio abbia le potenzialità analoghe a quelle appena notate del linguaggio naturale. Le variabili predicative sono dei simboli da interpretarsi in varie relazioni, non precisate dalla struttura, come non era precisata dalle strutture l'interpretazione delle variabili individuali. Tuttavia bisogna stabilire un ambito entro cui interpretare queste nuove variabili, come si era fatto indicando l'universo di una struttura quale ambito dove interpretare le variabili individuali. Poiché ciascuna relazione ha la sua arità, ci vorranno variabili predicative per ciascuna arietà, da interpretarsi in relazioni di quella arietà. Così le variabili predicative di un certa arietà, diciamo n, dovranno essere interpretate nelle relazioni n-arie appartenenti ad un determinato insieme di tali relazioni. Ancora bisogna ricordare che le relazioni devono essere relazioni sull'universo della struttura per cui saranno sottinsiemi del prodotto cartesiano dell'universo per sé stesso tante volte quanto è indicato dall'arietà, e l'ambiente in cui potranno essere interpretate le variabili predicative di una certa arietà sarà, dunque, un sottinsieme dell'insieme dei sottinsiemi del prodotto cartesiano dell'universo con sé stesso tante volte quante è indicato dall'arietà delle variabili predicative da interpretare.

Per interpretare le variabili predicative, si dovrà, dunque, arricchire anche la nozione di struttura con tanti insiemi di relazioni n-arie sull'universo della struttura, uno per ogni numero naturale n. Si riserva il nome di struttura del primo ordine alla nozione di struttura considerata finora. Così la nuova nozione di struttura, che sarà chiamata una struttura del secondo ordine, sarà una successione costituita da un insieme non vuoto A, come primo elemento, seguito da tanti insiemi A_n di relazioni n-arie su A, uno per ciascun numero naturale, seguito, nell'ordine, da un insieme non vuoto $\mathcal{R}$ di relazioni fissate come nelle strutture del primo ordine, seguito ancora da un insieme $\mathcal{F}$ delle eventuali funzioni totali e da quello $\mathcal{C}$ delle costanti, ancora come nelle strutture del primo ordine. Inoltre, per ogni naturale n maggiore di zero, A_n dovrà contenere le relazioni n-arie di $\mathcal{R}$ e le funzioni (n-1)-arie di $\mathcal{F}$ (viste come relazioni n-arie), ed essere contenuto in $\mathfrak{P}(A^n)$, l'insieme dei sottinsiemi del prodotto cartesiano di A con sé stesso n volte. Sicché una struttura del secondo ordine potrà essere indicata così: $\underline{\mathfrak{A}} = (A, A_1,..., A_n,..., \mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ con A insieme non vuoto, A_1 insieme (che può essere vuoto) di relazioni unarie su A che contiene le relazioni unarie di $\mathcal{R}$ e ciascuno degli insiemi il cui unico elemento è una costante di $\mathcal{C}$, ... , A_n insieme (che può essere vuoto) di relazioni n-arie su A che contiene le relazioni n-arie di $\mathcal{R}$ e le funzioni (n-1)-arie di $\mathcal{F}$, ... , $\mathcal{R}$ insieme non vuoto di relazioni (contiene la relazione binaria di essere sè stesso), $\mathcal{F}$ insieme di funzioni totali su A, e $\mathcal{C}$ un insieme di costanti di A (cioè $\mathcal{C}\subset A$). Poiché si sta considerando l'uguaglianza come simbolo logico, $\mathcal{R}$ dovrà contenere la relazione di uguaglianza, e pertanto A_2 non può essere vuoto.

Il linguaggio per descrivere le strutture del secondo ordine dovrà essere arricchito con variabili del secondo ordine (o predicative), e precisamente un numero numerabile di variabili per ciascuna arietà, che saranno indicate con V^i_n dove l'apice indica l'arietà (un numero naturale maggiore di zero), e il pedice indica il numero naturale che distingue una variabile da un'altra.

Come per le variabili individuali, anche per le variabili predicative la loro interpretazione non è indicata da una struttura del secondo ordine, ma sarà un'ulteriore informazione raccolta in una attribuzione di valore alle variabili predicative, che è una funzione che a ciascuna variabile predicativa i-aria associa un elemento di A. In questo contesto, le notazione già introdotta per indicare un'attribuzione di valori alle variabili, indicherà ora una attribuzione di valori sia alle variabili individuali che alle variabili predicative.

Una realizzazione del secondo ordine (da indicarsi con una lettera dell'alfabeto greco sottolineata, $\underline{\sigma}$) sarà una coppia oridnata costituita da una struttura del secondo ordine $\underline{\mathfrak{A}}$ e da una attribuzione di valori alle variabili $\underline{a}$ nel senso appena precisato: $\underline{\sigma}=(\underline{\mathfrak{A}},\underline{a})$.

Tra le formule atomiche saranno aggiunte le formule del tipo $V^i{}_n\, t_1...t_i$, cioè le successioni finite di simboli che iniziano con una variabile predicativa i-aria, che è seguita da i termini.

Anche la nozione di formula viene modificata accettando come formule anche le successioni finite di simboli che iniziano con il quantificatore universale $\forall$ seguito da una variabile predicativa, il tutto seguito da una formula. Le formule del tipo appena introdotto verranno dette formule quantificate predicativamente, o quantificate al secondo ordine.

Bisognerà anche ampliare la definizione base di soddisfacibilità per contemplare questo tipo di formule: oltre le clausole già viste di questa definizione, si dirà che una formula del tipo $\forall V^i{}_n\alpha$, dove α è una formula, sarà vera in una realizzazione del secondo ordine $\underline{\sigma}$ se, per ogni relazione i-aria R_i appartenente ad A_i, la formula α è vera nella realizzazione $\underline{\sigma}(V^i{}_n/R_i)$, che è la realizzazione che differisce dalla realizzazione $\underline{\sigma}$ solo per la eventualmente diversa attribuzione di valore alla sola variabile predicativa $V^i{}_n$ a cui viene ora attribuita la relazione R_i.

Con la notazione $\varphi(V^i{}_n/P^i)$ si indicherà la sostituzione del predicato P^i al posto di ogni occorrenza libera della variabile $V^i{}_n$, mentre con la notazione $\varphi(V^i{}_n/V^i{}_k)$ si indicherà la sostituzione della variabili $V^i{}_k$ al posto di ogni occorrenza libera della variabile $V^i{}_n$ se la variabile del secondo ordine $V^i{}_k$ è libera per la variabile $V^i{}_n$ nella formula φ, altrimenti detta sostituzione va effettuata su una variante di φ ottenuta per cambi alfabetici che abbiano reso la variabile del secondo ordine $V^i{}_k$ libera per la variabile $V^i{}_n$ nella variante della formula φ. Le nozioni qui richiamate sinteticamente sono del tutto analoghe alle corrispondenti nozioni già viste sulle sostituzioni, e i risultati che le riguardano non sono altro che la trasposizione al presente caso dei risultati già dimostrati. In particolare continuerà a valere che $\varphi(V^i{}_n/P^i)^{\underline{\sigma}} = \varphi^{\underline{\sigma}(V^i{}_n/(P^i)^{\underline{\sigma}})}$, e che $\varphi(V^i{}_n/V^i{}_k)^{\underline{\sigma}} = \varphi^{\underline{\sigma}(V^i{}_n/(V^i{}_k)^{\underline{\sigma}})}$.

Le nozioni di validità al secondo ordine, soddisfacibilità al secondo ordine, e conseguenza logica al secondo ordine si definiscono come le corrispondenti nozioni già viste, ma facendo riferimento alle realizzazione del secondo ordine invece che alle realizzazioni come si era fatto a suo tempo. E' immediato che tra le nozioni ora introdotte sussistono gli stessi rapporti che sussistevano tra le corrispondenti nozioni precedentemente viste.

Ancora, vista la difficoltà a riconoscere queste nozioni dalla definizione, si può cercare di costruire un controllo sintattico della soddisfacibilità del secondo ordine (e di conseguenza anche della conseguenza logica del secondo ordine e della validità del secondo ordine).

In modo del tutto analogo a quanto si era fatto si può ricorrere alle regole $R_{1,n}$ e R_2, ma la regola $R_{1,n}$ dovrà essere modificata per la necessità di analizzare anche le formule quantificate predicativamente. La nuova regola $\underline{R}_{1,n}$ si può precisare come segue: da un insieme di formule Γ fa passare ad un altro insiemi di formule Γ' così definito:

$\Gamma'=\Gamma\cup\{\varphi\colon \neg\neg\varphi\in\Gamma\}\cup$

> $\{\varphi_1,\varphi_2\colon \wedge\varphi_1\varphi_2\in\Gamma\}\cup$
>
> $\{\varphi(v_m/t)\colon \forall v_m\varphi\in\Gamma$ e t è un termine occorre in qualche formula di $\Gamma\}\cup$
>
> $\{\varphi(V^i{}_m/X^i)\colon \forall V^i{}_m\varphi\in\Gamma$ e o X^i è un predicato i-ario P^i che occorre in qualche formula di Γ, oppure X^i è una variabile del secondo ordine $V^i{}_k$ che occorre libera in qualche formula di $\Gamma\}\cup$
>
> $\{\neg\varphi(v_m/c_{\neg\forall v_n\varphi})\colon \neg\forall v_m\varphi\in\Gamma\}\cup$
>
> $\{\neg\varphi(V^i{}_m/P^i{}_{\neg\forall V^i{}_n\varphi})\colon \neg\forall V^i{}_m\varphi\in\Gamma,\ i>0\}\cup$
>
> $\{\varphi(t_1/t_2)\colon \varphi(x/t_1)\in\Gamma$ e $t_1=t_2\in\Gamma\}\cup$
>
> $\{t=t$: t è un termine con simboli di costante e simboli di funzione occorrenti in Γ, variabili entro v_n, a profondità al più n$\}$,

dove, per ogni formula del tipo $\neg\forall v_m\varphi$ occorrente in Γ, $c_{\neg\forall v_m\varphi}$ è un simbolo di costante boli per costanti sono tutti tra loro a due a due diversi (detto altrimenti c'è una biiettività tra le formule del tipo $\neg\forall v_m\varphi$ occorrenti in Γ e i nuovi simboli per costante $c_{\neg\forall v_m\varphi}$), e, per ogni naturale i maggiore di zero e per ogni formula del tipo $\neg\forall V^i{}_m\varphi$ occorrente in Γ, $P^i{}_{\neg\forall V^i{}_m\varphi}$ è un predicato i-ario non occorrente in Γ (a meno che la formula $\neg\varphi(V^i{}_m/P^i{}_{\neg\forall V^i{}_m\varphi})$ occorra già in Γ) e tali predicati i-ari sono tutti tra loro diversi a due a due (cioè c'è una biiettività tra le formule del tipo $\neg\forall V^i{}_m\varphi$ occorrenti in Γ e i nuovi predicati i-ari $P^i{}_{\neg\forall V^i{}_m\varphi}$). Se l'insieme di formule Γ è nel linguaggio $\mathfrak{L}$, allora le formule di Γ' sono nel linguaggio $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}\cup\{c_{\neg\forall v_m\varphi}: \neg\forall v_m\varphi\in\Gamma\}\cup\{P^i{}_{\neg\forall V^i{}_m\varphi}: \neg\forall V^i{}_m\varphi\in\Gamma, i>0\}$.

E' facile dimostrare che la regola $\underline{R}_{1,n}$ preserva sia la soddisfacibilità del secondo ordine, che la finitezza, che la finita soddisfacibiltà del secondo ordine (cioè soddisfacibilità del secondo ordine di tutti i sottinsiemi finiti di un insieme di formule). Così con questa regola e con la regola R_2 si possono continuare a costruire, con lo modalità già viste, successioni di alberi a partire da un insieme di formule che costituisce la loro radice, mantenendo anche nella presente situazione il risultato di validità: se l'insieme di formule Φ da cui si parte è soddisfacibile al secondo ordine allora gli alberi della successione costruita secondo la strategia a partire da Φ saranno tutti aperti, ed anche l'albero l'unione degli alberi della successione. La contronominale del risultato affermato dice che, se un albero della successione costruita nel modo detto è chiuso, o se l'albero unione è chiuso, allora l'insieme iniziale non è soddisfacibile al secondo ordine.

Si vede anche altrettanto facilmente che, se l'albero unione di una successione di alberi ottenuti applicando le regole $\underline{R}_{1,n}$ e R_2 secondo la strategia a partire da un insieme di formule Φ ha un ramo aperto, questo è infinito e l'insieme delle formule occorrenti nel ramo è un insieme di Hintikka al secondo ordine, dove con ciò si intende un insieme di Hintikka Σ che rispetta le seguenti ulteriori clausole:

- se $\forall V^i{}_m\varphi\in\Sigma$ allora, per ogni X^i che sia o un predicato i-ario P^i del linguaggio di Σ o una variabile del secondo ordine $V^i{}_k$ che occorre libera in Σ, $\varphi(V^i{}_m/X^i)\in\Sigma$;
- se $\neg\forall V^i{}_m\varphi\in\Sigma$ allora esiste un predicato i-ario P^i del linguaggio di Σ tale che $\neg\varphi(V^i{}_m/P^i)\in\Sigma$.

In modo analogo a quanto fatto per gli insiemi di Hintikka, si dimostra che ogni insieme di Hintika del secondo ordine è soddisfacibile, costruendo anzitutto un modello del secondo ordine a partire dall'insieme di Hintikka del secondo ordine, e mostrando poi che tale struttura del secondo ordine è modello dell'insieme di Hintikka del secondo ordine.

in costruzione

A volte si vogliono considerare le strutture del secondo ordine in cui ciascun insieme dei possibili valori delle variabili del secondo ordine n-arie è l'insieme dei sottinsiemi delle n-uple di elementi dell'universo della struttura, $\mathfrak{P}(A^n)$. Tali strutture vengono dette **piene**. Diversamente da quanto fatto per indicare una struttura del secondo ordine usando la notazione $\underline{\mathfrak{A}} = (A, A_1,..., A_n,..., \mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, per indicare una struttura piena non sarà necessario menzionare i singoli insiemi in cui interpretare le variabili predicative delle diverse arietà, poiché questi sono determinati dall'universo in cui si interpretano le variabili individuali, ma sarà sufficiente una notazione del tipo $\underline{\mathfrak{A}} = (A, \mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$.

Non c'è alcun modo attraverso il linguaggio per caratterizzare le strutture del secondo ordine piene. Ciò sarà provato considerando la teoria del secondo ordine dell'aritmetica, indicata con PA (Peano Arithmetic) e mostrando che per essa valgono risultati in contrasto con quanto precedentemente dimostrato, se la si interpreta solo in strutture piene.

La teoria PA è la chiusura deduttiva dei seguenti tre assiomi scritti in un linguaggio del secondo ordine i cui soli simboli propri sono il simbolo per costante 0 e il simbolo per funzione unaria s:

1) $\forall v_0\neg v_0=0$
2) $\forall v_0\forall v_1 (sv_0=sv_1 \to v_0=v_1)$.

3) $\forall V^1_0 \left((V^1_0 0 \wedge \forall v_0 (V^1_0 v_0 \to V^1_0 s v_0)) \to \forall v_0 V^1_0 v_0\right)$

Una struttura del secondo ordine piena in cui sono veri questi assiomi viene della una **struttura di Peano**. Per una struttura di Peano si userà la notazione $\mathfrak{P}$ = (A,{=}, {suc},{*0*}). Data una relazione unaria R, l'insieme X_R = {x: x∈R} è detto l'estensione della relazione R. Si dicono **relazioni induttive** le relazioni unarie per le quali 0 appartiene all'estensione della relazione e, per ogni elemento x, se x appartiene all'estensione della relazione allora anche suc(x) appartiene all'estensione della relazione. Un **insieme induttivo** è l'estensione di una relazione induttiva. L'assioma 3) è vero in tutte le strutture del secondo ordine in cui ogni relazione unaria induttiva che appartiene all'universo delle relazioni unarie della struttura contiene l'universo degli elementi della struttura.

Anzitutto si dimostra il seguente

Teorema. La formula $\forall v_0 (v_0 = 0 \vee \exists! v_1\ v_0 = s v_1)$ si deduce dagli assiomi.

DIMOSTRAZIONE. Si consideri la formula con una sola variabile libera del secondo ordine unaria $\forall v_0 \left(V^1_0 v_0 \leftrightarrow (v_0 =0 \vee \exists! v_1\ v_0=sv_1)\right)$. E' immediato che da questa si deduce $V^1_0 0$. Inoltre, se $V^1_0 v_2$ allora o si deduce $v_2=0$ oppure si deduce $\exists! v_1\ v_2=sv_1$, sicché o sv2=s0 oppure $\exists! v_1\ sv_2=ssv_1$ (in quest'ultimo caso l'unicità segue dalla iniettività della funzione colta nel secondo assioma), e dunque si può concludere che $V^1_0 sv_2$. Per generalizzazione (e cambio alfabetico) si ha $\forall v_0 (V^1_0 v_0 \to V^1_0 sv_0)$. Avendo già ottenuto $V^1_0 0$, l'assioma 3) permette di concludere che $\forall v_0 V^1_0 v_0$, che, per come è stata introdotta la variabile V^1_0, porta alla tesi.

Si mostrerà che la teoria PA è categorica, se si considerano solo le interpretazioni nelle strutture piene. Per arrivare a ciò si dimostrerà che a partire dagli assiomi di PA si possono definire "per induzione" funzioni, in un senso che verrà precisato dal seguente

Teorema di definibilità per induzione. Sia $\mathfrak{P}$ = (A,{=}, {suc},{*0*}) una struttura di Peano. Sia S un insieme con almeno un elemento c. Sia g una funzione totale da A×S in S. Allora esiste un'unica funzione f tale che

i) dom (f) = A, cod(f) ⊂ S,

ii) f(*0*) = c,

iii) per ogni elemento x appartenente ad A, f(suc(x)) = g(x, f(x)).

La funzione f così univocamente determinata viene detta definita per induzione a partire dall'elemento c e dalla funzione g.

Si noti che l'affermazione è semantica e vuole provare l'esistenza e unicità di una funzione tra una struttura del secondo ordine piena e un insieme. Tuttavia per sfruttare il fatto che la struttura è una struttura di Peano, si dovrà far riferimento ai suoi assiomi, e quindi collegare la struttura con formule in essa vere.

DIMOSTRAZIONE.Si consideri l'insieme M di tutte le relazioni W da A in S precisate nella seguente definizione dell'insieme M

M = {W: W è una relazione da A in S tale che (*0*,c)∈W e, per ogni coppia di elementi x in A e y in S, se (x,y)∈W allora anche (suc(x), g(x,y))∈W}

Si noti che M non è vuoto dal momento che gli appartiene la relazione A×S che soddisfa i requisiti.

Si mostrerà che la funzione cercata è f = ∩{W: W∈M}.

Anzitutto si vede che f∈M. Infatti, ovviamente f⊂A×S, e (*0*,c)∈f poiché tale coppia appartiene ad ogni relazione W appartenente a M. Inoltre, se (x,y)∈f allora (x,y) appartiene ad ogni W in M, sicché anche la coppia ordinata (suc(x), g(x,y)) appartiene ad ogni W in M, e pertanto anche a f.

Ora si vuole mostrare che f è una funzione. Si consideri la relazione unaria R così definita : x∈R se e solo se x∈A, per ogni x appartenetnte ad A esiste un y tale che (x,y)∈f e, per ogni z_1 e z_2 in S, se $(x,z_1)\in f$ e $(x,z_2)\in f$ allora $z_1=z_2$, cioè appartengono a R tutti gli elementi del dominio di f in cui la relazione f è univoca. Si mostrerà che R coincide con A, sicché f sarà una funzione totale da A. Per arrivare a tale risultato, si mostrano le due seguenti affermazioni: a) *0*∈R e b) per ogni x in A se x∈R allora anche suc(x)∈R.

Per mostrare a), si sa già che (*0*,c)∈f, e si supponga per assurdo che in S esista z diverso da c tale che (*0*,z)∈f. In questa situazione si consideri f' = f-{(*0*,z)}: si vede facilmente che f' appartiene a M poiché (*0*,c) continua ad appartenere a f' (z non è c e la coppia (*0*,c) non è stata tolta a f') e le coppie del tipo (suc(x), g(x,y)) con (x,y)∈f' continuano ad appartenere a f' poiché appartengono a f e sono diverse da quella tolta, dal momento che *0* non può mai essere uguale a suc(x) (per l'iniettività della funzione suc e per il teorema precedente). Così f' apparterrebbe a M, impossibile essendo strettamente contenuto nell'intersezione di tutti gli elementi di M.

Per mostrare la b) basta far vedere che, se (x,y)∈f allora per ogni z in S se (suc(x),z)∈f allora z = g(x,y), dal momento che (suc(x), g(x,y))∈f. Ancora, per assurdo, si supponga che ci sia w, diverso da g(x,y), tale che (suc(x), w)∈f. Si consideri f' = f-{(suc(x), w)}. Si osservi che (*0*,c)∈f' poiché (*0*,c)∈f e (*0*,c) non è stata levata nel definire f' dal momento che *0* non è suc(x) per ogni x in A, come notato prima. Inoltre se (u,v)∈f' allora (u,v)∈f e può succedere che u sia x oppure no. Nel primo caso (suc(u), g(u,v))∈f e suc(u) non è suc(x), sicché (suc(u),g(u,v)) non è la coppia tolta e appartiene anche a f'. Nel secondo caso (cioè quando u è x) si ha che (suc(u), g(u,y))∈f e (suc(u),g(u,y)) non è (suc(u),w) (per l'ipotesi che w sia un elemento diverso da g(x,y)), sicché (suc(u), g(u,y)) appartiene anche a f'. Tutto ciò mostra che anche f' apparterrebbe a M, ancora impossibile essendo strettamente contenuto nell'intersezione di tutti gli elementi di M.

Si sono così accertate le affermazioni a) e b). Il passaggio delicato sta nel mostrare che, se valgono queste due affermazioni, allora R coincide con A. Finora si è argomentato dal di fuori della struttura di Peano considerata, e, dal di fuori si è trovato un insieme R (relazione unaria che vale per gli elementi del dominio di f dove essa è univoca, f che è l'intersezione di tutte le relazioni di M) con le proprietà a) e b). Ora si vorrebbe sfruttare l'assioma 3), ma la quantificazione universale sulla variabile del secondo ordine V^1_0 che vi compare dice solo che la variabile deve essere interpretata in tutti i modi possibili nell'universo delle relazioni unarie delle strutture del secondo ordine che sono modelli degli assiomi dati. Le affermazioni a) e b) dicono che la relazione unaria R è induttiva. Ma non è detto che R appartenga all'universo delle relazioni unarie di una qualsiasi struttura del secondo ordine che abbia A come universo degli individui, mentre, se la struttura è piena, R sicuramente appartiene all'universo delle relazioni unarie di una struttura del secondo ordine con A come universo degli individui. Così, se ci si limita alle strutture di Peano, R è una delle relazioni induttive dell'universo delle relazioni unarie, e, pertanto, contiene A. D'altra parte R deve essere contenuto in A. Sicché R è A nei modelli del secondo ordine pieni degli assiomi di Peano.

in costruzione

40. CALCOLO PROPOSIZIONALE.

A volte la validità di una formula si vede facilmente da come vengono usati in essa certi connettivi. Ad esempio la formula $\varphi\rightarrow\varphi$ è valida indipendentemente da chi è e come viene valutata la formula φ. Detto altrimenti, a volte si può giungere a vedere se una formula ψ è valida senza analizzare il significato delle sottoformule atomiche o delle sottoformule che iniziano con un quantificatore: a priori queste sono o vere o false (anche se di fatto in certi casi sono solo vere o solo false), ma, nonostante questa imprecisione, si riesce ugualmente a vedere se ψ è valida.

Si conviene di chiamare **formule elementari** sia le formule atomiche che le formule che iniziano con un quantificatore, e **formule proposizionali** quelle costruite, a partire dalle formule elementari, mediante i connettivi. Di fatto, una qualsiasi formula può essere ottenuta da formule elementari mediante il solo uso di connettivi ed essere vista come formula proposizionale, cioè una qualsiasi formula o è una formula elementare, o è la negazione di una formula proposizionale precedentemente ottenuta, o è la congiunzione di due formule proposizionali precedentemente ottenute. Il vedere una qualsiasi formula come formula proposizionale sta ad indicare il particolare modo di considerare la formula: la mancata considerazione del significato dei costituenti delle formule elementari, alle quali viene attribuito aprioristicamente o il valore vero o il valore falso, porta alla formulazione di nuove nozioni.

Chiaramente questo modo di guardare ad una formula fa perdere molta conoscenza sulla formula, precisamente tutto ciò che si può sapere da una formula elementare che può essere anche estremamente complessa e diversamente strutturata rispetto ad altre formule elementari. Tuttavia questa posizione permetterà di arrivare alla <u>decidibilita'</u> di certi metodi di analisi della validità di opportune formule, come si vedrà in seguito.

Si potrebbe anche introdurre un nuovo linguaggio $\mathfrak{L}_P$ per indicare le formule proposizionali. In esso ci devono essere un simbolo per ciascuna formula elementare e i simboli $\neg$ ed $\wedge$. I simboli per le formule elementari hanno il ruolo di variabili che assumono valore nell'insieme dei valori di varità. Si noti che la cardinalità dell'insieme delle formule proposizionali è uguale alla cardinalità del linguaggio $\mathfrak{L}_P$ usato per costruirle.

Per **valutazione proposizionale** adatto ad un linguaggio $\mathfrak{L}_P$ si intende una attribuzione o del valore vero o del valore falso a ciascuna formula proposizionale di $\mathfrak{L}_P$ in un certo modo, arbitrario, per le formule elementari, e, una volta fissato questo, nel seguente modo per le altre formule proposizionali φ: se φ è del tipo $\neg\alpha$, con α formula proposizionale, allora la valutazione di φ sarà il vero se e solo se la valutazione di α è il falso; mentre se φ è del tipo $\wedge\alpha\beta$, con α e β formule proposizionali, allora la valutazione di φ sarà il vero se e solo se sia la valutazione di α che la valutazione di β sono il vero. In genere si indicherà con v una valutazione proposizionale, e con $v(\varphi)$ il valore che tale valutazione assegna alla formula φ.

Si dirà che una formula è **proposizionalmente valida** se è vera in ogni valutazione proposizionale, che è **conseguenza logica proposizionale** di altre formula se è vera in ogni valutazione proposizionale che rende vere le altre formule, e che un insieme di formule è **proposizionalmente soddisfacibile** se c'è almeno una valutazione proposizionale in cui tutte le formule dell'insieme sono vere. Chiaramente tra queste nozioni sussistono le usuali relazioni, e cioè:

- una formula (la negazione di una formula) è proposizionalmente valida se e solo se la sua negazione (la formula) è proposizionalmente non soddisfacibile;
- una formula è proposizionalmente valida se solo se è conseguenza logica proposizionale dell'insieme vuoto;
- una formula è conseguenza logica proposizionale di un insieme di formule se e solo se l'insieme di formule ottenuto aggiungendo a quello dato la negazione della formula considerata non è proposizionalmente soddisfacibile.

Si può cercare di caratterizzare sintatticamente anche questi concetti semantici proposizionali. E' naturale pensare a delle nozioni sintattiche legate a quelle già viste. Così si cercherà di passarle in rassegna adattandole al caso proposizionale.

Per studiare se un insieme di una qualsiasi cardinalità (anche più che numerabile) di formule proposizionali Φ è proposizionalmente soddisfacibile o meno, si può definire la nozione di **albero proposizionale di confutazione a blocchi** come uno degli alberi di confutazione della successione di alberi ottenuta, a partire dall'albero che ha solo la radice costituita dall'insieme Φ, applicando, con la strategia già vista, invece delle re-gole $R_{1,n}$ e R_2, le regole R'_1 e R_2 dove la regola R'_1 è ottenuta dalla regola $R_{1,n}$ aggiungendo all'insieme a cui si applica solo quanto previsto per le formule del tipo $\neg\neg$, $\wedge$.

Quando, invece, si vuole studiare se un insieme al più numerabile di formule proposizionali Φ è proposizionalmente soddisfacibile o meno, si può definire la nozione di **albero proposizionale di confutazione** uno degli alberi di confutazione della successione di alberi ottenuta, a partire dall'albero che ha solo la radice costituita dall'insieme Φ, applicando le sole regole per l'analisi di una formula alla volta che riguardano le formule del tipo $\neg\neg$, $\wedge$, $\neg\wedge$, secondo una strategia che è l'ovvio adeguamento al caso presente di quella già vista.

Si osservi subito che, se si parte da un insieme finito di formule, gli alberi proposizionali di confutazione hanno un numero finito di successori immediati di ciascun nodo, per cui sono finiti. Di più, proprio perché ora non ci sono da analizzare formule quantificate universalmente né si deve tener conto dell'uguaglianza come simbolo logico, dopo un numero finito di passi si sono analizzate tutte le sottoformule fino ad arrivare alle formule elementari o negazioni di elementari e ulteriori analisi non farebbero cambiare l'albero anche se questo non è chiuso.

Si dirà **completato** un albero di confutazione proposizionale che non ha estensioni proprie mediante le regole per l'analisi di una formula alla volta ora viste, oppure l'unione di una successione infinita di alberi non completati costruita usando la strategia. Si noti che, se si parte da un insieme finito di formule, a causa dell'osservazione precedente, un albero completato non può che essere del primo tipo previsto nella definizione appena data. Si osservi anche che un albero completato è del primo tipo previsto dalla definizione precedente se e solo se è finito.

Nella nuova situazione valgono i seguenti

Teorema debole di completezza proposizionale per il metodo degli alberi proposizionali di confutazione a blocchi. Un insieme di una qualsiasi cardinalità (anche più che numerabile) di formule proposizionali non è proposizionalmente soddisfacibile se e solo se l'albero unione di una successione di alberi proposizionali di confutazione a blocchi costruita secondo la strategia a partire dall'insieme di formule dato è chiuso.

TRACCIA DI DIMOSTRAZIONE. La direzione dalla soddisfacibilità proposizionale al non avere albero unione chiuso è conseguenza del fatto che le regole R'_1 e R_2 preservano la soddisfacibilità proposizionale. Nell'altra direzione, il risultato dipende dal fatto che, assegnando il valore vero alle formule elementari presenti in un ramo aperto dell'albero unione, si ottiene una valutazione proposizionale che rende vere tutte le formule del ramo ed in particolare quelle della radice, sicché l'insieme dato di formule è proposizionalmente soddisfacibile.

Teorema di compattezza proposizionale. Un insieme di formule proposizionali è proposizionalmente soddisfacibile se e solo se ogni suo sottinsieme finito è proposizionalmente soddisfacibile.

TRACCIA DI DIMOSTRAZIONE. La direzione dalla proposizionale soddisfacibilità di un insieme a quella di un suo sottinsieme, in particolare finito, è banale. Nell'altra direzione, la dimostrazione parte notando che le regole R'_1 e R_2 preservano la finita soddisfacibilità proposizionale, sicché l'albero unione della successione di alberi proposizionali di confutazione a blocchi costruita secondo la strategia a partire dall'insieme di formule dato è aperto. Così la radice è un insieme proposizionalmente soddisfacibile, come si voleva.

Teorema di completezza proposizionale per il metodo degli alberi proposizionali di confutazione a blocchi. Un insieme anche più che numerabile di formule proposizionali non è proposizionalmente soddisfacibile se e solo se nella successione degli alberi proposizionali di confutazione a blocchi costruita secondo la strategia ce ne è uno chiuso.

TRACCIA DI DIMOSTRAZIONE. Il fatto che le regole preservano la soddisfacibilità proposizionale comporta che se un albero della successione è chiuso la radice non è proposizionalmente soddisfacibile. Nell'altra direzione, per il teorema di compattezza proposizionale, se l'insieme di formule dato non è proposizionalmente soddisfacibile allora c'è un suo sottinsieme finito che non è proposizionalmente soddisfacibile; nella successione di alberi proposizionali di confutazione a blocchi costruiti a partire da questo insieme finito ce ne sarà uno, T_i^, chiuso che precederà o sarà quello completato (se quello completato non fosse chiuso l'insieme delle formule nella radice sarebbe soddisfacibile); e poiché ciascuno dei nodi del corrispondente albero T_i, costruito a partire dall'insieme iniziale di formule, conterrà un nodo di T_i^ di ugual livello, anche T_i dovrà essere chiuso.

Teorema di completezza proposizionale per il metodo degli alberi proposizionali di confutazione formula per formula per insiemi al più numerabili. Un insieme al più numerabile di formule è proposizionalmente soddisfacibile se e solo se un albero proposizionale di confutazione formula per formula completato ha almeno un ramo aperto.

TRACCIA DI DIMOSTRAZIONE. Nella direzione dalla soddisfacibilità al fatto che l'albero proposizionale completato sia aperto è banale perché le regole che si usano ora preservano la soddisfacibilità proposizionale essendo solo la parte proposizionale di quelle che si usavano prima.

Nell'altra direzione dato un ramo aperto dell'albero proposizionale di confutazione completato bisogna ancora costrire una valutazione proposizionale, che renda vere tutte le formule del ramo aperto. Una valutazione proposizionale utile in questo caso è quella che associa il valore vero esattamente a tutte le formule elementari che occorrono nel ramo aperto. E' facile vedere, per induzione sulla costruzione delle formule proposizionali, che tutte le formule che occorrono nel ramo aperto sono proposizionalmente vere in questa valutazione, e, in particolare, lo sono le formule nella radice.

Nel caso in cui l'insieme che si vuol analizzare sia finito, il teorema precedente si specifica nel seguente

Corollario di completezza proposizionale per il metodo degli alberi proposizionali di confutazione formula per formula per insiemi finiti. Un insieme finito di formule proposizionali è proposizionalmente soddisfacibile se e solo se l'albero proposizionale di confutazione formula per formula completato (che è finito) ha almeno un ramo aperto.

Il corollario di completezza appena visto porta a concludere che il metodo di controllo della soddisfacibilità proposizionale di un insieme finito di formule proposizionali mediante gli alberi proposizionali di confutazione formula per formula è decidibile, cioè porta, dopo un numero finito di passi, a decidere se l'insieme di formule di partenza è proposizionalmente soddisfacibile o meno. D'altra parte la possibilità di decidere la soddisfacibilità proposizionale di un insieme finito di formule proposizionali (il che equivale alla soddisfacibilità proposizionale dalla formula proposizionale congiunzione delle formule dell'insieme) è cosa ben nota, perché si può raggiungere anche utilizzando la tavola di verità relativa alla congiunzione di quelle formule attribuendo come valori delle variabili d'ingresso tutte le possibili attribuzioni di valori di verità alle formule elementari che occorrono nelle formule date inizialmente.

Si noti che anche per la **dimostrazione naturale** si può dare una versione **proposizionale**, semplicemente utilizzando solo le regole del $\neg\neg$, $\wedge$, e $\neg\wedge$.

Ancora si vogliono introdurre la **dimostrazione proposizionale** e la **deduzione proposizionale**. Queste saranno successioni finite di formule come le dimostrazioni e le deduzioni, rispettivamente, con la sola differenza che ora tra gli assiomi si accettano solo quelli dei primi tre schemi introdotti.

Anche ora valgono i teoremi di complettezza che legano, in entrambe le direzioni, la validità proposizionale con la dimostrabilità proposizionale e la conseguenza logica proposizionale con la deducibilità proposizionale.

Concludiamo questa sezione indicando i legami tra le nozioni proposizionali ora introdotte e le corrispondenti nozioni viste prima, la cui dimostrazione è lasciata come (facile) esercizio. Si noti che non vale il viceversa delle implicazioni indicate.

Teorema. Sia φ una formula proposizionale.
- Se φ è proposizionalmente valida allora φ è valida.
- Se φ è soddisfacibile allora φ è proposizionalmente soddisfacibile.
- S φ ha albero proposizionale chiuso allora φ ha albero chiuso
- Se φ è proposizionalmente dimostrabile allora φ è dimostrabile.
- Se φ è proposizionalmente deducibile da Φ allora φ è deducibile da Φ.

41. FORME NORMALI

In questa sezione assumiamo che i simboli logici del linguaggio siano $\neg \wedge \vee \forall \exists$.
Teorema. Ogni formula è logicamente equivalente (vera nelle stesse interpretazioni) a una formula i cui eventuali simboli di negazione hanno per raggio d'azione solo formule atomiche (una tale formula viene detta formula con negazioni spinte all'interno).
DIMOSTRAZIONE. Per induzione sulla costruzione di una formula φ.
Se φ è atomica non ci sono simboli di negazione e non c'e nulla da dimostrare.
Se φ è del tipo $\neg\alpha$ allora se α è atomica siamo a posto. Altrimenti, se α è del tipo $\neg\beta$ allora $\neg\alpha$ è $\neg\neg\beta$ e questa formula è logicamente equivalente a β che, a sua volta, per ipotesi induttiva è logicamente equivalente ad una formula del tipo voluto. Se invece α è del tipo $\wedge\beta\gamma$ allora $\neg\alpha$ è $\neg\wedge\beta\gamma$ e questa formula è logicamente equivalente alla formula $\vee\neg\beta\neg\gamma$ che, a sua volta, per ipotesi induttiva applicata alle formule $\neg\beta$ e $\neg\gamma$, è equivalente ad una formula del tipo voluto. Se poi α è del tipo $\vee\beta\gamma$ allora $\neg\alpha$ è $\neg\vee\beta\gamma$ e questa formula è logicamente equivalente alla formula $\wedge\neg\beta\neg\gamma$ che, a sua volta, per ipotesi induttiva applicata alle formule $\neg\beta$ e $\neg\gamma$, è equivalente ad una formula del tipo voluto. Ancora, se α è del tipo $\forall x\beta$ allora $\neg\alpha$ è $\neg\forall x\beta$ e questa formula è logicamente equivalente alla formula $\exists x\neg\beta$ che, a sua volta, per ipotesi induttiva applicata alla formula $\neg\beta$, è equivalente ad una formula del tipo voluto. Infinfe se α è del tipo $\exists x\beta$ allora $\neg\alpha$ è $\neg\exists x\beta$ e questa formula è logicamente equivalente alla formula $\forall x\neg\beta$ che, a sua volta, per ipotesi induttiva applicata alla formula $\neg\beta$, è equivalente ad una formula del tipo voluto. Ciò completa la dimostrazione nel caso che φ sia del tipo $\neg\alpha$.
Se φ è di un altro tipo allora l'applicazione dell'ipotesi induttiva dà immediatamente il risultato voluto.

Teorema. Ogni formula φ, con negazioni spinte all'interno e con la variabile che segue immediatamente un quantificatore diversa dalla variabile che segue immediatamente un altro quantificatore e diversa dalle variabili che occorrono libere, è logicamente equivalente ad una formula del tipo $Q_1x_1....Q_nx_n\varphi'$, dove ogni Q_i, i=1,...,n (n può anche essere 0), è un quantificatore o esistenziale o universale (i quantificatori esitenziali precedono i quantidicatori universali per i quali far ciò è possibile senza perdere l'equivalenza logica), e φ' è una formula in cui non occorrono quantificatori (una tale formula.$Q_1x_1....Q_nx_n\alpha$ è detta formula in **forma prenessa**)
DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è per induzione sulla costruzione di φ.
Se φ è atomica è già in forma prenessa.
Se φ è del tipo $\neg\alpha$ allora è negazione di atomica, per l'ipotesi che le negazioni siano spinte all'interno, ed è già in forma prenessa.
Se φ è del tipo $\wedge\alpha\beta$ allora è equivalente ad una formula del tipo $\wedge Q_1x_1...Q_nx_n\alpha'$ $Q'_1y_1...Q'_my_m\beta'$, per ipotesi induttiva applicata alle formule α e β. Ci sono da considerare i seguenti 4 casi.
- Se Q_1 è $\exists$ allora si può sfruttare l'equivalenza logica $((\exists x_1\gamma)\wedge\delta)\leftrightarrow(\exists x_1(\gamma\wedge\delta))$, dove x_1 non deve occorrere libera in δ, prendendo $Q_2x_2.. ..Q_nx_n\alpha'$ come γ e $Q'_1y_1...Q'_my_m\beta'$ come δ e osservando che, in effetti, x_1 non occorre (libera) in $Q'_1y_1...Q'_my_m\beta'$ grazie alle ipotesi formulate sulle variabili che seguono i quantificatori.

- Se invece Q_1 è $\forall$ e Q'_1 è $\exists$, si sfrutta la stessa equivalenza logica, ma questa volta con $Q'_2y_2...Q'_my_m\beta'$ come γ e $Q_1x_1...Q_nx_n\alpha'$ come δ osservando che ora y_1 non occorre in $Q_1x_1...Q_nx_n\alpha'$.
- Se Q_1 e Q'_1 sono $\forall$ allora, se nella successione $Q_1x_1...Q_nx_n$ il primo quantificatore esistenziale occorre con indice minore od uguale all'indice del primo quantificatore esistenziale nella successione $Q'_1y_1...Q'_my_m$, si sfrutti l'equivalenza logica $((\forall x_1\gamma)\wedge\delta)\leftrightarrow(\forall x_1(\gamma\wedge\delta))$, dove x_1 non deve occorrere libera in δ, prendendo $Q_2x_2...Q_nx_n\alpha'$ come γ e $Q'_1y_1...Q'_my_m\beta'$ come δ e osservando che x_1 non occorre (libera) in $Q'_1y_1...Q'_my_m\beta'$.
- Se non si è in nessuno dei 3 casi precedenti, si sfrutti ancora l'equivalenza logica $((\forall x_1\gamma)\wedge\delta)\leftrightarrow(\forall x_1(\gamma\wedge\delta))$, ma con $Q'_2y_2...Q'_my_m\beta'$ come γ e $Q_1x_1...Q_nx_n\alpha'$ come δ osservando che ora y_1 non occorre in $Q_1x_1.. ..Q_nx_n\alpha'$.

Dopo l'applicazione della trasformazione della formula φ di partenza secondo quanto previsto in uno dei 4 casi appena visti, ci si tro–va in un caso del tutto analogo al precedente, ma con un quan–ti–ficatore di meno in una delle due successioni finite di quantificatori. Sicché si può riapplicare il metodo visto fino a trasportare tutti i quantificatori di entrambe le successioni davanti al simbolo $\wedge$, mantenendo l'equivelenza logica tra la formula φ e quanto si è ottenuto alla fine del processo.

Proseguendo la dimostrazione per induzione sulla costruzione della formula φ, si supponga ora che sia del tipo $\vee\alpha\beta$. In questo caso si ottiene il risultato con una argomentazione del tutto analoga a quella appena svolta nel caso che φ sia del tipo $\wedge\alpha\beta$ con l'avvertenza di sotituire ovunque il connettivo $\vee$ al posto di $\wedge$.

Rimane da considerare il caso in cui la formula φ inizi con un quantificatore, cioè sia del tipo $Qx\alpha$. Per ipotesi induttiva α può essere considerata già in forma prenessa, sicché anche $Qx\alpha$, che è φ, lo è.

Ciò conclude la dimostrazione.

Dimostriamo ora che

Teorema. Una formula φ senza quantificatori e con negazioni spinte all'interno è logicamente equivalente a una congiunzione di disgiunzioni di formule o atomiche o negazioni di atomiche; una tale formula è detta in forma normale congiuntiva (Si noti che qui si considerano congiunzioni di un numero finito arbitrario di formule, da una in su, come pure disgiunzioni di un numero finito arbitrario di formula, ancora da una in su).

DIMOSTRAZIONE. Ancora la dimostrazione è per induzione sulla costruzione della formula φ (cioè sulla profondità della formula φ).

Se φ è atomica è una congiunzione, con una sola formula, di una disgiunzione, con una sola formula, di una formula atomica, come si voleva.

Se φ è del tipo $\neg\alpha$ per le ipotesi fatte α è atomica e φ è una congiunzione, con una sola formula, di una disgiunzione, con una sola formula, di una negazione di formula atomica, come si voleva.

Se φ è del tipo $\wedge\alpha\beta$, con α e β del tipo voluto per ipotesi induttiva, allora ache φ è una congiunzione di disgiunzioni di formule o atomiche o negazioni di atomiche, sicché il risultato è già raggiunto.

Se φ è del tipo $\vee\alpha\beta$, con α e β del tipo voluto per ipotesi induttiva, può succedere che sia α e che β siano congiunzioni di una sola formula ciascuna, allora queste due formule sono disgiunzioni di formule o atomiche o negazioni di atomiche, cosicché $\vee\alpha\beta$ è una disgiunzione di formule o atomiche o negazioni di atomiche, ed è anche una congiunzione, di una sola formula, di disgiunzioni di formule o atomiche o negazioni di atomiche, come si voleva. Altrimenti almeno una delle due formule α o β, diciamo α senza perdita di generalità, è esprimibile come $\wedge\gamma\delta$, sicché φ è del tipo $\vee\wedge\gamma\delta\beta$. Questa, in base alla nota formula valida $((\alpha\wedge\beta)\vee\psi)\leftrightarrow((\alpha\vee\psi)\wedge(\beta\vee\psi))$ (distributività), è logicamente equivalente a $\wedge\vee\gamma\beta\vee\delta\beta$. Quest'ultima formula forse non è ancora in forma normale congiuntiva, ma le formule $\vee\gamma\beta$ e $\vee\delta\beta$ sono ancora del tipo di φ, e entrambe hanno, in γ e in δ rispettivamente, meno congiunti di quanti erano in α. Ripetendo il passaggio precedente ci si ridurrà alla fine a disgiunzioni seguite da congiunzioni di un solo elemento ed allora, in base all'osservazione fatta prima in tale evenienza, si sarà raggiunta ancora una formula congiuntiva.

Poiché si è assunto che in φ non occorrano quantificatori, i possibili tipi per φ sono stati tutti considerati e la dimostrazione è conclusa.

Analogamente si dimostra anche il seguente

Teorema. Una formula φ senza quantificatori e con negazioni spinte all'interno è logicamente equivalente a una disgiunzione di congiunzioni di formule o atomiche o negazioni di atomiche; una tale formula è detta in forma normale disgiuntiva (Si noti, ancora, che qui si considerano congiunzioni di un numero finito arbitrario di formule, da una in su, come pure disgiunzioni di un numero finito arbitrario di formula, ancora da una in su).

DIMOSTRAZIONE. Del tutto analoga alla precedente, scambiando i ruoli di $\wedge$ e $\vee$, e rifacendosi alla formula valida $((\alpha\vee\beta)\wedge\psi)\leftrightarrow((\alpha\wedge\psi)\vee(\beta\wedge\psi))$ (distributività).

Quanto dimostrato ci permette di concludere affermando che

Teorema. Ogni formula è logicamente equivalente sia ad una formula in forma prenessa normale congiuntiva, che ad una formula in forma prenessa normale disgiuntiva.

L'interesse per questi risultati sta nelle seguenti osservazioni.

OSSERVAZIONE 1. Una formula in forma prenessa normale congiuntiva è valida se in ogni congiunto, che è una disgiunzione, occorre sia una formula che la sua negazione. Infatti allora ogni congiunto è valido e anche la congiunzione sarà valida e la quantificazione, sia universale che esistenziale, di una formula valida è una formula valida.

OSSERVAZIONE 2. Una formula in forma prenessa normale disgiuntiva è non soddisfacibile se in ogni disgiunto, che è una congiunzione, occorre sia una formula che la sua negazione. Infatti allora ogni disgiunto è non soddisfacibile e anche la disgiunzione sarà non soddisfacibile e la quantificazione, sia universale che esistenziale, di una formula non soddisfacibile è una formula non soddisfacibile.

OSSERVAZIONE 3. Se si considerano le formule proposizionali, permangono le nozioni di formula con le negazioni spinte all'interno, di formula normale congiuntiva e di formula normale disgiuntiva, non quella di formula prenessa. In questa situazione i risultati delle due osservazioni precedenti si mantengono, ma riferiti alla validità proposizionale e alla non soddisfacibilità proposizionale, anzi si rafforzano, perché le condizioni ivi espresse non sono solo sufficienti, ma anche necessarie (come si vede facilmente costruendo opportune valutazioni proposizionali).

E' facile conseguenza di quanto precede che da una forma normale congiuntiva si possa passare ad una forma normale disgiuntiva e viceversa, dal momento che anche una particolare forma normale è una formula che può essere espressa in modo logicamente equivalente nella forma voluta. Per passare da una forma normale all'altra si utilizzeranno o la distributività della congiunzione rispetto alla disgiunzione o la distributività della disgiunzione rispetto alla congiunzione, come è stato fatto nelle dimostrazioni dei risultati visti.

Tuttavia è da osservare che la quantità di calcoli formali per eseguire un tale passaggio è esponenziale nel numero delle formule atomiche o negazioni di atomiche. Così, per controllare la non soddisfacibilità di una formula in forma normale congiuntiva, invece di trasformarla in forma normale disgiuntiva e poi controllare per ispezione sintattica la sua non soddisfacibilità nel modo banale detto nell'ultima osservazione, si preferisce elaborare una diversa tecnica (metodo di risoluzione) che permetta un controllo sintattico diretto della sua non soddisfacibilità (in modo non altrettanto banale come il controllo della non soddisfacibilità di una formula in forma normale disgiuntiva) ma con meno calcoli della trasformazione di una forma normale nell'altra.

In quanto appena osservato, si è parlato di non soddisfacibilità di una formula in forma normale congiuntiva poiché questa è la situazione che capita di incontrare più frequentemente. Infatti, volendo mostrare che da un certo numero finito di formule $\varphi_1,...,\varphi_n$ segue logicamente la formula φ ($\varphi_1,...,\varphi_n|=\varphi$) normalmente si ricorre a mostrare la non soddisfacibilità della formula $\varphi_1\wedge...\wedge\varphi_n\wedge\neg\varphi$, che, essendo una congiunzione, è facile trasformare in forma prenessa normale congiuntiva: ecco l'interesse alla non soddisfacibilità di una formula in forma normale congiuntiva.

42. FUNZIONI DI SKOLEM.

E' facile vedere che in una formula prenessa lo scambio d'ordine di due quantificatori consecutivi dello stesso tipo (o entrambi universali, o entrambi esistenziali) porta ad un'altra formula prenessa logicamente equivalente alla prima. Ciò che non si può fare è lo scambio di quantificatori consecutivi di tipo diverso, poiché in tal caso, in genere, si perde l'equivalenza logica. In effetti l'affermazione che "esista qualcosa tale che, qualunque sia un secondo elemento, la coppia ordinata dei due soddisfi una certa proprietà", è ben diversa dall'affermazione che "per ogni elemento ce ne è un secondo tale che la coppia ordinata dei due soddisfi quella fissata proprietà": nel primo caso l'elemento di cui si afferma l'esistenza è unico per tutti i corrispondenti, mentre nel secondo caso l'elemento di cui si afferma l'esistenza può cambiare a seconda dell'elemento a cui viene associato. Un facile esempio di queste situazioni è il seguente. Per ogni numero naturale esiste un numero naturale maggiore di quello, e quello che diciamo esserci cambia al cambiare del primo numero di cui deve essere maggiore. Mentre questa affermazione è vera, la seguente è falsa: esiste un numero naturale maggiore di tutti i numeri naturali.

Per rappresentare adeguatamente la situazione appena analizzata di coppie di quantificatori consecutivi non dello stesso tipo, e per superare le difficoltà che essa genera nella riconoscere il valore di verità di una formula in forma prenessa, Skolem ha pensato di evidenziare da quali altre variabili dipende una variabile quantificata esistenzialmente, arrivando a trasformare la formula data in una senza quantificatori esistenziali equisoddisfacibile alla formula iniziale.

Concretamente, l'idea è di eliminare il primo quantificatore esistenziale in una formula prenessa con la variabile che lo segue immediatamente, e sostituire a tutte le altre occorrenze di quella variabile, ora libere nella formula che segue, un termine costituito da un nuovo (che non è nel linguaggio della formula che si sta trasformando) simbolo per funzione, di arietà uguale al numero della variabili (tutte quantificate univer-salmente) che precedono il quantificatore eliminato, seguito ordinatamente dalle stesse variabili.

Così la formula $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \alpha(x_1,\ldots,x_n,y)$ diviene la formula $\forall x_1 \ldots \forall x_n \alpha(x_1,\ldots,x_n, g(x_1,\ldots,x_n))$ dove g è un nuovo simbolo di funzione dell'arietà indicata n. g è detto un **simbolo per funzione di Skolem** per la formula $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \alpha(x_1,\ldots,x_n,y)$. E' chiaro che ripetendo questa operazione applicandola sempre al primo quantifcatore esistenziale nella successione dei quantificatori all'inizio di una formula prenessa, si perviene ad una formula senza quantificatori esistenziali.

Per mostrare che queste operazioni mantengono l'equisoddisfacibilità si dimostra il seguente

Teorema. Se la formula $\forall x_1 \ldots \forall x_n \alpha(x_1,\ldots,x_n,g(x_1,\ldots,x_n))$ è vera in una realizzazione σ, allora anche la formula $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \alpha(x_1,\ldots,x_n, y)$ è vera nella stessa realizzazione. D'altra parte, se $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y\ \alpha(x_1,\ldots,x_n,y)$ è soddisfacibile, allora anche $\forall x_1 \ldots \forall x_n\ \alpha(x_1,\ldots,x_n,g(x_1,\ldots,x_n))$ è soddisfacibile, dove g è un simbolo di funzione n-ario che non occorre nella prima formula. Ciò vale anche quando n è zero, e in tal caso il simbolo per funzione g sarà 0-ario, cioè un simbolo per costante.

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione è semplice. Per facilità di scrittura si indichi con t il termine $g(x_1,\ldots,x_n)$. Sappiamo che $\forall x_1 \ldots \forall x_n \alpha(x_1,\ldots,x_n,y/t)^{\sigma}$ è vera se e solo se $\forall x_1 \ldots \forall x_n \alpha(x_1,\ldots,x_n,y)^{\sigma(y/t^{\sigma})}$.

Ma l'esistenza di un elemento a dell'universo, in questo caso $a=t^{\sigma}$, tale che $\forall x_1 \ldots \forall x_n \alpha(x_1,\ldots,x_n,y)^{\sigma(y/a)}$ è vero equivale, per definizione, alla verità di $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \alpha(x_1,\ldots, x_n,y)^{\sigma}$.

Per dimostrare la seconda affermazione, sia σ una realizzazione che rende vera $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \alpha(x_1,\ldots,x_n, y)$; tale realizzazione esiste poiché $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \alpha(x_1,\ldots,x_n, y)$ è soddisfacibile. Così, per ogni n-upla ordinata di elementi dell'universo della realizzazione $(a_1,\ldots,a_n)$, c'è almeno un elemento b, sempre appartenente all'universo della realizzazione, tale che $\alpha^{\sigma(x_1/a_1,\ldots,x_n/a_n,y/b)}$ è vera. Tra gli elementi così ottenuti in corrispondenza di ciascuna n-upla ordinata $(a_1,\ldots,a_n)$, mediante un'applicazione dell'assioma della scelta, se ne scelga uno solo, e lo si indichi con b_0. Si espanda ora la realizzazione σ, adatta al linguaggio $\mathfrak{L}$, ad una realizzazione σ', adatta al linguaggio $\mathfrak{L}'$ ottenuto da $\mathfrak{L}$ aggiungenne che ad una qualsiasi n-upla ordinata dell'universo ($a_1,...,a_n$) associa proprio l'elemento b_0. Così, per definizione, b_0 è proprio $g(x_1,\dots,x_n)^{\sigma'(x_1/a_1,..,x_n/a_n)}$, ed è vera $\alpha(x_1,...,x_n,g(x_1,...,x_n))^{\sigma'(x_1/a_1,...,x_n/a_n)}$ per ogni n-upla ordinata dell'universo $a_1,...,a_n$, cosicché è vera $\forall x_1...\forall x_n\alpha(x_1,...,x_n,g(x_1,...,x_n))^{\sigma'}$, e σ' è la realizzazione che si cercava per dire che $\forall x_1...\forall x_n\alpha(x_1,...,x_n,g(x_1,...,x_n))$ è soddisfacibile.

Combinando questo risultato con quelli della sezione precedente, si può affermare che

Teorema. Una formula è soddisfacibile se e solo se lo è una opportuna altra formula, ottenuta dalla prima nei modi descritti, che è in forma normale prenessa (congiuntiva o disgiuntiva) e che è senza quantificatori esistenziali.

Proprio l'essere riusciti ad eleminare i quantificatori esistenziali da una formula in forma prenessa permetterà di ridurre la soddisfacibilità o meno di una formula φ in tale forma alla soddisfacibilità proposizionale o meno di certi insiemi di formule senza quantificatori ottenuti da φ levando i quantificatori universali ed operando opportune sostituzioni di termini per le variabili.

Tutto ciò sarà studiato nella prossima sezione.

43. IL TEOREMA DI HERBRAND.

Come annunciato si vuol ridurre il controllo della soddisfacibilità o meno a quello della soddisfacibilità proposizionale o meno, attratti dalla decidibilità del secondo controllo.

Si noti che la soddisfacibilita' proposizionale non solo non considera la quantificazione, ma neppure la costruzione delle formule atomiche, sicché, ad esempio, dal punto di vista proposizionale, la formula $=tt$ (con t termine qualsiasi) sarà o vera o falsa, mentre il considerare $=$ come simbolo logico fa si che debba essere solo vera. Pertanto in quello che si farà in seguito l'uguaglianza non sarà più considerata come simbolo logico, ma un predicato binario interpretabile in una qualsiasi relazione binaria.

Si osservi, inoltre, che una formula φ è soddisfacibile se e solo se lo è l'enunciato ottenuto da φ anteponendole la quantificazione esistenziale di ciascuna delle variabili che occorrono libere in φ.

A partire dal problema della soddisfacibilità di una formula φ, (che senza perdita di generalità, può essere pensata come una formula chiusa, un enunciato) un primo tipo di riduzione l'abbiamo già eseguito con i risultati sopra esposti: φ sarà soddisfacibile se e solo se lo è un enunciato opportuno in forma normale prenessa con quantificatori solo universali ricavato da φ come già descritto.

Sicché ora si può partire dal problema della soddisfacibilità di un enunciato φ in forma normale prenessa con quantificatori solo universali (cioè φ sarà del tipo $\forall x_1...\forall x_n\alpha$, dove α è una formula in forma normale senza quantificatori e le cui variabili libere sono solo tra $x_1...x_n$) e cercare un metodo per risolvere questo problema usando la soddisfacibilità proposizionale di un opportuno insieme di enunciati proposizionali legati all'enunciato dato.

Allo scopo, si consideri il linguaggio minimo per φ, cioè il linguaggio (in cui $=$ non è un simbolo logico) i cui simboli propri (simboli per costanti, simboli per funzioni, predicati) sono solo quelli che occorrono in φ: questo linguaggio viene detto linguaggio di φ.

Si consideri poi l'insieme di tutti i termini del linguaggio di φ in cui non occorrono variabili: questo insieme di termini viene detto **universo di Herbrand** di φ (si noti che, anche se questo è il suo nome, ora questo non è l'universo di una struttura, ma un insieme di termini nel linguaggio di φ). Si noti che l'universo di Herbrand di φ è finito se e solo se nel linguaggio di φ non ci sono simboli per funzioni.

L'**insieme degli atomi di** φ è l'insieme delle formule atomiche del linguaggio di φ in cui il predicato è seguito da tanti termini dell'universo di Herbrand di φ quanti ne vuole l'arietà del predicato.

Finalmente possiamo enunciare il seguente

Teorema di Herbrand. Una formula φ, del tipo $\forall x_1...\forall x_n\alpha$, dove α è in forma normale e senza quantificatori e le sue variabili sono tutte comprese tra le variabili $x_1...x_n$ è soddisfacibile se e solo se è proposizionalmente soddisfacibile il seguente insieme di formule $\{\alpha(x_1/t_1,..., x_n/t_n): t_1,...,t_n$ appartenenti ad H$\}$ dove H indica l'universo di Herbrand di φ.

DIMOSTRAZIONE. Dapprima si consideri l'implicazione dalla soddisfacibilità della formula data alla soddisfacibilità proposizionale dell'insieme di formule

Per definizione, se σ è una realizzazione in cui è vero l'enunciato $\forall x_1...\forall x_n\alpha$, allora per ogni scelta degli elementi $a_1,...,a_n$ nell'universo di σ risulta che $\alpha^{\sigma(x_1/a_1,...,x_n/a_n)}=V$. In particolare, se per a_1 si prende t_1^{σ}, e ...., e per a_n si prende t_n^{σ}, allora, per ogni scelta di $t_1,...,t_n$ appartenenti ad H, $\alpha^{\sigma(x_1/a_1,...,x_n/a_n)}=\alpha^{\sigma(x_1/t_1^{\sigma},...,x_n/t_n^{\sigma})}=\alpha(x_1/t_1,...,x_n/t_n)^{\sigma}$ è il vero. Così l'insieme di enunciati $\{\alpha(x_1/t_1,..., x_n/t_n): t_1,.. .,t_n$ appartenenti ad H$\}$ è soddisfacibile, e i suoi enunciati sono privi di quantificatori. Ora si cercherà di mostrare che tale insieme è proposizionalmente soddisfacibile. Allo scopo si deve costruire una valutazione scelta opportunamente sulle formule elementari che vi occorrono anche come sottoformule (nel caso presente queste sono enunciati atomici), cioè sull'insieme degli atomi di φ, in modo che renda vere tutti gli enunciati dell'insieme $\{\alpha(x_1/t_1,..., x_n/t_n): t_1,...,t_n$ appartenenti ad H$\}$. Di fatto basta stipulare che $v(\gamma)=\gamma^{\sigma}$ per ogni γ appartenente all'insieme degli atomi di φ. Allora, per le formule δ ottenute a partire dagli atomi di φ usando solo i connettivi si ha evidentemente che $v(\delta)= \delta^{\sigma}$ a causa delle uguali definizioni del signifiato delle formule più complesse ottenute mediante connettivi sia nel caso della valutazione proposizionale di una formula che nel caso di interpretazione di una formula. Così in particolare le formule dell'insieme $\{\alpha(x_1/t_1,..., x_n/t_n): t_1,..., t_n$ appartenenti ad H$\}$ sono vere nella valutazione proposizionale v, essendo vere nell'interpretazione σ, e questo insieme di formule è, dunque, proposizionalmente soddisfacibile.

Per l'altra direzione dell'implicazione, si dispone di una valutazione proposizionale v che rende veri tutti gli enunciati di $\{\alpha(x_1/t_1,.. .,x_n/t_n): t_1,...,t_n$ appartenenti ad H$\}$ e si vuole definire una realizzazione σ che renda vero l'enunciato $\forall x_1...\forall x_n\alpha$. Per universo di questa realizzazione si scelga di prendere l'universo di Herbrand. Si interpreti poi ciascun simbolo di costante in sè stesso e ciascun simbolo di funzione f n-ario nella funzione che ai termini $t_1,...,t_n$ associa il termine $ft_1,...,t_n$. Queste definizioni sono possibili proprio perché si è scelto come universo di questa realizzazione l'insieme dei termini che è l'universo di Herbrand, ed inoltre da queste definizioni segue (per induzione sulla costruzione del termine) che l'interpretazione di un termine è lui stesso. Si noti che, non essendo l'= un simbolo logico, le classi di equivalenza di termini, rispetto alla relazione tra termini t e t' di essere dichiarati uguali da una formula del tipo =tt' che deve essere interpretata nel vero, si riducono ad un solo termine.

Si definisce poi l'interpretazione di un predicato n-ario P come la relazione n-aria $\{(t_1,.. .,t_n): v(Pt_1,...,t_n)=V\}$. Dal momento che ci si sta interessando solo di enunciati, non serve precisare una attribuzione di valori alle variabili, ed abbiamo completato la definizione di una realizzazione che si può chiamare σ. Ovviamente in questa realizzazione gli atomi di φ sono interpretati esattamente come sono valutati proposizionalmente da v. Non solo ma anche gli enunciati ottenuti da questi atomi solo mediante i connettivi, per il motivo già osservato, avranno lo stesso valore sia nella valutazione prosizionale v che nella realizzazione σ. Così gli enunciati dell'insieme $\{\alpha(x_1/t_1,.. .,x_n/t_n): t_1,...,t_n$ appartenenti ad H$\}$, oltre che essere veri nella valutazione proposizionale v, saranno veri anche nella realizzazione σ. Cioè $V=\alpha(x_1/t_1,...,x_n/t_n)^{\sigma}=\alpha^{\sigma(x_1/t_1^{\sigma},...,x_n/t_n^{\sigma})}$=(poiché ciascun termine è interpretato in sè stesso) $\alpha^{\sigma(x_1/t_1,...,x_n/t_n)}$, per ogni $t_1,...,t_n$ appartenenti ad H. Ma dal momento che i termini dell'universo di Herbrand costituiscono l'universo della realizzazione σ, ne segue che $\forall x_1...\forall x_n\alpha^{\sigma}=V$, come si voleva.

La riduzione che si cercava dalla soddisfacibilità o meno alla soddisfacibilità proposizionale o meno è stata ottenuta, ma a spese dell'aumento del numero delle formule che ora possono essere divenute infinite.

Ma anche per la non soddisfacibilità proposizionale, come si è già visto, vale il

Teorema di compattezza proposizionale. Un insieme non è proposizionalmente soddisfacibile se e solo se esiste un suo sottinsieme finito che non lo è.

Questo può anche essere dimostrato come conseguenza della compattezza sintattica anche del calcolo proposizionale con il modus ponens, che dipende ancora dal fatto che le deduzioni sono successioni finite di formule, e del teorema di completezza proposizionale.

Combinando il teorema si Herbrand con la compattezza sintattica si può concludere che una formula è non soddisfacibile se e solo se esiste un sottinsieme finito di un opportuno insieme di formule che non è proposizionalmente soddisfacibile.

Ancora il risultato è quanto desiderato in una sola direzione: infatti se si trova un sottinsieme finito non proposizionalmente soddisfacibile di quell'insieme si può concludere che la formula data non è soddisfacibile, altrimenti bisognerà proseguire all'infinito con i controlli per vedere se tutti i sottinsiemi finiti sono proposizionalmente soddisfacibili.

44. LA REGOLA DI RISOLUZIONE.

Si sono cercate varie vie per arrivare a decidere mediante controlli sintattici se una formula è soddisfacibile o meno, ma ci si è sempre fermati alla semidecidibilità. In effetti ci sono risultati, che dipendono dalla teoria della computabilità, che mostrano come non si possa far di meglio, ma la presentazione di questi risultati va oltre le intenzioni di questa esposizione.

Anche accontentandosi della semidecidibilità del controllo, e considerando la direzione decidibile (cioè quella che afferma che il controllo sintattico dopo un numero finito di passi si arresta permettendo di concludere che la formula è non soddisfacibile, nel caso che essa fosse stata non soddisfacibile), i metodi visti non è detto che portino velocemente alla conclusione. Addirittura si sono introdotti certi controlli sintattici proprio perché altri portavano ad una esplosione ingovernabile dei calcoli per arrivare a concludere, pur essendo corretti e fornendo facilmente i risultati teorici cercati.

In questa ottica è da notare come le ultime tecniche introdotte si presentino interessanti.

Sia data una formula φ e si voglia vedere se essa è o meno soddisfacibile. Anzitutto, quantificando esistenzialmente le variabili libere di φ all'inizio della formula, si può passare sintatticamente ad un enunciato ψ che è soddisfacibile se e solo se lo era φ. Poi l'enunciato ψ può essere trasformato sintatticamente in un enunciato γ in forma normale prenessa (congiuntiva o disgiuntiva) soddisfacibile se e solo se lo era ψ. Ancora, attraverso l'introduzione di funzioni di Skolem, l'enunciato γ può essere trasformato sintatticamente in un enunciato δ ancora in forma normale prenessa, ma senza quantificatori esistenziali, e sempre soddisfacibile se e solo se lo era γ. Finalmente, per il teorema di Herbrand, δ è soddisfacibile se e solo se è proposizionalmente soddisfacibile un opportuno insieme Δ di enunciati in forma normale, senza quantificatori e senza variabili ottentuto con trasformazioni sintattiche da δ, anzi, per il teorema di compattezza, se e solo se ogni sottinsieme finito di Δ è proposizionalmente soddisfacibile.

Così, nella direzione decidibile, per mostrare che φ è non soddisfacibile basta mostrare che un sottinsieme finito Δ_0 di Δ non è proposizionalmente soddisfacibile. Se poi gli enunciati del sottinsieme finito Δ_0 di Δ, che sono in forma normale, fossero in forma normale congiuntiva, allora si può considerare la loro congiunzione, $\wedge\Delta_0$, che è ancora in forma normale congiuntiva, e $\wedge\Delta_0$ non è proposizionalmente soddisfacibile se e solo se non lo è il sottinsieme finito Δ_0 di Δ.

Finora i calcoli per le trasformazioni sintattiche da φ a $\wedge\Delta_0$ non sono stati eccesivamente laboriosi rispetto alle dimensioni della formula φ di partenza, con la sola riserva che non si è ancora detto come determinare il sottinsieme finito Δ_0 di Δ. Rimane da controllare la non soddisfacibilità proposizionale dell'enunciato $\wedge\Delta_0$. Se $\wedge\Delta_0$ fosse in forma normale disgiuntiva, si controllerebbe la sua non soddisfacibilità proposizionale per ispezione notando se ciascun disgiunto, che è una congiunzione, contiene sia una formula atomica che la sua negazione. Ma, per i motivi indicati, in genere $\wedge\Delta_0$ è in forma normale congiuntiva. Da un punto di vista teorico questo non è un problema perché si può trasformare l'enunciato $\wedge\Delta_0$ in uno equivalente in forma normale disgiuntiva. Il guaio è che questa trasformazione, sempre sintattica, comporta una quantità di calcoli esponenziale rispetto al numero di formule atomiche o negazioni di atomiche in $\wedge\Delta_0$. Si cercherà allora un altro metodo per controllare la non soddisfacibilità proposizionale di un enunciato senza quantificatori in forma normale congiuntiva che richieda, in genere, meno calcoli della trasformazione dell'enunciato in forma normale congiuntiva in uno in forma normale disgiuntiva.

Poiché si dovranno considerare spesso enunciati in forma normale congiuintiva senza quantificatori, per facilitare l'esposizione, è opportuno introdurre una nomenclatura conveniente. Un enunciato in forma normale congiuntiva è una congiunzione di congiunti che sono disgiunzioni tra disgiunti ciascuno dei quali è o un enunciato atomico o la negazione di un enunciato atomico. Si dirà **letterale** un enunciato che sia o atomico o la negazione di un enunciato atomico. Si chiamerà **clausola** un insiene di letterali. Con questa terminologia un enunciato in forma normale congiuntiva è una congiunzione in cui ciascun congiunto è la disgiunzione tra gli elementi di una clausola composta da letterali.

Si osservi che, dal momento che una disgiunzione di letterali che contiene una formula atomica e la sua negazione è proposizionalmente valida, una congiunzione di disgiunzioni di clausole è proposizionalmente equivalente alla congiunzione delle disgiunzioni di quelle stesse clausole meno quelle cui compare sia un enunciato atomico che la sua negazione. Così il problema di controllare la non soddisfacibilità proposizionale di un enunciato senza quantificatori in forma normale congiuntiva si riduce all'analogo problema per l'enunciato dello stesso tipo ottenuto dal primo omettendo le clausole che contengono sia un enunciato atomico che la sua negazione (se ogni clausola della congiunzione contiene un enunciato atomico e la sua negazione ci si riduce alla congiunzione vuota che va ritenuta valida) .

Nel seguito sarà utile la seguente notazione. Sia α è la congiunzione per i che va da 0 a j-1 delle disgiunzioni delle clausole μ_i (α è $\wedge\{\vee\mu_i: i<j\}$) e nessuna clausola contenga sia un formula atomica che la sua negazione. Sia λ un enunciato atomico tale che esitono almeno due indici i e i' minori di j tali che $\lambda\in\mu_i$ e $\neg\lambda\in\mu_{i'}$. Si indichino con $\alpha_\lambda{}^+$ l'enunciato $\wedge\{\vee\mu_i: i<j$ e $\lambda\in\mu_i\}$, con $\alpha_\lambda{}^-$ l'enunciato $\wedge\{\vee\mu_i: i<j$ e $\neg\lambda\in\mu_i\}$, e con $\alpha_\lambda{}^0$ l'enunciato $\wedge\{\vee\mu_i: i<j$ e $\lambda\notin\mu_i$ e $\neg\lambda\notin\mu_i\}$. Ovviamente α è l'enunciato $\alpha_\lambda{}^0\wedge\alpha_\lambda{}^+\wedge\alpha_\lambda{}^-$.

Il metodo che si cerca si basa sulla seguente regola di trasformazione sintattica di un enunciato in forma normale congiuntiva, chiamata

Regola di risoluzione. Sia α un enunciato senza quantificatori in forma normale congiuntiva e in ciascuna sua clausola non occorra sia un enunciato atomico che la sua negazione. Sia λ un enunciato atomico tale che esistono clausole di α che lo contengono e clausole di α che contengono la sua negazione. La regola applicata ad α rispetto all'enunciato atomico λ fa passare al nuovo enunciato $\alpha_\lambda{}^0\wedge(\wedge\{\vee(\mu_{i_1}-\{\lambda\})\cup(\mu_{i_2}-\{\neg\lambda\}): \mu_{i_1}$ è una clausola di $\alpha_\lambda{}^+$ e μ_{i_2} è una clausola di $\alpha_\lambda{}^-\})$.

La disgiunzione $\vee((\mu_1-\{\lambda\})\cup(\mu_2-\{\neg\lambda\}))$ viene detta il **risolvente** delle due clausole μ_1 e μ_2 rispetto all'enunciato atomico λ, e verrà indicata con $res_\lambda(\mu_1,\mu_2)$. Inoltre si indicherà con $RES_\lambda(\alpha)$ l'enunciato ottenuto applicando all'enunciato α la regola di risoluzione rispetto all'enunciato atomico λ. Con questa notazione si può scrivere che $RES_\lambda(\alpha)$ è $\alpha_\lambda{}^0\wedge(\wedge\{res_\lambda(\mu_{i_1},\mu_{i_2}): \mu_{i_1}$ sta in $\alpha_\lambda{}^+$ e μ_{i_2} sta in $\alpha_\lambda{}^-\})$.

Si noti che λ non occorre in $RES_\lambda(\alpha)$, e che questo enunciato è ancora in forma normale congiuntiva, senza quantificatori e senza clausole che contengano un enunciato atomico e la sua negazione.

Si mostrerà che la regola di risoluzione preserva la soddisfacibilità proposizionale e che, se si perviene, applicandola iteratamente, ad una congiunzione con un congiunto vuoto, la formula iniziale non è proposizionalmente soddisfacibile. Di più si mostrerà che se l'enunciato iniziale non è proposizionalmente soddisfacibile, allora si perverrà ad una congiunzione con un congiunto vuoto.

Per far vedere quanto affermato, si inizia mostrando il seguente

Lemma. Il risolvente rispetto a λ di due clausole μ_1 e μ_2, che contengono la prima λ e l'altra $\neg\lambda$, è conseguenza logica proposizionale dei due enunciati $\vee\mu_1$ e $\vee\mu_2$.

DIMOSTRAZIONE. Sia v una qualsiasi valutazione proposizionale che rende veri gli enunciati $\vee\mu_1$ e $\vee\mu_2$. Essendo disgiunzioni, gli enunciati $\vee\mu_1$ e $\vee\mu_2$ sono veri in v se ciascuno ha almeno un disgiunto, che è un letterale, vero in v. Si possono presentare solo due possibilità sul valore attribuito dalla valutazione proposizionale v all'enunciato atomico λ: o $v(\lambda)$= V o $v(\lambda)$=F. Nel primo caso $v(\neg\lambda)$ è falso per cui, affinché $v(\vee\mu_2)$ sia vero, come deve essere, deve esserci un altro letterale, diciamo λ', in μ_2 tale che $v(\lambda')$ è vero. Poiché il letterale λ' occorre anche nel risolvente $\vee((\mu_1-\{\lambda\})\cup(\mu_2-\{\neg\lambda\}))$ questo è vero in v, cioè $v(\vee((\mu_1-\{\lambda\})\cup(\mu_2-\{\neg\lambda\})))$=V. Del tutto analogo è il secondo caso, ora essendo $v(\lambda)$=F sarà la clausola μ_1 quella in cui dovrà occorrere un altro letterale, diciamo λ', tale che $v(\lambda')$ è vero. Ancora sarà $v(\vee((\mu_1-\{\lambda\})\cup(\mu_2-\{\neg\lambda\})))$=V, poiché il letterale λ' occorre anche nel risolvente $\vee((\mu_1-\{\lambda\})\cup (\mu_2-\{\neg\lambda\}))$. In entrambi i casi il risolvente è vero in una qualsiasi valutazione proposizionale che rende veri $\vee\mu_1$ e $\vee\mu_2$, sicché è conseguenza logica proposizionale di questi.

Si sfrutterà questo lemma nella dimostrazione del

Teorema di preservazione della soddisfacibilità proposizionale per la regola di risoluzione. Sia α un enunciato senza quantificatori in forma normale congiuntiva tale che in ciascuna sua clausola non occorre sia un enunciato atomico che la sua negazione. Sia λ un enunciato atomico tale che esistono clausole di α che lo contengono e clausole di α che contengono la sua negazione. L'enunciato α è proposizionalmente soddisfacibile se e solo se lo è l'enunciato $RES_\lambda(\alpha)$.

DIMOSTRAZIONE. Se α è proposizionalmente soddisfacibile esiste una valutazione proposizionale v che rende veri tutti i congiunti che, essendo disgiunzioni sono veri in quella valutazione proposizionale se ciascuno ha almeno un disgiunto, che è un letterale, vero in quella valutazione proposizionale.

Siano $\vee\mu_{i_1}$ e $\vee\mu_{i_2}$ due qualsiasi congiunti di α il primo in α_λ^+ e l'altro in α_λ^-. Per quanto appena osservato, deve essere $v(\vee\mu_{i_1})$=V e $v(\vee\mu_{i_2})$=V; sicché, per il lemma precedente, sarà anche $v(res_\lambda(\mu_{i_1},\mu_{i_2}))$=V. Allora pure $v(RES_\lambda(\alpha))=v(\alpha_\lambda^0\wedge(\wedge\{\vee((\mu_{i_1}-\{\lambda\})\cup(\mu_{i_2}-\{\neg\lambda\})): \mu_{i_1}$ è una clausola di α_λ^+ e μ_{i_2} è una clausola di $\alpha_\lambda^-\}))$=V poiché i congiunti di α_λ^0 sono anche in α (e dunque veri in v) e per gli altri congiunti si è appena fatto vedere che v li valuta veri. Così anche $RES_\lambda(\alpha)$ è proposizionalmente soddisfacibile.

Nell'altra direzione, si supponga che $RES_\lambda(\alpha)$ sia proposizionalmente soddisfacibile e sia v una valutazione proposizionale tale che $v(RES_\lambda(\alpha))$=V. Non solo v, ma anche tutte le valutazioni proposizionali che attribuiscono all'enunciato atomico λ il valore che si vuole e alle altre formule atomiche attribuiscono lo stesso valore che v attribuisce (si indichi con V l'insieme di tali valutazioni proposizionali che di fatto ha solo due elementi) rendono vero ciascun congiunto della formula $RES_\lambda(\alpha)$ poiché λ non occorre, neppure come sottoformula, in questa formula, e quindi neppure nei congiunti. Così se ci fosse un congiunto di α non vero in una valutazione proposizionale di V non può essere in α_λ^0, ma deve essere o in α_λ^+ o in α_λ^-.

Se un congiunto di α_λ^+, diciamo μ_{i*}, fosse falso in una valutazione proposizionale v* di V, ogni suo letterale, ed in particolare quelli diversi da λ, devono essere falsi nella stessa valutazione proposizionale v*. Ma allora per ogni clausola μ_{i_2} che occorre in α_λ^- deve esserci un letterale λ_{i_2} diverso da $\neg\lambda$ tale che $v^*(\lambda_{i_2})$=V, altrimenti $v^*(\vee((\mu_{i*}-\{\lambda\})\cup(\mu_{i_2}-\{\neg\lambda\})))$=F, con $\vee((\mu_{i*}-\{\lambda\})\cup(\mu_{i_2}-\{\neg\lambda\}))$ congiunto di $RES_\lambda(\alpha)$, contro l'ipotesi che $v^*(RES_\lambda(\alpha))$=V. Se ogni congiunto μ_{i_2} in α_λ^- è vero in v* a causa di un letterale λ_{i_2} diverso da $\neg\lambda$, allora rimane vero anche passando all'altra valutazione proposizionale v** di V. Ma in v** il letterale λ è vero, e così anche tutti i congiunti di α_λ^+; sicché $v^{**}(\alpha)$=V e α è proposizionalmente soddisfacibile.

Se, invece, è un congiunto di α_λ^-, chiamiamolo ancora μ_{i*}, ad essere falso in una valutazione proposizionale v* di V, ogni suo letterale, ed in particolare quelli diversi da $\neg\lambda$, ci un letterale λ_{i_1} diverso da λ tale che $v^*(\lambda_{i_1})=V$, altrimenti $v^*(\vee((\mu_{i_1}-\{\lambda\})\cup(\mu_{i^*}-\{\neg\lambda\})))=F$, con $\vee((\mu_{i_1}-\{\lambda\})\cup(\mu_{i^*}-\{\neg\lambda\}))$ congiunto di $RES_\lambda(\alpha)$, contro l'ipotesi che $v^*(RES_\lambda(\alpha))=V$. Se ogni congiunto μ_{i_1} in $\alpha_\lambda{}^+$ è vero in v^* a causa di un letterale λ_{i_2} diverso da λ, allora rimane vero anche passando all'altra valutazione proposizionale v^{**} di V. Ma in v^{**} il letterale $\neg\lambda$ è vero, e così anche tutti i congiunti di $\alpha_\lambda{}^-$; sicché $v^{**}(\alpha)=V$ e, ancora, α è proposizionalmente soddisfacibile.

Avendo mostrato che in tutti i casi possibili α è proposizionalmente soddisfacibile, anche questa direzione del teorema è conclusa e il teorema dimostrato completamente.

Poiché gli enunciati atomici che occorrono in un enunciato sono in numero finito, anche in un enunciato come α in forma normale prenessa, senza quantificatori e senza clausole con un enunciato atomico e la sua negazione, a partire da α la regola di risoluzione può essere applicata iteratamente al risultato della precedente applicazione solo un numero finito di volte, dal momento che ogni applicazione elimina dall'enunciato risultante un ulteriore enunciato atomico. Così, a partire da un enunciato α come descritto prima, applicando iteratamente la regola di risoluzione, se non si perviene ad un enunciato con una clausola vuota, si proseguirà fino a quando la regola non è più applicabile, e a quel punto si sarà pervenuti a un enunciato, che potrebbe anche essere vuoto, tale che se un letterale occorre in una sua clausola la negazione semplificata di quel letterale non occorre in nessun'altra clausola dell'enunciato (altrimenti la regola sarebbe ancora applicabile).

Se si perviene ad un enunciato $RES_\lambda(\alpha)$ con un congiunto vuoto, bisogna aver applicato la regola di risoluzione ad un enunciato α con un congiunto costituito da un unico enunciato atomico e un congiunto costituito dalla sua sola negazione. In tale situazione ogni valutazione proposizionale o rende vero uno di questi congiunti o l'altro ma non entrambi. Ma se un congiunto di una congiunzione non è vero la congiunzione è falsa. Così nel caso che si pervenga, applicando la regola di risoluzione, a un enunciato $RES_\lambda(\alpha)$ con un congiunto vuoto, la formula a cui si applica le regola deve essere falsa in ogni valutazione proposizionale, cioè non soddisfacibile proposizionalmente. Poiché la regola di risoluzione preserva la soddisfacibiltà proposizionale, come si è visto, si deve concludere che non può essere proposizionalmente soddisfacibile un enunciato partendo dal quale, con successive applicazione della regola di risoluzione, si perviene ad un enunciato con un congiunto vuoto.

D'altra parte, se non si perviene mai ad un enunciato con una clausola vuota applicando iteratamente la regola di risoluzione a partire da un enunciato del tipo voluto, si deve arrivare ad un enunciato β, eventualmente vuoto, tale che se un letterale occorre in una sua clausola la negazione semplificata di quel letterale non occorre in nessun'altra clausola dell'enunciato. Così la valutazione proposizionale, che attribuisce ad una formula atomica il valore vero se e solo se è un letterale che occorre in β (ciò va bene anche se β è l'enunciato vuoto), rende vero ogni congiunto di β, e, dunque, anche β, che così risulta soddisfacibile proposizionalmente. Poiché la regola di risoluzione preserva la soddisfacibilità proposizionale in entrambe le direzioni, anche la formula da cui si è partiti per ottenere β con iterate applicazioni della regola di risoluzione sarà soddisfacibile proposizionalmente.

In pratica, per vedere se un enunciato in forma normale congiuntiva, senza quantificatori e senza clausole con un enunciato atomico e la sua negazione, è non soddisfacibile si può seguire la seguente strategia. Si scelgono due clausole della formula data che contengano una un enunciato atomico e l'altra la sua negazione e si ottiene il risolvente relativamente a quell'enunciato. Poi si considera questo, se non è vuoto, e un'altra clausola tale che o nel risolvente o nella clausola ci sia un enunciato atomico e la sua negazione sia nell'altro, ottenendo un nuovo risolvente relativamente a quell'enunciato atomico. Si prosegue in questo modo finché è possibile, cioè finché 1) o si arriva ad una clausola vuota, 2) o la clausola ottenuta non contiene letterali la cui negazione semplificata occorra in qualche clausola iniziale, 3) o la clausola ottenuta contiene un enunciato e la sua negazione. Nel primo caso ci si arresta concludendo che la formula iniziale è non o dell'enunciato dato o ottenute successivamente riadottando la stessa procedura finché è possibile, cioè finché o si arriva ad una clausola vuota, o non si hanno più clausole a cui non è stata applicata questa procedura. In base ai risultati visti se l'enunciato di partenza è non soddisfacibile proposizionalmente si giungerà a trovare una clausola vuota, altrimenti si dovrà concludere che l'enunciato di partenza è proposizonalmente soddisfacibile.

Così si è trovato un altro metodo che porta a decidere se un enunciato senza quantificatori è proposizionalmente soddisfacibile. Come si è già detto, questo metodo ha il vantaggio di richiedere meno computazioni di altri in molti casi, anche se per analizzare certe formule, pur non soddisfacibili, la quantità di calcoli da eseguire rimane esponenziale nel numero dei letterali che occorrono nell'enunciato da analizzare.

45. BIBLIOGRAFIA.

I seguenti sono solo alcuni manuali

A. Asperti, A. Ciabattoni: *Logica a informatica*, McGrow-Hill, 1997.
J. Barwise: *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland, 1977.
J. Barwise, J. Etchemendy: *The language of first-order logic*, CSLI, 1993.
J.L. Bell, M. Machover: *A course in mathematical logic*, North Holland, 1977.
M. Ben-Ari: *Logica matematica per l'informatica*, Prentice Hall International, 1998.
E. Casari: *Introduzione alla logica*, UTET, 1997.
A. Church: *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton University Press, 1956.
M.D. Davis, R. Sigal, E.J. Weyuker: *Computability, Complexity, and Languages*, Academic Press, 1994.
H.B. Enderton: *A Mathematical Introduction to Logic*, Academic Press, 1972
W. Hodges: *Logica*, Garzanti, 1990.
S.C. Kleene: *Mathematical Logic*, Wiley, 1967.
G. Lolli: *Lezioni di logica matematica*, Boringhieri, 1978.
G. Lolli: *Cos'è la logica matematica*, Muzzio, 1992.
R.C. Lyndon: *Notes on Logic*, Van Nostrand, 1966.
J. Malitz: *Introduction to Mathematical Logic*, Springer-Verlag, 1979.
A.B. Manaster: *Completezza, Compattezza e Indecidibilità*, Bibiopolis, 1975.
Y.I. Manin: *A Course in Mathematical Logic*, Springer-Verlag, 1977.
E. Mendelson: *Introduzione alla logica matematica*, Boringhieri, 1972.
J.D. Monk: *Mathematical Logic*, Springer-Verlag, 1976.
R. Rogers: *Mathematical logic and formalized theories*, North Holland, 1971.
J.R. Shoenfield: *Logica Matematica*, Boringhieri, 1980
R.M. Smullyan: *First-Order Logic*, Springer-Verlag, 1968
P. Suppes: *Introduction to Logic*, Van Nostrand, 1957.
D van Dalen: *Logic and Stucture*, Springer-Verlag, 1983

[Attenzione, però: la cosa non è così semplice. Abbiamo appena detto che si dimostra che a partire da opportune formule ben precisate e aggiungendone altre grazie al modus ponens si ottengono tutte le formule valide, ma se uno chiede se una certa formula che ha scelto è valida, il problema diventa molto delicato. Ora si deve riconoscere se la formula fornita è nell'insieme di formule generato, ma ciò non è banale, perché l'insieme delle formule dimostrabili è precisato in modo generativo. Così, se la formula appartiene all'insieme, si comincia a costruire quell'insieme e ad un certo punto, chissà quando, si incontra la formula; mentre, se non appartiene, si continua a costruire quell'insieme delle formule valide e in nessun momento della costruzione si trova quella formula, e mai si potrà dire che non la si troverà successivamente poiché in nessun momento la costruzione è esaurita, essendo infinita la generazione dell'insieme delle formule valide. Così se la formula data non è valida con questo metodo si continuerà a cercare senza fine se la si trova tra le formule valide, e mai si arriverà ad accorgersi che non è nell'insieme delle formule valide.

Quindi ci sono dei limiti anche in questo metodo, che pur rappresentava una soluzione positiva, una potenzialità del linguaggio. Il linguaggio è adeguato per generare le formule valide, ma non sempre per rispondere se una certa formula è valida: se di fatto la formula è valida allora arriverà un momento, non si sa quando, in cui ci si accorgerà che effettivamente lo è, altrimenti, utilizzando questo metodo, non si saprà mai che non è valida se non doppo aver scorso tutte le infinite possibilità.

Le ultime considerazioni riguardavano la validità, mentre inizialmente avevamo dichiarato di volerci interessare della descrivibilità di certe strutture. Ma le due cose sono legate. Per sapere quali enunciati sono veri nelle strutture in cui valgono certi enunciati si può far ricorso agli enunciati validi. Infatti un enunciato φ è vero nelle strutture in cui sono veri gli enunciati ψ_1, ψ_2, ..., ψ_n se e solo se l'enunciato $(\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge ... \wedge \psi_n) \rightarrow \psi$ è valido (la facile dimostrazione di questa affermazione è lasciata per esercizio).

Oltre le potenzialità stiamo notando anche certi limiti del linguaggio.

I limiti e le potenzialità del linguaggio vengono anche da altri risultati della logica.

Il fatto stesso che le formule siano successioni finite di simboli, che le formule valide siano generabili con un metodo esplicito, è in contrasto stridente con la complessità che può avere una struttura, ad esempio la struttura dei numeri reali (il cui universo è più che numerabile), o la struttura delle funzioni sui numeri reali, o la teoria degli insiemi che ha elementi arbitrariamente grandi. Come mai con un controllo sintattico sulla soddisfacibilità si affermare dire qualcosa sulle teorie di mondi così grandi e complessi? Sostanzialmente perché si può dire poco, la descrizione mediante il linguaggio non è molto fine. Detto più precisamente il risultato è questo. Si riesce a far vedere che ci sono delle strutture, dei mondi, che sono non isomorfi, cioè che non solo non sono uguali, ma neppure si comportano in ugual modo, eppure, dal punto di vista della descrizione mediante il linguaggio non sono distinguibili, cioè in esse sono veri esattamente gli stessi enunciati: il linguaggio non riesce a distinguere rilevanti diversità tra strutture.

Uno dei nostri punti di partenza per introdurre un linguaggio era la volontà di descrivere una struttura. Grazie alla definizione di interpretazione abbiamo capito che, con delle difficoltà, riusciremo a dire quali sono gli enunciati veri in una struttura, ma dire ciò non è sufficiente per descrivere la struttura: ci sono strutture non isomorfe che tuttavia soddisfano esattamente gli stessi enunciati, sicché il linguaggio non riesce a distinguere strutture non isomorfe.

Si potrebbe sospettare che l'incapacità a determinare una struttura mediante degli enunciati sia dovuta al fatto che non vengono presi in considerazione tutti quelli che servono, ma non è così.

Presentiamo un esempio. Consideriamo la struttura dei numeri naturali, ciò è possibile in base all'idea che uno ha dei numeri naturali, che può variare da persona a persona. Indipendentemente da ciò, si consideri la struttura dei numeri naturali che uno preferisce. Si consideri ora l'insieme di tutti gli enunciati veri in quella struttura. Un teorema fondamentale della logica, che riguarda le strutture infinite, dice che esiste un'altra struttura, non isomorfa a quella data dei numeri naturali, magari con un universo di cardinalità diversa ed arbitrariamente grande, in cui, tuttavia, sono veri esattamente tutti gli enunciati veri nella struttura dei numeri naturali che uno ha scelto. Così queste due strutture non sono distinguibili mediante il linguaggio.

Uno potrebbe domandarsi come fare a distinguere riconoscere che due strutture non sono isomorfe se la differenza non è esprimibile attraverso il linguaggio. In effetti per dimostrare il risultato sopra presentato, si parte da tutti gli enunciati in un linguaggio adatto ad una struttura che siano veri in quella struttura (questo insieme di enunciati si chiama la **teoria** di quella struttura), e si aggiunge al linguaggio un nuovo simbolo per costante per indicare un elemento che non è nella struttura data. Poi si aggiungono alla teoria degli altri enunciati che coinvolgono il nuovo simbolo per costante in modo che ogni sottinsieme finito di essi sia vero in quella struttura se si interpreta il nuovo simbolo di costante in un elemento dell'universo della struttura (elemento che può variare da sottinsieme finito a sottinsieme finito), ma anche in modo che quelle formule non siano tutte vere nella struttura quando il simbolo per costante è interpretato in un qualsiasi elemento dell'universo. A questo punto si dimostra che c'è una struttura in cui sono veri sia gli enunciati della teoria sia tutti quelli aggiunti, e, ovviamente, la nuova struttura non può essere isomorfa a quella data. In effetti siamo riusciti a distinguere tra le due strutture mediante un linguaggio più ampio di quello dato. Ma la non distinguibilità di due strutture non isomorfe mediante il linguaggio non si limita al linguaggio dato, poiché anche con il linguaggio arricchito si può realizzare la stessa procedura e trovare strutture non isomorfe che si distinguono solo mediante un linguaggio ancora più ricco, ed inoltre non esiste un linguaggio ultimo, più ricco di tutti: ecco perché la potenza espressiva di ogni linguaggio è limitata.

Se strutture non isomorfe non sono distinguibili mediante un linguaggio formale, credete che lo siano mediante un linguaggio non formale per il quale non si sa neppure precisare cos'è esattamente il linguaggio?

Allora il linguaggio è di per sè inadeguato a descrivere strutture infinite (un altro risultato di logica ci dice che il linguaggio è in grado di descrivere con precisione le strutture finite). Questo mette in evidenza che le strutture infinite non sono caratterizzabili mediante il linguaggio formale, e tanto meno mediante il linguaggio comune, che è ancora più indeterminato. Il linguaggio comune permetterà di intuire cos'è una certa struttura infinita, suggerirà un'interpretazione di quanto afferma, ma non la preciserà. Mai nessuno chiarirà completamente la nozione di numero naturale, si descriveranno alcuni aspetti dei numeri naturali che riteniamo importanti, alcuni aspetti sui quali poi fonderemo le operazioni e il nostro studio, ma la precisazione attraverso il linguaggio di una struttura infinita è impossibile.]