ALGEBRA LINEARE CON ELEMENTI DI GEOMETRIA

modulo: ELEMENTI DI GEOMETRIA (Prof. M. Spera)

Prova scritta del 27 settembre 2011

① Nel piano euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, ampliato proiettivamente, si determini la conica $\mathscr{C}$ tale che la polare di $P: [0, 1, 1]$ sia $p: x + y + 1 = 0$, il centro di $\mathscr{C}$ sia $C: [0, 1, -1]$ e passi per $P_1: [1, 1, -2]$ e $Q: [1, 0, 0]$. Determinare la forma canonica metrica di $\mathscr{C}$, il fuoco e la direttrice, e abbozzarne il grafico.

② Nello spazio euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, si consideri il triangolo ABC di vertici $A: (0,0,0)$, $B: (1, 2, 1)$, $C: (0, 4, 0)$.
Determinare il baricentro G e l'incentro I di ABC, nonché l'equazione della bisettrice dell'angolo $\hat{B}$ (sugg. sfruttare il fatto che ABC è isoscele)

Tempo a disposizione: 1h 15m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

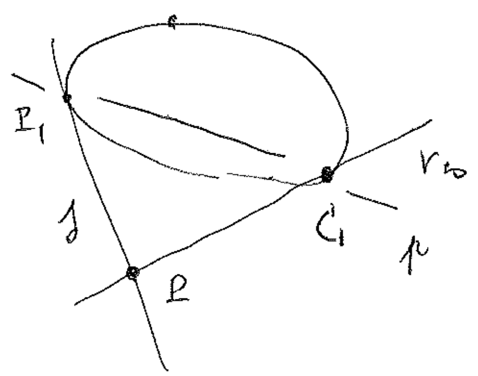
Elegeo

27 settembre 2011

(1) Conica $\mathcal{C}$ tale che

la polare di $P:[0,1,1]$

Q sia $p: x+y+1=0$ $\quad p: \begin{cases} x=t \\ y=1-t \end{cases}$



il centro di $\mathcal{C}$ sia $C_1:[0,1,-1]$

e passi per $P_1:[1,1,-2]$

e $Q:[1,0,0]$ $\quad C_1 \in p$

Sol. C_1 è improprio $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ è una parabola, p ne è un diametro $\quad P_1 \in p: \quad 1-2+1=0$

la retta $s = P_1P$ ha equazione

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad x_0 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{3} - x_1 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{1} + x_2 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{1} = 0$$

$1+2=3$

$$3x_0 - x_1 + x_2 = 0$$

$$3 - x + y = 0 \qquad \boxed{y = x-3} \; s$$

controllo: l'eq. è $y = x+q$. Passa per P_1:

$$-2 = 1+q \qquad q=-3 \qquad y = x-3 \;\checkmark$$

$\mathcal{C}$ app. al fascio di coniche bitangenti:

$$\boxed{s\, r_\infty + \lambda p^2 = 0}$$

$$\overset{1}{(3x_0 - x_1 + x_2)} \cdot \overset{r_\infty}{x_0} + \lambda \overset{r}{(x_0 + x_1 + x_2)}^2 = 0$$

Passaggio per $Q: [1,0,0]$ (origine)

$$\boxed{(3-x+y) + (1+x+y)^2 = 0}$$

$$3 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -3$$

$$(3x_0 - x_1 + x_2)x_0 - 3(x_0 + x_1 + x_2)^2 = 0 \qquad (\star)$$

$$3x_0^2 - x_1x_0 + x_2x_0 - 3(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + 2x_0x_1 + 2x_0x_2 + 2x_1x_2) = 0$$

$$\cancel{3x_0^2} - x_1x_0 + x_2x_0 - \cancel{3x_0^2} - 3x_1^2 - 3x_2^2 - 6x_0x_1 - 6x_0x_2 - 6x_1x_2 = 0$$

$$-7x_0x_1 - 5x_2x_0 - 6x_1x_2 - 3x_1^2 - 3x_2^2 = 0$$

$$3x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_0x_1 + 5x_0x_2 + 6x_1x_2 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} & 3 & 3 \\ \frac{5}{2} & 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{p}{\approx} \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 7 & 6 & 6 \\ 5 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

☆ Variante (controllo)

versione a fine di (☆) pag. precedente

$$(\underbrace{3-x+y}_{X'}) - 3(\underbrace{1+x+y}_{Y'})^2 = 0$$

$$X' - 3Y'^2 = 0$$

non è ancora la forma canonica metrica, anche se i nuovi assi sono già $\perp$

da $\begin{cases} X' = 3 - x + y \\ Y' = x + y + 1 \end{cases}$

si ha

$$\begin{cases} \dfrac{X'}{\sqrt{2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{2}} + \dfrac{y}{\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{2}} \\[2ex] \dfrac{Y'}{\sqrt{2}} = \dfrac{x}{\sqrt{2}} + \dfrac{y}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in O(2)$$

$(\det(\,) = -1)$

poniamo allora $\begin{cases} X = \dfrac{X'}{\sqrt{2}} \\[2ex] Y = \dfrac{Y'}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$X' = \sqrt{2}\, X$

$Y' = \sqrt{2}\, Y$

(cambiamento di scala)

l'eq. diventa:

$$\sqrt{2}\, X - 3(\sqrt{2}\, Y)^2 = 0$$

$$\sqrt{2}\, X - 3 \cdot 2\, Y^2 = 0$$

$$\sqrt{2}\, X - 6\, Y^2 = 0$$

$$Y^2 = \frac{\sqrt{2}}{6} X = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot X$$

$\boxed{Y^2 = 2pX}$ $\implies p = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$ ✓

forma can. metrica

2 bis

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 7 & 6 & 6 \\ 5 & 6 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \uparrow \\ A_{00} \end{array}$$

$$\Omega = \det A = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 7 & 6 & 6 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}$$

$(3,1)$

$$= (-2)\cdot(\underbrace{42-30}_{12})$$

$$= -24$$

$$\Omega_{00} \overset{\det A_{00}}{=} 0 \quad \text{(com'era da attendersi)}$$

$$\gamma = \operatorname{tr} A = 6+6 = 12$$

$$p = \sqrt{-\frac{\Omega}{\gamma^3}} = \sqrt{\frac{24}{12^3}} = \sqrt{\frac{2\cdot \cancel{12}}{12^{\cancel{3}\,2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{12}$$

parametro di $\mathcal{C}$

OSS: Dato che le direzioni di s e p ovvero $\underline{P}$ e $\underline{G}$ sono $\perp$, l'asse della parabola è proprio p e il vertice è $\underline{P}_1$.

s è la tangente a $\mathcal{C}$ per $\underline{P}_1$

Determiniamo il fuoco $F = \underline{P}_1 + \frac{p}{2}\underline{u}$

$$\underline{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \nwarrow \underline{u}$$

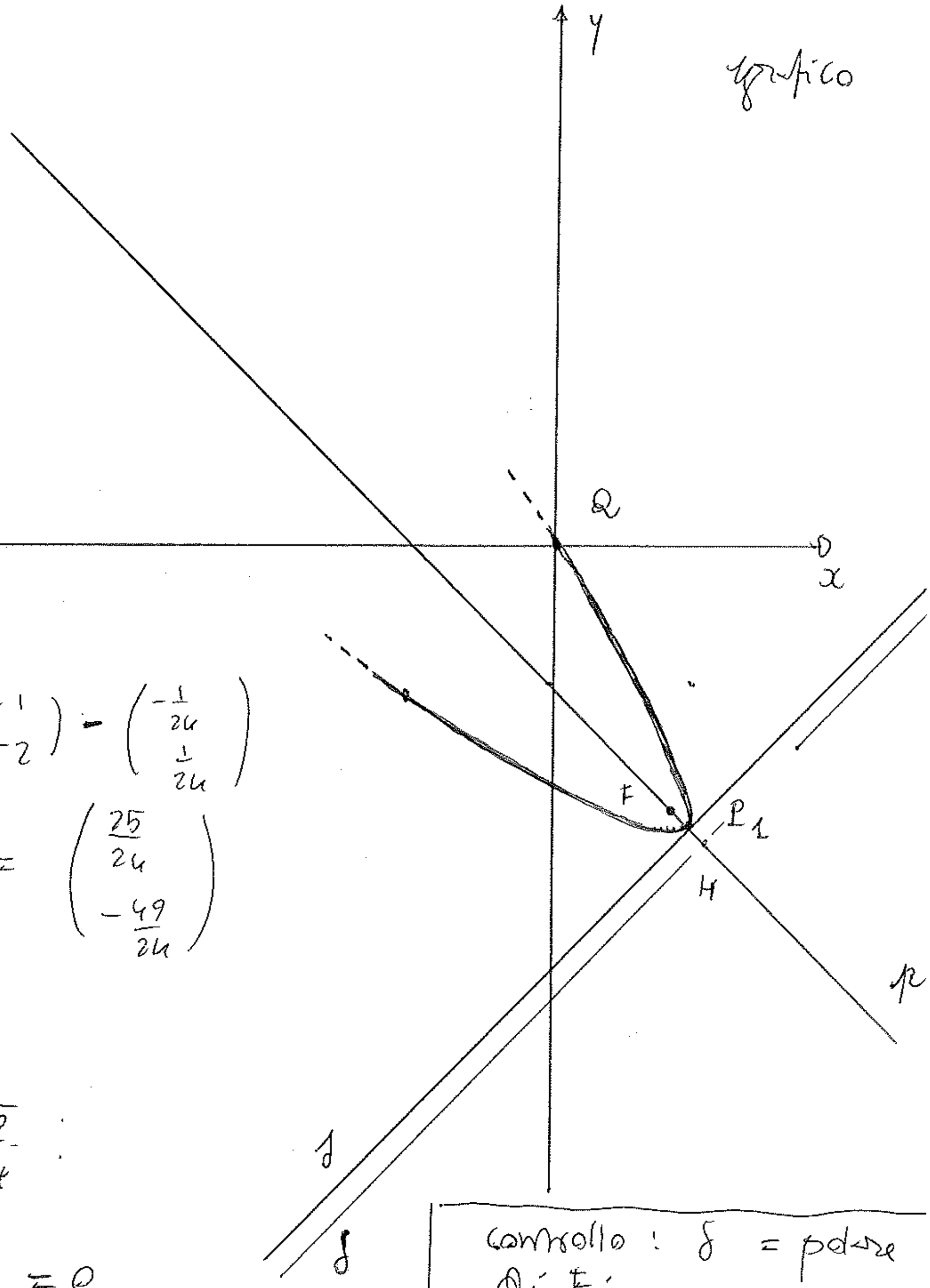
per ragioni geometriche (v. anche la figura)

$$F = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{24}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{24} \\ -\frac{47}{24} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 7 \\ \hline 161 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 47 \\ 5 \\ \hline 235 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 235 \\ 161 \\ \hline 74 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 24\cdot 7 - 24\cdot 6 \\ = 24 \end{array}$$



direttrice:

retta per $H = \begin{pmatrix} +1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{24} \\ -2 - \frac{1}{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{24} \\ -\frac{49}{24} \end{pmatrix}$$

e $\parallel \delta$

$$y + \frac{49}{24} = x - \frac{25}{24}$$

$$x - y - \frac{25}{24} - \frac{49}{24} = 0$$

$$24x - 24y - 25 - 49 = 0$$

$$24x - 24y - 74 = 0$$

$$\boxed{12x - 12y - 37 = 0}$$

controllo: δ = polare di F:

$$(x_0\ x_1\ x_2) \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 7 & 6 & 6 \\ 5 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 23 \\ -47 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_0\ x_1\ x_2) \begin{pmatrix} 23\cdot 7 - 47\cdot 5 \\ 24\cdot 7 + 23\cdot 6 - 47\cdot 6 \\ \underbrace{24\cdot 5 + \underbrace{23\cdot 6 - 47\cdot 6}_{-24\cdot 6}}_{= -24} \end{pmatrix} = 0$$

-74

24

$$-74x_0 + 24x_1 - 24x_2 = 0$$

$$12x - 12y - 37 = 0 \quad \checkmark$$

(2)

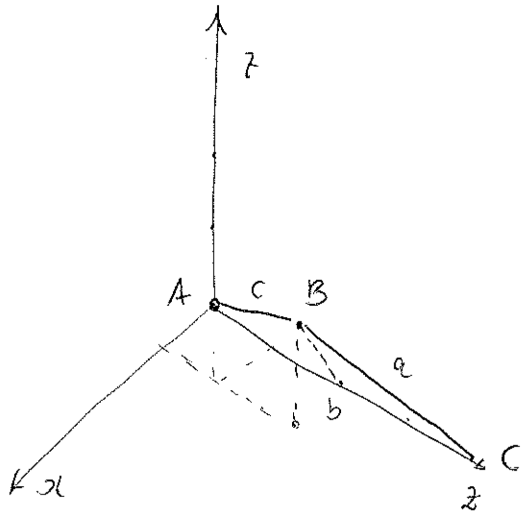
$A: (0, 0, 0)$

$B: (1, 2, 1)$

$C: (0, 4, 0)$

Elegeo

27 Settembre 2011



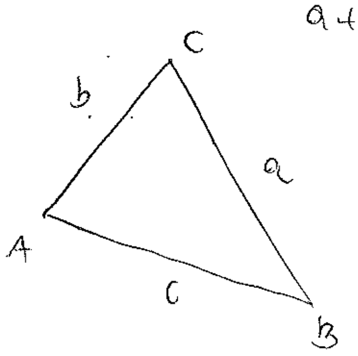
Baricentro di ABC

$$G = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \overbrace{0+1+0}^{1} \\ 0+\overbrace{2+4}^{6} \\ \underbrace{0+1+0}_{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$G: \left(\frac{1}{3}, 2, \frac{1}{3}\right)$

incentro

$$I = \frac{a}{a+b+c} A + \frac{b}{a+b+c} B + \frac{c}{a+b+c} C$$



$$a = \overline{BC} = \sqrt{1^2 + \underbrace{2^2}_{4} + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$b = \overline{AC} = 4$$

$$c = \overline{AB} \quad \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

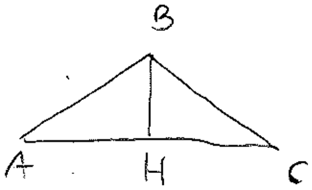
ABC è isoscele

$$I = \frac{\sqrt{6}}{4+2\sqrt{6}} \overbrace{A}^{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}} + \frac{4}{4+2\sqrt{6}} \overbrace{B}^{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}} + \frac{\sqrt{6}}{4+2\sqrt{6}} \overbrace{C}^{\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{2+\sqrt{6}} \\ \frac{8+4\sqrt{6}}{4+2\sqrt{6}} \\ \frac{2}{2+\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{2+\sqrt{6}} \\ 2 \\ \frac{2}{2+\sqrt{6}} \end{pmatrix} \leftarrow \text{chiaro...}$$

Eq. bisettrice di $\hat{B}$: è la retta

BH , con $H : (0, 2, 0)$



$B : (1, 2, 1)$

$X = B + t\overrightarrow{BH}$ $\qquad \overrightarrow{BH} = (-1, 0, -1)$

$$\begin{cases} x = 1 + t(-1) = 1 - t \\ y = 2 + t \cdot 0 = 2 \\ z = 1 + t(-1) = 1 - t \end{cases}$$