Geometria

Ingegneria Gestionale

Prova scritta del 19 settembre 2001

E1. Si consideri al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ la famiglia di applicazioni lineari $T_\lambda : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ così definite:

$$T_\lambda : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda x & x+z \\ y+z & \lambda y \end{pmatrix}$$

i) Si scriva la matrice di T_λ rispetto alle basi canoniche dei due spazi in questione.
ii) Determinare, al variare di λ, l'immagine di T_λ.
iii) Dato $W := \langle e_{11} + e_{12}, e_{21} + e_{22} \rangle$, determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, $dim(ImT_\lambda + W)$ e $dim(ImT_\lambda \cap W)$ (si lavori in $\mathbb{R}^4$...).

E2. i) Si determini, nel piano euclideo E^2 (ampliato proiettivamente), in cui sia fissato un riferimento cartesiano, l'iperbole $\mathcal{I}$ tale che :
1) $a_\infty : y + x = 0$ sia asintoto di $\mathcal{I}$;
2) $\mathcal{I}$ abbia centro in $O : (0,0)$;
3) la retta $r : y - x - 1 = 0$ sia tangente ad $\mathcal{I}$ in $P : (0,1)$.
ii) Determinare l'altro asintoto, gli assi e la forma canonica metrica di $\mathcal{I}$ e se ne abbozzi il grafico.

T1. i) Si specifichino le proprietà caratterizzanti del determinante di una matrice quadrata $A \in M_n(K)$, dandone (in dimensione 2 e 3) un'interpretazione geometrica.
ii) Si dimostri che $A \in M_n(K)$ è invertibile se e solo se $detA \neq 0$.
iii) Definire il concetto di minore di una matrice qualsiasi, enunciare il teorema dei minori orlati, ed utilizzarlo per determinare, in generale, le equazioni di un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ (per fissare le idee).

T2. i) Data una conica irriducibile $\mathcal{C}$ in $\mathbb{P}^2$ (in cui è fissato un riferimento proiettivo),
i) si definisca analiticamente la polare di un punto rispetto a $\mathcal{C}$.
ii) Si enunci e si dimostri il *teorema di reciprocità*.
iii) Si dia l'interpretazione geometrica della polare, giustificandola tramite ii).
iv) Dare la definizione di triangolo autopolare, fornendone poi un'interpretazione algebrica.
v) Sia dia la definizione conica a centro, di diametro di una tale conica e di diametro ad esso coniugato. Nel piano affine, si accenni a una costruzione geometrica di quest'ultimo.

Tempo a disposizione 2h30m.
Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

181

Geometria 19/9/2001

E1

$$T_\lambda : \mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda x & x+z \\ y+z & \lambda y \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

troviamo $m_{fe}(T_\lambda)$ $\quad e = (e_1\ e_2\ e_3)$

basi canoniche $\quad f = (e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22})$ (ordine lessicografico)

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda e_{11} + e_{12}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = e_{21} + \lambda e_{22}$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = e_{22} + e_{21}$$

$$m_{fe}(T_\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

(o meglio, l'immagine tramite $\mathbb{R}^4$)

Determiniamo $Im\, T_\lambda$ al variare di λ

Se $\lambda = 0$ è $m_{fe}(T_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow Im\, T_0 \cong \langle \underset{f_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{f_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \rangle \quad f_2 \quad f_3 \quad f_2 + f_3$$

$\rho(T_0) = 2 \qquad Im\, T_0 = \langle e_{12}, e_{21} \rangle$

182

Se $\lambda \neq 0$ è subito visto che $\rho(T_\lambda) = 3$

$$\operatorname{Im} T_\lambda \cong \left\langle \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\lambda e_{11} + e_{12} \qquad e_{21} + \lambda e_{22} \qquad e_{12} + e_{21}$$

Sia $\overline{W} \cong \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$e_{11} + e_{12} \qquad e_{21} + e_{22}$$

Determiniamo al variare di λ,

$\dim(\operatorname{Im} T_\lambda + \overline{W})$ e $\dim(\operatorname{Im} T_\lambda \cap \overline{W})$

Se $\lambda = 0$ è

$$\operatorname{Im} T_0 + \overline{W} = \langle \operatorname{Im} T_\lambda \cup \overline{W} \rangle$$

$$\cong \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\operatorname{Im} T_0}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\overline{W}} \right\rangle$$

ora,

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-1)\cdot 1 = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ I vettori dati (colonne) danno una base di $\mathbb{R}^4$.

Dalla formula di Grassmann è subito

$$\operatorname{Im} T_\lambda \cap \overline{W} = \{2\} \quad (\Rightarrow \mathbb{R}^4 = \operatorname{Im} T_\lambda \oplus \overline{W}.$$

Se $\lambda \neq 0$ è

$$\operatorname{Im} T_\lambda + \overline{W} = \overbrace{\operatorname{Im} T_\lambda}^{} \quad \overbrace{}^{\overline{W}}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\lambda \neq 0 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} T_\lambda = 3$ applicando lalg. di Gauss

si osservi che (se $\lambda \neq 0$)

$x = \dim(\overline{W} \cap \operatorname{Im} T_\lambda) \geq$

poiché

$$\alpha + \overbrace{\dim(\operatorname{Im} T_\lambda + \overline{W})}^{4}$$

$$= 3 + 2$$

$$x = 5 - \dim(\operatorname{Im} T_\lambda + \overline{W})$$

$$\geq 5 - 4 = 1$$

$$\begin{array}{c} -\lambda \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \text{indip} \end{array}$$

Se $\lambda = 1$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\dim(\operatorname{Im} T_1 + \overline{W}) = 3$

e $x = 2$

Se $\lambda \neq 1$ è subito visto che

$$\dim(\operatorname{Im} T_\lambda + \overline{W}) = 4$$

$$\Rightarrow x = 1$$

In definitiva:

	$\dim(\operatorname{Im} T_\lambda + \overline{W})$	$\dim(\operatorname{Im} T_\lambda \cap \overline{W})$	$\dim \operatorname{Im} T_\lambda$	$\dim \overline{W} = 2$
$\lambda = 0$	4	0	2	2+2=4
$\lambda = 1$	3	2	3	3+2=3+2
$\lambda \neq 1$	4	1	3	3+2=4+1

Geometria 19/9/2001

(E2) Determinare $\mathcal{I}$ tale che

1) $a_1: y+x=0$ sia asintoto di $\mathcal{I}$
2) $\mathcal{I}$ abbia centro in O
3) $r: y-x-1=0$ sia tangente ad $\mathcal{I}$ in $P:(0,1)$

Sol. $\mathcal{I}$ L'eq. è del tipo

$$(y-mx)(y+x)=c$$

Poiché passa per P, deve essere $c=1$

La condizione di tangenza dà, successivamente

$$\left[\begin{array}{ll} \text{eq. spezzata:} & -mx^2+(1-m)xy+y^2-1=0 \\ & mx^2+(m-1)xy-y^2+1=0 \end{array}\right]$$

tangente in P:

$$(1\ x\ y)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&m&\frac{m-1}{2}\\0&\frac{m-1}{2}&-1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{P}=$$

$$=(1\ x\ y)\begin{pmatrix}1\\\frac{m-1}{2}\\-1\end{pmatrix}=0 \qquad 1+\frac{m-1}{2}x-y=0$$

$$y+\frac{1-m}{2}x-1=0$$

$$\Rightarrow \frac{1-m}{2}=-1 \qquad m-1=2 \Rightarrow m=3$$

$$A_{\mathcal{I}}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

Assi: utilizziamo il metodo speciale*
(* si possono utilizzare, nel nostro caso, almeno 3 metodi)

$a_1 \quad y+x=0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt2}x+\frac{1}{\sqrt2}y=0$

$a_2 \quad y-3x=0 \Rightarrow \frac{-3}{\sqrt{10}}x+\frac{y}{\sqrt{10}}=0 \quad (a^2+b^2=1)$

assi: $\left(\frac{1}{\sqrt2}\pm\left(\frac{-3}{\sqrt{10}}\right)\right)x+\left(\frac{1}{\sqrt2}\pm\frac{1}{\sqrt{10}}\right)y=0$

(bisettrici degli asintoti)

$$\left(\frac{1}{\sqrt2}\mp\frac{3}{\sqrt{10}}\right)x+\frac{\sqrt5\pm1}{\sqrt{10}}y=0$$

$$\left(\frac{\sqrt5\mp3}{\sqrt{10}}\right)x+\left(\frac{\sqrt5\pm1}{\sqrt{10}}\right)y=0$$

$$m=-\frac{\sqrt5\mp3}{\sqrt5\pm1} \quad (*)$$

Somma coeff. matrice

$\mathfrak{A}=-3-1=-4$

$\mathfrak{A}_{00}=-4$

$\mathcal{J}=2$

$$t^2+\frac{-4\cdot2}{-4}t+\frac{(-4)^3}{(-4)^2}=0$$

$$t^2+2t-4=0 \qquad t=-1\pm\sqrt{1+4}=\begin{cases}-1-\sqrt5\\ \sqrt5-1\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : A \qquad 0 = 1 + 4xz + y^2 - x^2 \qquad (188)$$

$$0 = \frac{1}{2} - 4xz - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2$$

$$\frac{2}{3} = y \qquad \Rightarrow \text{(Curva di 0)}$$

$$0 = y + 4(1-y2-1) + 4xy(1+y) + x(-1-2y) + 4x^2 + y^2 + 1 + 2xy - 2y - x^2$$

$$= 4x^2 - 4y^2 - x - 4y + 2xy + 1 + y^2 + x^2 + 4xy + 4x - 4y + 4 = 0$$

$$\underbrace{(4x+4y)}_{a_1}\underbrace{(x-4y-1)}_{a_2} + 5y^2 + 0 = 0$$

passo canone hermitiana

$$r: (y-1)+x = 0 \qquad s: x+y-1=0$$

$$s = AB = \text{rette per } P = (0,1) \text{ di direzione } (1,-1)$$

$$A_\infty = [0,1,-1]$$

$$P = [1,0,2]$$

Variante

II

(189)

$$\frac{5 \mp 3\sqrt{5} \mp 5}{4} = -\frac{(\sqrt{5} \mp 3)(\sqrt{5} \mp 1)}{\underbrace{5-1}_{4}} = \frac{\sqrt{5} \mp 3}{\sqrt{5} \mp 1} = \frac{8 - 4\sqrt{5}}{4} = -2 + \sqrt{5} = -2 - \sqrt{5}$$

$$= \left\{ \frac{8 + \sqrt{5}}{2} \right.$$

$$m = -2 \pm \sqrt{1+4} = -2 \pm \sqrt{5} = m_\pm$$

$$m^2 + 4m + 1 = 0$$

$$-3m - m^2 + 1 + m = 0$$

$$-m(3+m) + 1 - m = 0$$

$$\begin{pmatrix} -m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3+m \\ 1-m \end{pmatrix} = 0$$

$y = mx$ è bisettrice l'asse focale da sopra sfamiche (v. anche la figura)

altro metodo per più alti (Dini comunque interessanti)

$$\begin{pmatrix} -m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = 0 \ldots$$

$$\sqrt{5} - 1 > 0 \qquad -1 - \sqrt{5} < 0 \qquad b = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} \qquad a = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{5}-1}}$$

Variante (alla variante..)

III

Molti, correttamente, hanno seguito questa strada:
Poiché $\mathcal{I}$ ha centro in O, anche
$a: (0,-1) \in \mathcal{I}$ e $r': y = x-1$ è
ri tangente ad $\mathcal{I}$. Pertanto $\mathcal{I}$ appartiene
al fascio di coniche bitangenti (vedi fig. pag 8)

$$r r' + \lambda \cdot s^2 = 0 \qquad \text{con } s: \ell\ell \quad x = 0 \ (\text{asse } y)$$

$$(y-x-1)(y-x+1) + \lambda x^2 = 0$$
$$[(y-x)^2 - 1] + \lambda x^2 = 0$$

Consideriamo i termini di 2° grado:

$$y^2 - 2xy + x^2 + \lambda x^2 = 0 \qquad \text{direzioni degli asintoti}$$
$$(1+\lambda)x^2 - 2xy + y^2 = 0$$

Poniamo $x = \ell = 1 \quad y = m$

$$(1+\lambda) - 2m + m^2 = 0 \qquad (*)$$

ora $m = -1$ è radice di $(*)$ $\Rightarrow$

$$1 + \lambda + 2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = -4$$

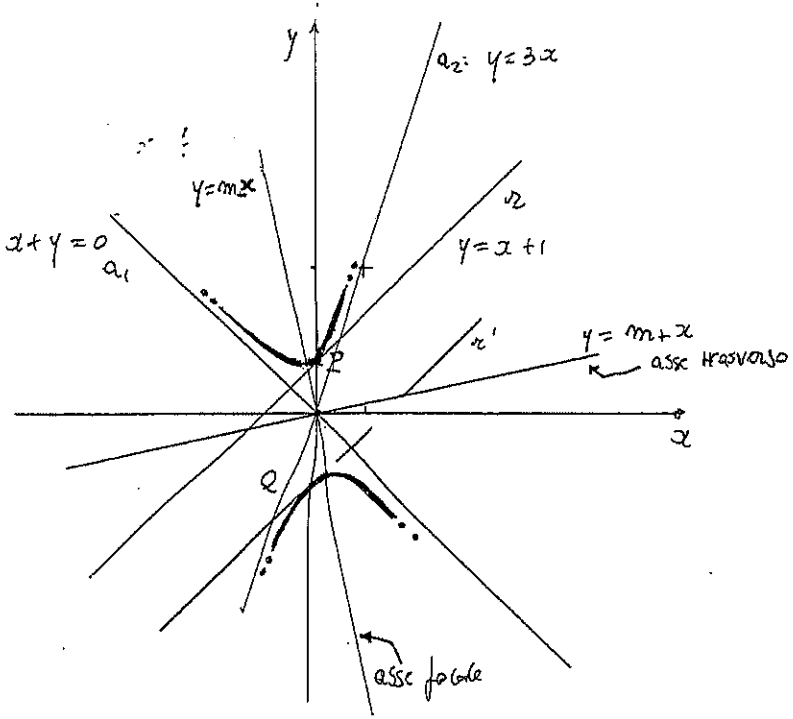
L'eq della conica diviene

$$-3x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$$
$$\rightsquigarrow \quad 3x^2 + 2xy - y^2 + 1 = 0$$

, compatibilmente con quanto già trovato.

-7 bis-

Abbozzo del grafico



Geometria

Ingegneria Gestionale

Prova scritta del 15 dicembre 2001 (simile a quella pre vista il 1° dicembre)

E1. Sia data, nello spazio vettoriale euclideo $\mathbf{R}^3$, munito del prodotto scalare standard, la famiglia di endomorfismi (rappresentati rispetto alla base canonica)

$$T_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

con $a, b \in \mathbf{R}$.

i) Determinare gli endomorfismi diagonalizzabili.

ii) Dopo aver verificato che $T_{2,2}$ è diagonalizzabile, determinarne una base di autovettori.

iii) Detta f la base trovata, determinare $m_{f,e}(I)$, matrice del cambiamento di base dalla base canonica e alla base f.

iv) È possibile scegliere f ortonormale? Spiegare.

E2. i) Nel piano euclideo reale $\mathbf{E}^2$, in cui sia fissato un riferimento cartesiano (e ampliato proiettivamente) determinare il fascio di coniche $\mathcal{F}$ tangenti a $r : x_2 - 2x_1 = 0$ in $O : [1, 0, 0]$ e ad $s : x_0 = 0$ in $P : [0, 2, -1]$. Di che tipo di coniche si tratta, dal punto di vista affine?

ii) Dimostrare che esse hanno lo stesso asse e determinarlo.

iii) Determinare la conica del fascio con fuoco in $F : [1, 2, -1]$ e abbozzarne il grafico.

T1. i) Dare la definizione generale di spazio affine e fornire almeno due esempi.

ii) Dare la definizione di sottospazio affine, e dire che cosa si intende con l'affermare che due sottospazi affini sono 1) incidenti, 2) paralleli, 3) sghembi. Fare esempi.

iii) Enunciare e dimostrare il teorema XI.3 di Euclide.

iv) Enunciare e dimostrare, sia in forma geometrica (vettoriale) che in forma matriciale, il *teorema di Rouchè-Capelli.*

T2. i) Data una conica irriducibile C in $\mathbf{P}^2$ (in cui è fissato un riferimento proiettivo),

i) si definisca analiticamente la polare di un punto rispetto a C.

ii) Si enunci e si dimostri il *teorema di reciprocità.*

iii) Si dia l'interpretazione geometrica della polare, giustificandola tramite ii).

iv) Dare la definizione di triangolo autopolare e darne una costruzione geometrica; se ne fornisca poi un'interpretazione algebrica.

v) Sia dia la definizione di centro di una conica, di conica a centro e si dimostri che in tal caso il centro è centro di simmetria per la conica.

vi) Si dia la definizione di diametro (per una conica a centro) e di diametro ad esso coniugato. Nel piano affine, si accenni a una costruzione geometrica di quest'ultimo.

Tempo a disposizione 2h.30m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Geometria 1/12/2001 (15/12/2001)

E1

$$T_{a,b} := \left(\begin{array}{cc|c} 1 & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Si ha subito $p_C^{T_{ab}}(\lambda) = (1-\lambda)(a-\lambda)(2-\lambda)$

Se $a \neq 1$ e $a \neq 2$ $T_{a,b}$ è diagonalizzabile

($T_{a,b}$ è triang. superiore $\sigma(T_{ab}) = \{1, a, 2\}$)

perché ha 3 autovalori distinti

Se $a = 2$ è ancora diag. perché il blocco

$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ lo è per ogni $b \in \mathbb{R}$ (due aut. distinti)

Se $a = 1$ è diag. solo per $b = 0$

Infatti $m_a(1) = 2$

e $m_g(1) = 3 - r(T_{a,b} - I) =$

$= 3 - r\left[\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{cases} 3-2=1, & b \neq 0 \\ 3-1=2, & b = 0 \end{cases}$

Dunque, $T_{a,b}$ è diagonalizzabile per

$$\boxed{a \neq 1 \quad \forall b \in \mathbb{R}}$$

e per $\boxed{a = 1 \text{ e } b = 0}$

Consideriamo ora

$T_{2,2}$ (diagonalizzabile)

Determiniamo una base diagonalizzante

Osserviamo che nessuna base diag. potrà essere ortonormale, poiché $T_{2,2}$ non è simmetrica

$$T_{2,2} : \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Lavoriamo col blocco $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

V_1' $\quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad 2y = 0$ $\quad (y=0)$ $\quad y = 0$

$\Rightarrow V_1' = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

autospazio ridotto

e $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

V_2' $\quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$-x + 2y = 0 \quad \overset{x=2y}{\Rightarrow}$

$V_2' = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Una base di autovettori di $T_{2,2}$ è pertanto

$$\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{f_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{f_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{f_3} \right\rangle$$

$V_1 = \langle f_1 \rangle \qquad V_2 = \langle f_2, f_3 \rangle$

Determiniamo $m_{fe}(I)$ matrice del cambiamento di base

Si ha, posto $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$m_{fe}(I) = A^{-1}$

$$C_{-2} \cdot \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{= m_{fe}(I)}$

$A^{-1} = m_{fe}(I)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = y \\ z = z' \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x' + 2y' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

(E2) Geometria 1/12/2001 (15/12/2001)

i) Det. il fascio di coniche tangenti a $r: x_2 - 2x_1 = 0$ in $O: [1, 0, 0]$ e ad $s: x_0 = 0$ in $P: [0, 2, -1]$. Di che tipo di coniche si tratta?

ii) Dimostrare che esse hanno lo stesso asse e determinarlo

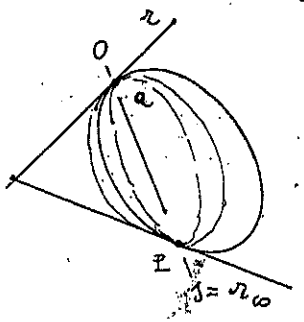
iii) Determinare la conica del fascio con fuoco $F: [1, 2, -$

Sol. $s = r_\infty$ (retta all'infinito) $\Rightarrow$ si tratta di parabole. $a = OP$ è pertanto un diametro.

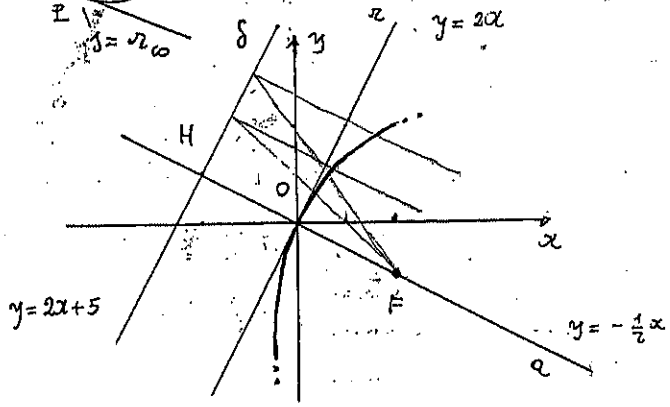
eq: $y = -\frac{1}{2}x$

ma $a \perp r$ $\left(m_a = -\frac{1}{m_r}\right)$

a: $x + 2y = 0$ $\quad x_1 + 2x_2 = 0$



e pertanto a è l'asse comune delle parabole date e O è il vertice



i) il fascio è * $\quad r \cdot \underset{r_\infty}{\underset{\parallel}{s}} + \lambda a^2 = 0$

(*Descrizione non omogenea...) $\quad (x_2 - 2x_1)x_0 + \lambda(x_1 + 2x_2)^2 = 0$

oppure, approssimativamente

$$(y - 2x) + \lambda(x + 2y)^2 = 0$$

$$\lambda(x^2 + 4xy + 4y^2) - 2x + y = 0$$

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & \lambda & 2\lambda \\ \frac{1}{2} & 2\lambda & 4\lambda \end{pmatrix}$$

ora $\overline{FO} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} = \frac{p}{2} \Rightarrow p = 2\sqrt{5}$

ma $p = \sqrt{-\frac{a}{y^3}}$ $\qquad a = \det A_\lambda =$

$-\lambda - \lambda - \frac{\lambda}{4} - 4\lambda$

$= \lambda\left[-2 - \frac{1}{4} - 4\right]$

$= \lambda\left[-6 - \frac{1}{4}\right]$

$= -\frac{25}{4}\lambda$

$$2\sqrt{5} = \sqrt{\frac{25}{4}\frac{\lambda}{5^3\lambda^3}}$$

$$2\sqrt{5} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{5\lambda^2}}$$

$y = 5\lambda \qquad y^3 = 5^3\lambda^3$

$\Rightarrow 4\sqrt{5} = \sqrt{\frac{1}{5\lambda^2}}$

$16 \cdot 5 = \frac{1}{5\lambda^2} \qquad \frac{1}{\lambda^2} = 16 \cdot 25 \qquad \lambda^2 = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{25}$

$\lambda = \pm\frac{1}{4 \cdot 5} = \pm\frac{1}{20}$

ora deve risultare per ragioni geometriche

⚠ $y - 2x < 0$ per $Q : (x, y) \in \mathcal{P}$

$\Rightarrow$ da $y - 2x = -\lambda (x + 2y)^2$ (**)

segue che $\lambda > 0$, ovvero $\lambda = +\frac{1}{20}$

$$\Rightarrow A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{20} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad \times 20$$

$$\underset{\text{praticamente equivalente a}}{\approx} \begin{pmatrix} 0 & -20 & 10 \\ -20 & 1 & 2 \\ 10 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Riconosciamo l'eq. in altri due modi:
uno è sostanzialmente quello visto, osservando che l'eq. deve essere necessariamente del tipo (**) della teoria generale.
L'altro consiste nell'utilizzare la proprietà

$$\underset{\text{distanza}}{d(P, F)} = d(P, \underset{\text{direttrice}}{\delta})$$

($\delta : y = 2x + 5$ ... calcolo immediato)

$$d^2(P, \delta) = \frac{(2x + 5 - y)^2}{4 + 1} = \frac{(2x + 5 - y)^2}{5}$$

$$\boxed{d(P, r) = \frac{|a x_0 + b y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

distanza pto - retta

$$d^2(P, F) = (x - 2)^2 + (y + 1)^2$$

$F : (2, -1)$ $\Downarrow$

$$4x^2 + y^2 + 25 + 20x - 4xy - 10y =$$

$$= 5 \underbrace{(x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1)}_{5x^2 - 20x + 20 + 5y^2 + 10y + 5}$$

$$\Rightarrow x^2 + 4xy + 4y^2 - 40x + 20y = 0$$

$\Rightarrow$ ancora $A = \begin{pmatrix} 0 & -20 & 10 \\ -20 & 1 & 2 \\ 10 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

⚠ non richiesto

(Segnatura di A : o $(2, 1)$ o $(1, 2)$

ma $\alpha = -\frac{25}{4} \cdot \frac{1}{20} = -\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{5}{16} < 0$

$\Rightarrow$ da $\det A = \alpha = \mu_1 \mu_2 \mu_3$ segue che

autovalori di A

se uno è uno negativo e due positivi $\Rightarrow$ segnatura $= (2, 1)$)