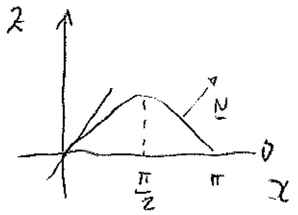
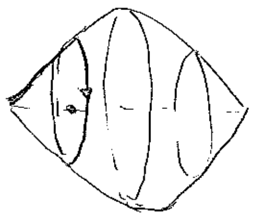
GEOMETRIA - Prova scritta del 2/9/2010

(Prof. M. Spera)

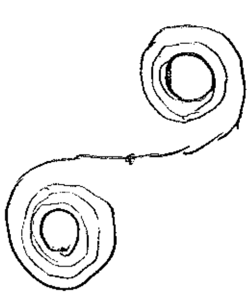
(1) 

Data la superficie Σ ottenuta ruotando il grafico di $z = \sin x$, $x \in (0, \pi)$ attorno all'asse x, se ne calcolino, in un generico punto, le curvature principali e la curvatura gaussiana.

(2) 

Considerata nuovamente la superficie Σ dell'esercizio (1), si calcoli la curvatura geodetica del parallelo in figura, corrispondente a $x = \frac{\pi}{4}$.

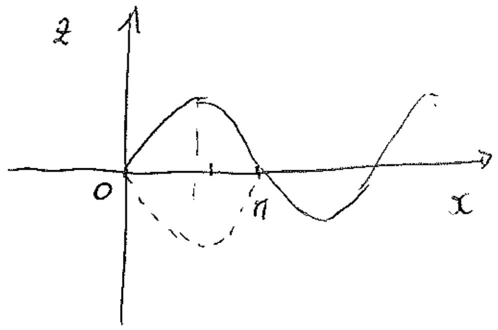
Successivamente si determini, possibilmente in due modi, l'angolo ottenuto per trasporto parallelo del versore tangente sul parallelo dato.

(3) Sia $X =$  (topologia relativa, indotta dalla topologia standard di $\mathbb{R}^2$)

Dire se X è compatto, connesso, connesso per archi (c.p.a.) localmente connesso per archi (l.c.p.a.)

Tempo a disposizione 2h. Le risposte vanno adeguatamente giustificate

(1)

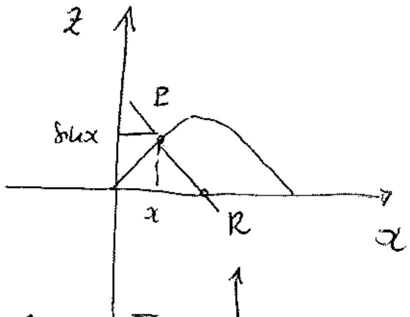


$z = \sin x \qquad x \in (0, \pi)$

curvatura di $z = \sin x$ $\qquad k(x) = \dfrac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}} =$

$z' = \cos x$
$z'' = -\sin x$

$$= \frac{-\sin x}{(1+\cos^2 x)^{3/2}}$$



Calcoliamo la gran normale $\overline{PR}$

tangente a $z = \sin x$ in $P: (t, \sin t)$

$$z - \sin t = \cos t \cdot (x - t)$$

normale η : $z - \sin t = -\dfrac{1}{\cos t}(x - t) \qquad t \neq \dfrac{\pi}{2}$

$\left(t = \pi/2 : \quad x = \dfrac{\pi}{2}\right.$

$\eta \cap \{z = 0\} \qquad + \sin t = + \dfrac{1}{\cos t}(x - t)$

$$\sin t \cos t = x - t$$

$$x = t + \sin t \cos t \qquad t \neq \frac{\pi}{2}$$

Se $t \to \pi/2 \qquad x \to \dfrac{\pi}{2}$

$$\overline{PR} = \left[(t - (t + \sin t \cos t))^2 + \sin^2 t\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= (\sin^2 t \cdot \cos^2 t + \sin^2 t)^{\frac{1}{2}} = |\sin t| \sqrt{1+\cos^2 t}$$

curvatura meridiano

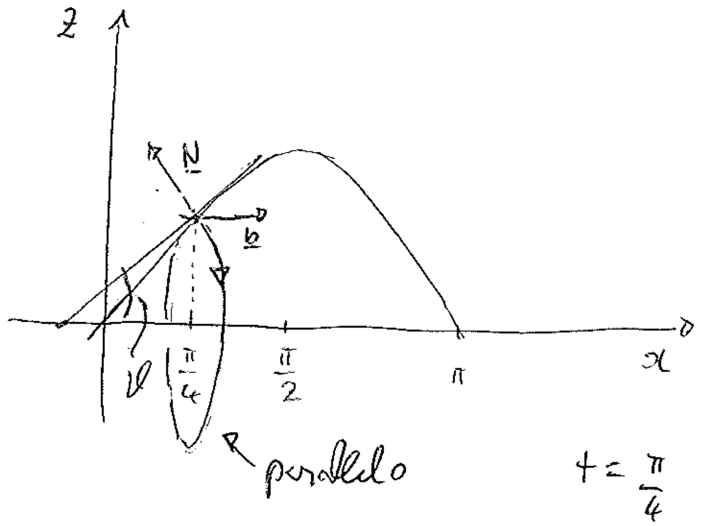
$$k_1 = \frac{-\sin t}{(1+\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$k_2 = -\frac{1}{\ell R} = -\frac{1}{|\sin t|\,(1+\cos^2 t)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{\sin t\cdot(1+\cos^2 t)^{\frac{1}{2}}}$$

$$K = k_1 \cdot k_2 = \frac{1}{(1+\cos^2 t)^2}$$

curv. gaussiana
(cost. lungo i paralleli)

(2)



$t = \frac{\pi}{4}$

$z'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

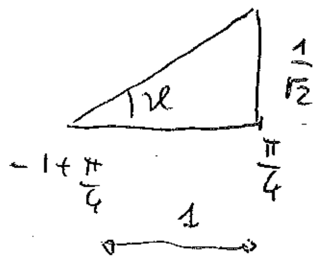
$z - \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$z - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

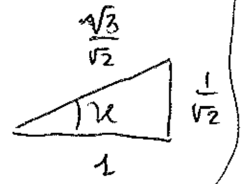
se $z = 0$: $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = -1$

$x = -1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi - 4}{4}$

$\sin\vartheta = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$



$\sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$



trasp. parallelo

$2\pi(1 - \sin\vartheta)$

$= 2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\pi\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right)$

$\left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}, 0, \frac{m}{\sqrt{m^2+1}}\right)$

$\underline{N} = \left(-\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}, 0, \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\right)$

$= \left(\dfrac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}+1}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right)$

$= \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

altro modo: k_g

basta calcolarla in ℓ: $\left(\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\underline{b}: (1, 0, 0)$

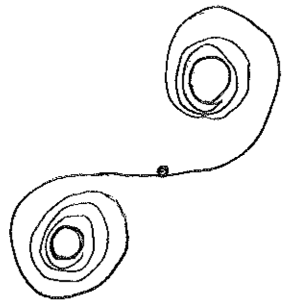
$\underline{N}: \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

$k_g = k \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\int k_g \, ds = -\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{2}} \, d\varphi = -2\pi/\sqrt{3}$ ma di corrisponde con $+2\pi$

Geometria 2/9/10

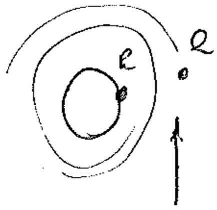
(3)

$X =$ 

X è compatto (chiuso e limitato in $\mathbb{R}^2$)

X è chiusura di un connesso per archi

$\Rightarrow$ è chiusura di un connesso $\Rightarrow$ è connesso

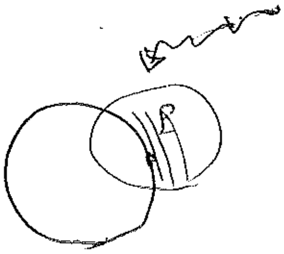
ma X non è connesso per archi $\rightsquigarrow$ 

non sono congiungibili da un arco

e X non è l.c.p.a:

se fosse l.c.p.a. sarebbe anche c.p.a, in base ad un noto teorema.

La cosa si vede anche direttamente:



p non ammette intorni connessi per archi ..