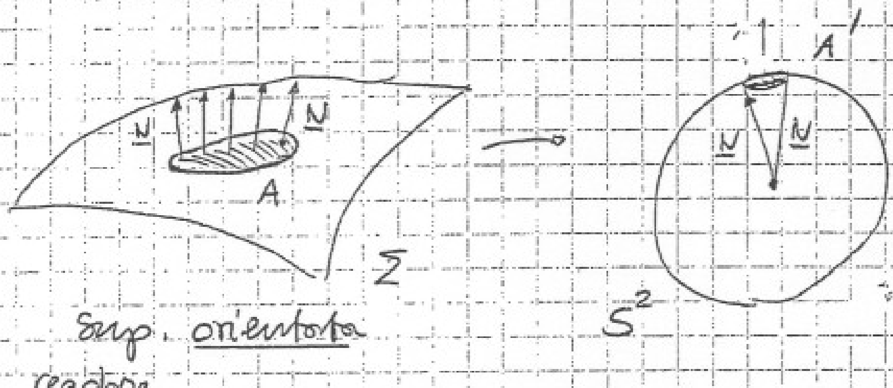
Appunti del corso di GEOMETRIA
Prof. M. Spera

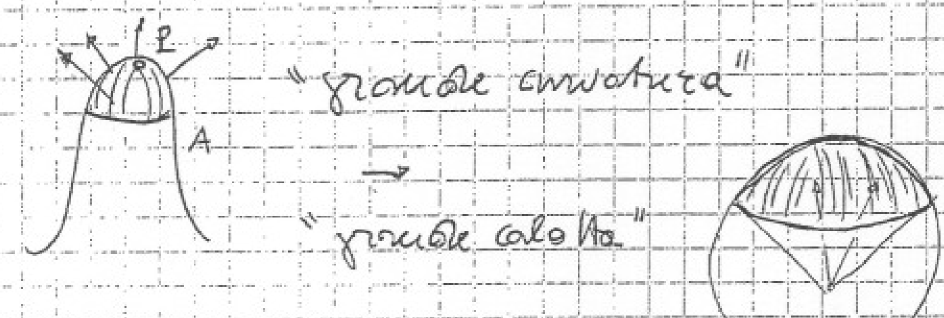
Lezione VIII

LA MAPPA DI GAUSS (o applicazione di Gauss)

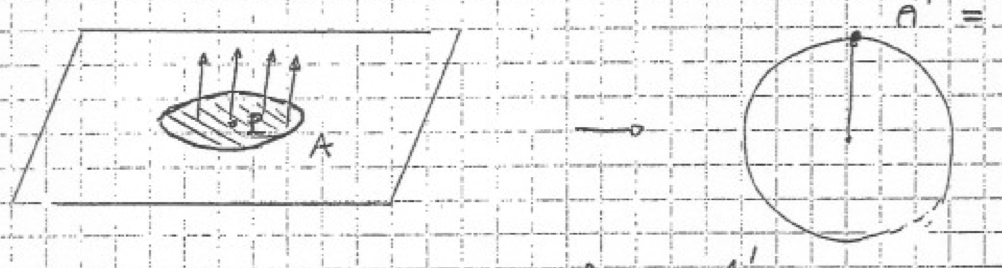
Si vuole generalizzare il concetto di curvatura dalle curve alle superficie. Si ricordi la discussione del Cap I.

Idea di base:





"curvatura nulla"



Gauss: $K(P) = \lim_{A \to 0} \frac{A'}{A}$ aree di A' e A... (orientate) (K potrà risultare anche negativa)
(e Rodrigues) curvatura in P

Per S^2_R si ottiene $K = \frac{1}{R^2}$

(... si ricordi per la circ. di raggio R, la curvatura vale $\frac{1}{R}$ ...)

Formalizziamo:

$$\mathcal{N} : \Sigma \longrightarrow S^2$$

(Σ sup. regolare orientata)

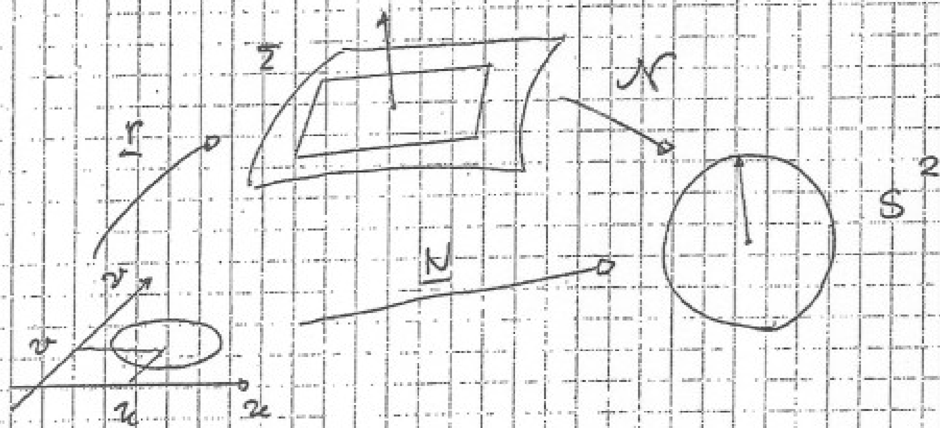
$$\underline{P} \longmapsto \mathcal{N}(\underline{P}) = \underline{N}(\underline{P})$$

mappa di Gauss

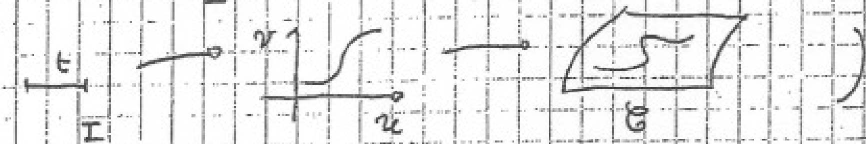
sia $\underline{N} = \underline{N}(u,v) \quad (u,v) \in \mathcal{U}$

E' $\boxed{\mathcal{N} \circ \underline{r} = \underline{N}}$

$$\left(\mathcal{N}(\underbrace{\underline{r}(u,v)}_{\underline{P}}) = \underline{N}(u,v) \right)$$



(Porremo poi, per il seguito, per una curva regolare $\mathcal{C}$ su Σ $\quad \underline{\alpha}(t) := \underline{r}(u(t), v(t)) \quad t \in I \ \ldots$)



◇ ◇ ◇ ◇

Richiamo: differenziabilità (secondo Fréchet)

$f : \mathcal{U} \subset V \longrightarrow \overline{W}$ $\quad$ $V, \overline{W}$ sp. vett. reali (dim. finita)

($\mathcal{U}$ regione) $\quad$ $\dim V = n$; $\dim \overline{W} = m$

f diff. in $a \in \mathcal{U}$: $\quad f(x) - f(a) = \underbrace{df(a)}_{\in \, Hom(V, \overline{W})} \cdot h + o(h) \quad x \in \mathcal{U} \subset V$

$x - a = h \quad f(a+h) - f(a)$ $\quad$ differenziale di f in a

concretamente $df(a) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ (m righe, n colonne):

matrice Jacobiana

Studiamo il differenziale di N (nel senso di Fréchet)

$$S := -dN$$

operatore di forma (... shape)

$$dN\big|_P : T_P\Sigma \to T_{N(P)} S^2$$

Per il teorema di derivazione delle funzioni composte è

prodotto tra matrici

$$dN\big|_{(u,v)} = dN\big|_{\underline{r}(u,v)} \cdot d\underline{r}\big|_{(u,v)}$$

ovvero

$$(\underline{N}_u \ \ \underline{N}_v) = dN\big|_{\underline{r}(u,v)} \cdot (\underline{r}_u \ \ \underline{r}_v)$$

Ricordando che

$$A \cdot B = A\left(\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}\right) =$$

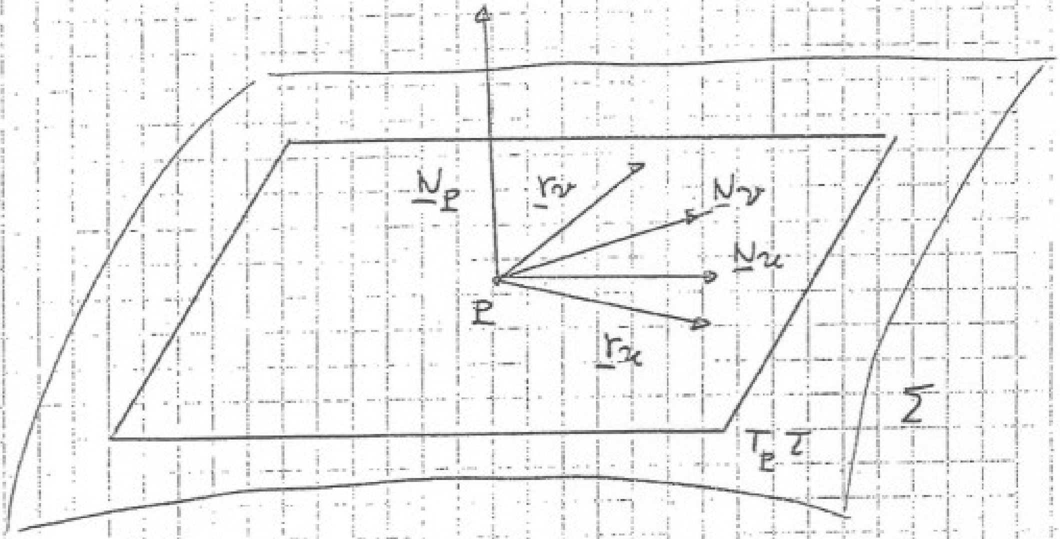
colonne di B

$$= \left(A\begin{pmatrix}\ \end{pmatrix} \ \ A\begin{pmatrix}\ \end{pmatrix} \ \cdots \ A\begin{pmatrix}\ \end{pmatrix}\right)$$

si ha:

$$\star \begin{cases} dN\big|_{\underline{r}(u,v)}(\underline{r}_u) = \underline{N}_u \ (\perp N) \\ dN\big|_{\underline{r}(u,v)}(\underline{r}_v) = \underline{N}_v \ (\perp N) \end{cases} \Rightarrow$$

posso leggere S come operatore da $T_P\Sigma$ in se stesso



consistentemente:

$$\begin{cases} \underline{\alpha} = \underline{\alpha}(t) & t=0 \to P_0 \equiv \underline{\alpha}(0) \\ \underline{N} = \underline{N}(t) & \end{cases}$$

$$\dot{\underline{N}}(0) = \frac{d\underline{N}}{dt}\Big|_{t=0} = \underline{N}_u^{\circ}\, \dot{u}(0) + \underline{N}_v^{\circ}\, \dot{v}(0)$$

$$\|$$

$$\frac{d\mathcal{N}(\underline{\alpha}(t))}{dt}\Big|_{t=0} = d\mathcal{N}\Big|_{\underline{\alpha}(0)} (\underline{r}_u^{\circ})\, \dot{u}(0) + d\mathcal{N}\Big|_{\underline{\alpha}(0)} (\underline{r}_v^{\circ})\, \dot{v}(0)$$

Fatto cruciale

☆ $$\underset{\left(\overset{\|}{S_P}\right)}{S} : T_P\Sigma \to T_P\Sigma \quad \text{è } \underline{\text{simmetrica}}$$

Dim. Basta verificare che $\langle \underline{r}_u \mid S\underline{r}_v \rangle = \langle \underline{r}_v \mid S\underline{r}_u \rangle$

ovvero che $\langle \underline{r}_u \mid \underline{N}_v \rangle = \langle \underline{r}_v \mid \underline{N}_u \rangle$.

Ora, da $\langle \underline{N} \mid \underline{r}_u \rangle = \langle \underline{N} \mid \underline{r}_v \rangle = 0$ segue

$$\frac{\partial}{\partial v}\langle \underline{N} \mid \underline{r}_u \rangle = \langle \underline{N}_v \mid \underline{r}_u \rangle + \langle \underline{N} \mid \underline{r}_{uv} \rangle = 0 \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\langle \underline{N} \mid \underline{r}_v \rangle = \langle \underline{N}_u \mid \underline{r}_v \rangle + \langle \underline{N} \mid \underline{r}_{vu} \rangle = 0$$

$\Rightarrow$ l'asserto segue poiché $\underline{r}_{uv} = \underline{r}_{vu}$ ... $\square$

Si ponga per $\underline{v} \in T_P \Sigma$, $\|\underline{v}\| = 1$

$$\boxed{\mathrm{II}_P(\underline{v}) := \langle \underline{v} \mid S_P \underline{v} \rangle}$$

(2ª forma quadratica fondamentale)

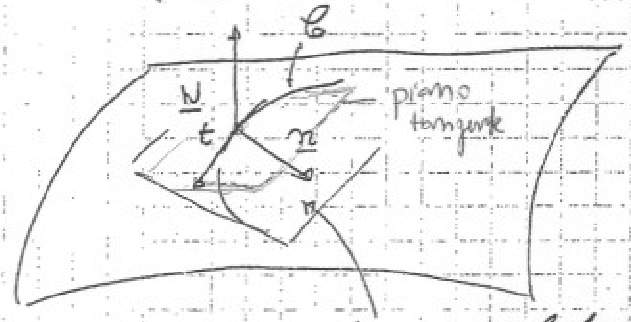
Per poter interpretare geometricamente tale forma ci occorre la nozione di

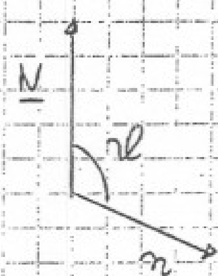
curvatura normale (in P) di una curva $\mathcal{C}$ su Σ (.. biregolare ..) passante per P

$$k_n(P) = k(P) \cdot \cos\vartheta = k(P) \langle \underline{N} \mid \underline{n} \rangle$$

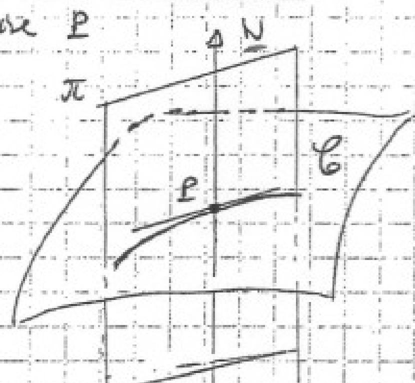
$$(= \langle \underline{N}, \underline{t}'' \rangle (P))$$

↓ curvatura di $\mathcal{C}$ in P





piano osculatore di $\mathcal{C}$ in P



In particolare se $\mathcal{C} = \Sigma \cap \pi$ → i $\underline{n} = \pm \underline{N}$ e k_n fornisce la curvatura di $\mathcal{C}$ (con segno: $\mathcal{C}$ è piana!)

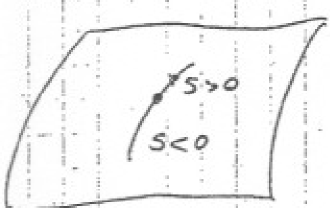
π: piano ∈ fascio di piani per la retta individuata da $\underline{N}$ contenente una retta di $T_P\Sigma$ passante per P prefissata.

Teorema (**Meusnier**)

Tutte le curve per $P \in \Sigma$ aventi la stessa retta tangente hanno la stessa curvatura normale. Precisamente:

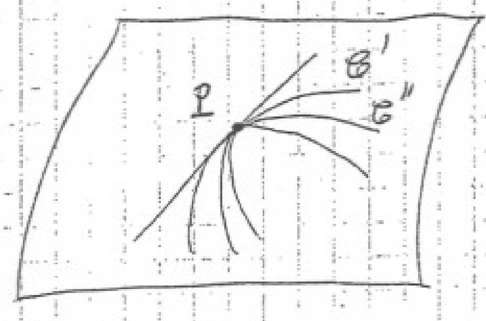
$$\boxed{\mathrm{II}_P(\underline{\alpha}'(0)) = K_n(P)}$$

$\underline{\alpha} = \underline{\alpha}(s)$ s: ascissa curvilinea

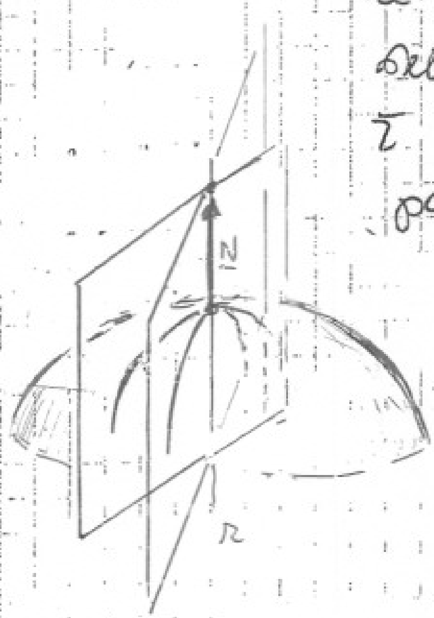


$(\|\underline{\alpha}'\| = 1)$

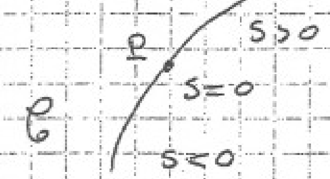
non c'è dipendenza dall'orientamento di $\mathscr{C}', \mathscr{C}''$...



I valori di II_P si ottengono considerando le curvature (con segno) delle curve ottenute intersecando Σ con i piani del fascio per r



Dimostrazione



$$\underline{\alpha}(s) = \underline{r}(u(s), v(s)) \qquad s \in I \ (\ni 0)$$

Si ha

$$\langle \underline{N}(s) \mid \underline{\alpha}'(s) \rangle = 0 \qquad s \in I$$ ($\mathcal{C}$ giace su Σ

$$\Rightarrow \quad \langle \underline{N}'(s) \mid \underline{\alpha}'(s) \rangle + \langle \underline{N}(s) \mid \underline{\alpha}''(s) \rangle = 0$$

$\left(' = \frac{d}{ds} \right)$ Si ha:

$$\mathrm{II}_p(\underline{\alpha}'(0)) = -\langle d\mathcal{N}_p \, \underline{\alpha}'(0) \mid \underline{\alpha}'(0) \rangle =$$

$$= -\langle \underline{N}'(0) \mid \underline{\alpha}'(0) \rangle = \langle \underline{N}(0) \mid \underbrace{\underline{\alpha}''(0)}_{= k(0)\underline{n}(0)} \rangle =$$

$$= k_n(0)$$

□

☆ Poiché S è simmetrico, S è diagonalizzabile, i suoi autovalori sono reali e, se distinti, danno luogo ad autospazi ortogonali. Siano tali autovalori k_1 e k_2, con $k_1 \le k_2$. Per ovvie ragioni, vengono chiamati curvature principali.

Inoltre è:

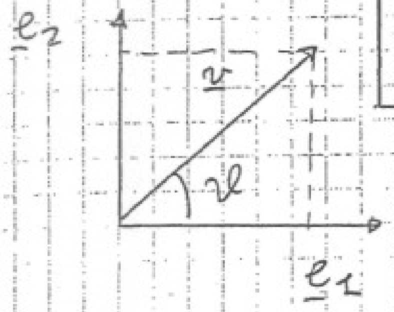
$$k_1 = \min_{\|\underline{v}\|=1} \mathrm{II}_p(\underline{v}) \qquad \underline{v} \in T_p\Sigma$$

☆

$$k_2 = \max_{\|\underline{v}\|=1} \mathrm{II}_p(\underline{v})$$ (Principio di Rayleigh)

Considerata una base ortonormale $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ di $T_P\Sigma$ formata da autovettori di S : $S\,\underline{e}_i = k_i\,\underline{e}_i \quad i=1,2$.

e posto $\underline{v} = \cos\vartheta\,\underline{e}_1 + \sin\vartheta\,\underline{e}_2$ si ha

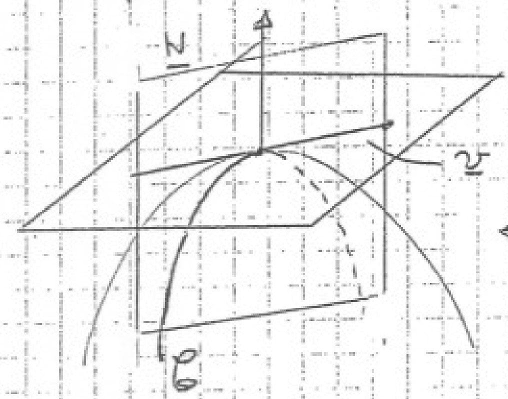


$$\boxed{k := \mathrm{II}_P(\underline{v})} = (\cos\vartheta \;\; \sin\vartheta)\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\vartheta \\ \sin\vartheta\end{pmatrix} = \boxed{k_1\cos^2\vartheta + k_2\sin^2\vartheta}$$

ovvero si ha la

☆ formula di Eulero

[si verifichi che i pti critici della funzione $f(\vartheta) = k_1\cos^2\vartheta + k_2\sin^2\vartheta$ corrispondono agli autovettori (di norma 1) ... (principio di Rayleigh)]



k è la curvatura (con segno) ← di $\mathcal{C}$

☆ Sia $K = \det S = k_1 k_2 \quad (K = K(P))$

K : curvatura gaussiana di Σ in P

Vogliamo determinare K : per far questo, dobbiamo esprimere II_P in termini di una forma quadratica sullo spazio dei parametri, $\mathbb{R}^2$

che chiamiamo ancora 2ª forma quadratica fondamentale

★ Sul principio di Rayleigh $\boxed{\text{INCISO}}$

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ (matr. simmetrica 2×2)

Poniamo $f(x,y) = X^t A X$ con $X = \binom{x}{y}$

$= ax^2 + 2bxy + dy^2$

Sia poi $g(x,y) = X^t X - 1 = 0$

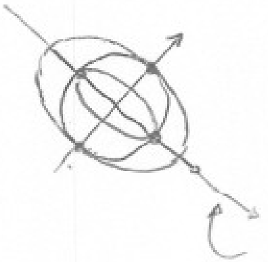
$x^2+y^2-1 = 0$

la circonferenza unitaria.

trattazioni elementari alternative: v. M. Spera Elementi di geometria

Troviamo i pti critici di f vincolata a $g = 0$

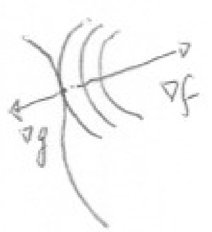
A simmetrica, def. positiva $\lambda_i > 0$, oppure $v^t A v > 0 \ \forall v \neq \underline{0}$



autospazi ortogonali

★ Lagrange: $\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases}$

$\nabla f \parallel \nabla g$



$$\begin{cases} 2ax + 2by = \lambda\, 2x \\ 2bx + 2dy = \lambda \cdot 2y \end{cases}$$

ovvero $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

e $\|X\| = 1$ $(x^2+y^2=1)$

$\Rightarrow$ pti critici $\equiv$ autovettori di norma 1

corrisp. valori critici $\equiv$ autovalori di A (reali)

[il discorso è generale....]

Nel caso specifico (ma il discorso è generale)

possiamo effettuare il seguente calcolo elementare

$$k_n = k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi \qquad k_1 < k_2$$

$\parallel$

sia $f(\varphi) = k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi$

$$f'(\varphi) = -2k_1 \cos\varphi \sin\varphi + 2k_2 \sin\varphi\cos\varphi = 0$$

$$\underbrace{(k_2 - k_1)}_{>0} \sin\varphi\cos\varphi = 0$$

$\Rightarrow$

$$\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

$$(\sin 2\varphi = 0)$$

massimi rel. $f = k_2$

$\Rightarrow$, in $[0, 2\pi)$ $\qquad \varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$

minimi rel ($f = k_1$)

Ripartiamo da $\langle \underline{N} | \underline{r}_u \rangle = 0$; $\langle \underline{N} | \underline{r}_v \rangle = 0$

Derivando

già fatto!

$$\underbrace{\langle \underline{r}_{uu} | \underline{N} \rangle}_{e} + \langle \underline{r}_u | \underline{N}_u \rangle = 0$$

$$\underbrace{\langle \underline{r}_{vv} | \underline{N} \rangle}_{g} + \langle \underline{r}_v | \underline{N}_v \rangle = 0$$

$$\underbrace{\langle \underline{r}_{uv} | \underline{N} \rangle}_{f} + \langle \underline{r}_u | \underline{N}_v \rangle = 0$$

ritrovo la simmetria dell'operatore di forma

$$\underbrace{\langle \underline{r}_{vu} | \underline{N} \rangle}_{f} + \langle \underline{r}_v | \underline{N}_u \rangle = 0$$

La 2ª forma fondamentale ci dice come Σ è immersa in $\mathbb{R}^3$ ... entra in gioco $\underline{N}$.
La 1ª forma f. (metrica) descrive la geometria intrinseca di Σ ...!

Con le solite notazioni, si ha, dalle formule precedenti

$$\boxed{II_p(\underline{\dot\alpha}(0)) = -\langle \underline{\dot\alpha}(0) | dN_p\, \underline{\dot\alpha}(0) \rangle = \dots}$$

(t par. arbitrario) $\dots = \boxed{e\,\dot u^2 + 2f\,\dot u \dot v + g\,\dot v^2}$

$$= (\dot u \ \ \dot v)\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot u \\ \dot v \end{pmatrix}$$

si possono riesprimere con (du, dv) ...

Dettagli:

$$\dot{\underline{\alpha}} = \underline{r}_u \dot{u} + \underline{r}_v \dot{v}$$

$$-\dot{\underline{N}} = S \cdot \dot{\underline{\alpha}} = -(\underline{N}_u \dot{u} + \underline{N}_v \dot{v})$$

$\mathrm{II}(\dot{\underline{\alpha}}) =$

$$\langle \dot{\underline{\alpha}}, S\,\dot{\underline{\alpha}} \rangle = -\Big[\underbrace{\langle \underline{r}_u, \underline{N}_u \rangle}_{-e} \dot{u}^2 + 2 \underbrace{\langle \underline{r}_u, \underline{N}_v \rangle}_{-f} \dot{u}\dot{v} + \underbrace{\langle \underline{r}_v, \underline{N}_v \rangle}_{-g} \dot{v}^2$$

$$= e\,\dot{u}^2 + 2f\,\dot{u}\dot{v} + g\,\dot{v}^2$$

Si noti, successivamente, che

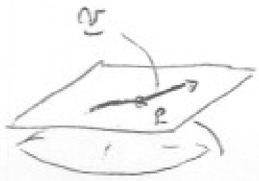
$$k_n = \mathrm{II}(\underline{\alpha}') = \mathrm{II}\left(\dot{\underline{\alpha}} \cdot \frac{dt}{ds} \right) = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \mathrm{II}(\dot{\underline{\alpha}})$$

ma $$\frac{ds}{dt} = E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2,$$

pertanto

$$\boxed{k_n = \frac{e\,\dot{u}^2 + 2f\,\dot{u}\dot{v} + g\,\dot{v}^2}{E\,\dot{u}^2 + 2F\,\dot{u}\dot{v} + G\,\dot{v}^2}}$$

In generale, se si vuole la curvatura normale di una curva avente tangente individuata da $\underline{v} \in T_P\Sigma$

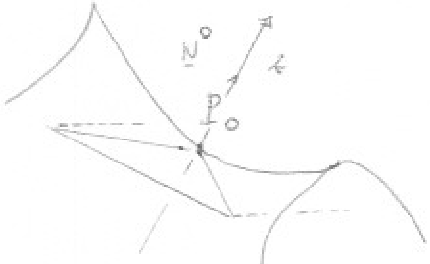


si ha $$k_n(P) = \frac{\mathrm{II}(\underline{v})}{\|\underline{v}\|^2}$$

◇ Ulteriore interpretazione geometrica della II^a forma fondamentale

Nelle ipotesi e notazioni usuali, consideriamo lo sviluppo di Taylor

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{r}(u,v) &= \underline{r}_0 + \underline{r}_u^0 \Delta u + \underline{r}_v^0 \Delta v + \\ \begin{matrix} \equiv \\ P \end{matrix} \quad & \quad \begin{matrix} \equiv \\ P_0 \end{matrix} \quad \frac{1}{2}\left(\underline{r}_{uu}^0 \Delta u^2 + 2\,\underline{r}_{uv}^0 \Delta u \Delta v + \right. \\ & \qquad \left. + \underline{r}_{vv}^0 \Delta v^2\right) + \dots \end{aligned}}$$



$u = u_0 + \Delta u$

$v = v_0 + \Delta v$

Fissiamo il sistema di riferimento prendendo come origine P_0, come "piano (x,y)" il piano tangente; come "asse z" la retta a questo perpendicolare passante per P_0, e diretta come $\underline{N}^0$.

Lo scostamento verticale di P dal piano tangente sarà dato, in un intorno di P_0, da

$$z := \langle \underline{r}(u,v), \underline{N}^0 \rangle = \frac{1}{2}\left[\langle \underline{r}_{uu}^0, \underline{N}^0 \rangle \Delta u^2 + 2 \langle \underline{r}_{uv}^0, \underline{N}^0 \rangle \Delta u \Delta v + \langle \underline{r}_{vv}^0, \underline{N}^0 \rangle \Delta v^2 \right] + \dots$$

si ricordi: $\underline{r}_0 = \underline{0}$

$\langle \underline{r}_u, \underline{N} \rangle = 0$ + in generale

$\langle \underline{r}_v, \underline{N} \rangle = 0$

$$= \frac{1}{2}\left[e\, \Delta u^2 + 2f\, \Delta u \Delta v + g\, \Delta v^2\right] + \dots$$

II^a forma fondamentale $\quad = \frac{1}{2} (\Delta u \;\; \Delta v) \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} + \dots$

ossia, è governato, al 2° ordine, dalla II^a forma fondamentale. Si osservi che, posto

$$z = f(u,v) = \langle \underline{r}(u,v), \underline{N}^\circ \rangle, \quad \text{la}$$

funzione f ha un pto critico in (u°, v°), e l'Hessiana coincide con la II^a f. fond (v. anche oss. pag. successive)

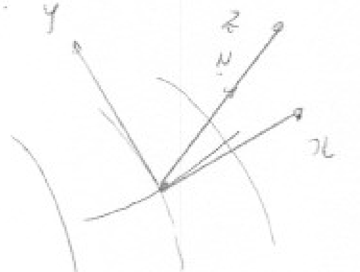
Se ora fissiamo gli assi x e y lungo le direzioni principali(*) (assumiamo, nel caso generale, di non trovarci in un pto ombelicale ($k_1 = k_2$) (né, a maggior ragione, planare ($k_1 = k_2 = 0$)), troviamo

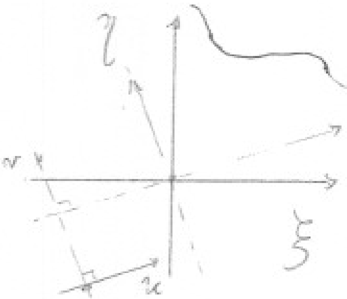
relative agli autospazi di S. vedi anche oltre

$k_1 < k_2$ per fissare le idee

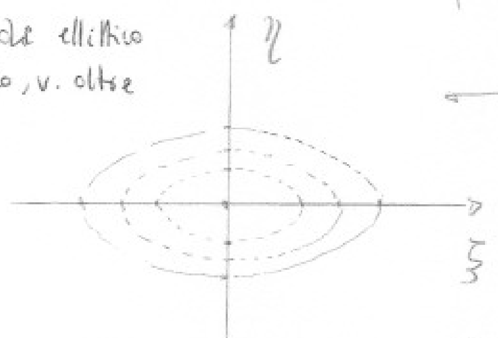
$$z = \frac{1}{2}\left(k_1 \Delta u^2 + k_2 \Delta v^2\right) + \dots$$

$$\equiv \underbrace{\frac{1}{2}\left(k_1 \xi^2 + k_2 \eta^2\right)}_{\text{paraboloide ellittico o iperbolico, v. oltre}} + \dots$$



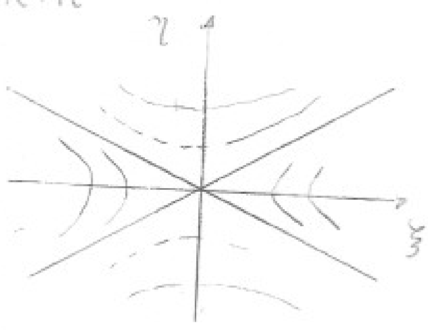


nel piano dei parametri



curve di livello approssimate di $z = f(u,v)$

$0 < k_1 < k_2$ o $k_1 < k_2 < 0$



$k_1 < 0 < k_2$

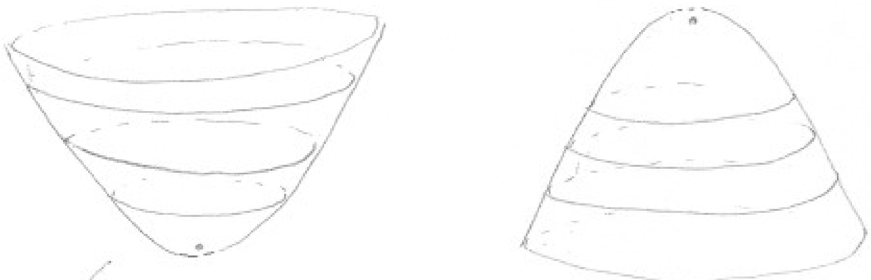
$$k_1 \xi^2 + k_2 \eta^2 = \pm 1$$

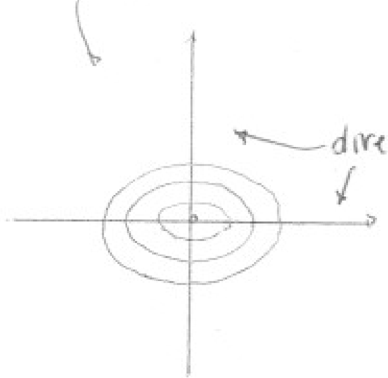
⋆⋆ indicatrice di Dupin

ellisse, se k_i concordi

iperbole, se k_i discordi

$k_i \neq 0$



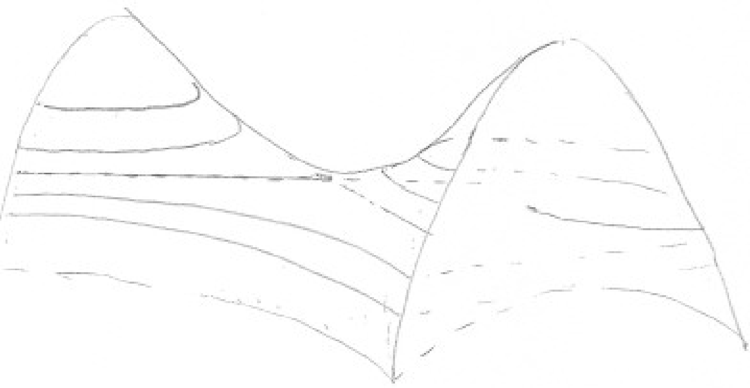


direzioni principali

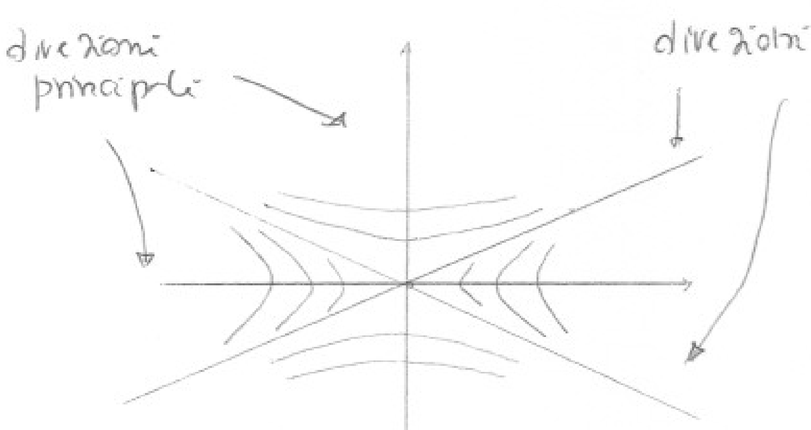
paraboloidi ellittici

in un punto ombelicale $k_1 = k_2 \neq 0$
si ottengono circonferenze..

P_0: punto
ellittico di Σ



paraboloide
iperbolico
o a sella



P_0: punto iperbolico
di Σ

Se una delle due curv. principali è nulla si
parla di punto parabolico

◇ Curvatura gaussiana e curvatura media

Poniamo $H := \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$

(curvatura media)

TEOREMA $\boxed{K = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2}}$ rapporto di determinanti di f. quadratiche sul punto (u, v)

$$\boxed{H = \frac{1}{2}\,\frac{Ge - 2Ff + Eg}{EG - F^2}}$$

Dimostrazione: sia $\underline{v} \in T_P\Sigma$ un autovettore di S. Si ha $S\underline{v} = k\,\underline{v}$ (k autovalore)

da cui, posto $\underline{v} = \alpha\,\underline{r}_u + \beta\,\underline{r}_v$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

$$-\alpha\,\underline{N}_u - \beta\,\underline{N}_v = k(\alpha\,\underline{r}_u + \beta\,\underline{r}_v)$$

Moltiplicando scalarmente ambo i membri per $\underline{r}_u$ e poi per $\underline{r}_v$, si ottiene il sistema omogeneo

$$\begin{cases} \alpha(e - kE) + \beta(f - kF) = 0 \\ \alpha(f - kF) + \beta(g - kG) = 0 \end{cases}$$

Affinché esso abbia una sol. non banale ($(\alpha, \beta) \neq (0,0)$) deve essere

$$\boxed{(e - kE)(g - kG) - (f - kF)^2 = 0}$$

(eq. di 2° grado in k)

Ricordandoci che

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(\underset{\text{radici}}{x - x_2})$$

$a \neq 0$

con $\quad x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \qquad x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$

e che nel nostro caso $x_i = k_i$ ... si ottiene l'asserto ... □

Corollario Le curvature principali si ottengono risolvendo l'equazione

$$\boxed{k^2 - 2Hk + K = 0}$$

□

Osservazione Sia data una superficie in forma cartesiana: $z = f(x, y) \quad (x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$

(f liscia ...)

Sia $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto critico di f

$$\nabla f(P_0) \equiv \nabla f(x_0, y_0) = 0 \qquad \left(\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)$$

Sia $\hat{P}_0 = (x_0, y_0, \underset{\overset{\shortparallel}{f(x_0, y_0)}}{z_0})$ [v. anche indietro...]

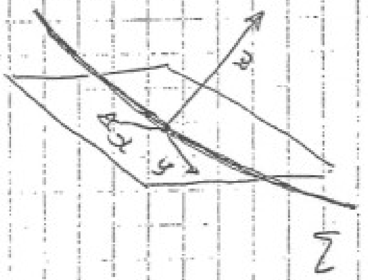
In tal caso

matrice di $II_{\hat{P}_0} = \mathcal{H}_{P_0} \equiv$ matrice hessiana

e $\boxed{K = \det \mathcal{H}}$ e curv. principali $\parallel\!\mid$ autovalori di $\mathcal{H}$

... verificarlo ....

"... Questa osservazione può risultare utile in tanti esercizi ... ogni punto di Σ risulta critico rispetto ad un opportuno sistema di riferimento, e si può impiegare il teorema del Dini ..."

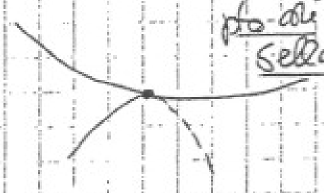


[osservazione: sia $y = y(x)$ $x \in I$ ...

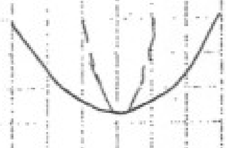
$$k(x) = \frac{|y''(x)|}{(1+y'(x)^2)^{3/2}}$$ curvatura (se con segno elimino | |)

se un pto critico $y'(x) = 0 \Rightarrow k(x) = |y''(x)|$

... la derivata seconda misura la curvatura ...]



pto di sella $K < 0$ (se H non è degenere)



minimo (rel) $K > 0$

massimo (rel) $K > 0$

▷ Linee di curvatura

Le direzioni in $T_p\Sigma$ relative agli autospazi di S (mutuamente ortogonali) vengono dette direzioni principali, e le curve su Σ aventi in ogni punto tangente lungo una direzione principale vengono chiamate linee di curvatura. Per queste, posto, al solito $\underline{N}(t) = (N \circ \underline{\alpha})(t)$ vale

$$\dot{\underline{N}}(t) \parallel \dot{\underline{\alpha}}(t) \qquad \left(\text{o, eq. } \begin{array}{c} \dot{\underline{N}} \times \dot{\underline{\alpha}} = \underline{0} \\ \dot{\underline{N}} = \lambda(t)\,\dot{\underline{\alpha}} \end{array}\right)$$

(e viceversa...) (teorema di Rodrigues)

Ciò segue subito da $dN(\dot{\alpha}) = \dot{\underline{N}} = \lambda \dot{\underline{\alpha}}$, se $\dot{\alpha}$ è un autovettore di $S = -dN$.

È possibile essere più espliciti utilizzando le formule di Weingarten (v. oltre), e giungere ad un sistema di equazioni differenziali (del prim'ordine) per le linee di curvatura.