RELAZIONI

1. Prime proprietà

Il significato comune del concetto di relazione è facilmente intuibile: due elementi sono in relazione se c'è un legame tra loro descritto da una certa proprietà; ad esempio, "essere genitore di...", "essere alto tanto quanto...", "avere la stessa età di...". Da un punto di vista matematico siamo interessati a studiare quali coppie di elementi sono coinvolte in una data relazione, astraendo dalle caratteristiche e dalle proprietà che descrivono la relazione stessa; è pertanto naturale ricorrere al concetto di coppia ordinata.

Definizione 1.1. Una *relazione* R è un insieme di coppie ordinate. Se la coppia $(a, b) \in R$, si scrive aRb e si dice che a è in relazione con b tramite R, o che b corrisponde ad a nella relazione R.

Si noti che è essenziale l'ordine con cui si descrivono gli elementi in relazione: ad esempio se si considera la relazione "essere il doppio di", la coppia $(2, 1)$ appartiene alla relazione, mentre non ci appartiene la coppia $(1, 2)$. Risulta quindi evidente perché si ricorre al concetto di coppia ordinata e non di semplice insieme con due elementi.

Si osservi inoltre che relazioni che a parole si descrivono in modo diverso, possono avere la stessa descrizione in termini di coppie ordinate e quindi essere in realtà la stessa relazione, come mostra l'esempio seguente.

Esempio 1.2. Sia $X = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 5^n \text{ per qualche } n \in \mathbf{N}\}$ l'insieme delle potenze di 5. Consideriamo le seguenti relazioni: due elementi di X sono in relazione se il primo è minore o uguale al secondo; due elementi di X sono in relazione se il primo divide il secondo. In termini di coppie ordinate, entrambe individuano lo stesso insieme $R = \{(x, y) \mid x = 5^n, y = 5^m \text{ e } n \leq m\}$ e quindi sono la stessa relazione.

Data una relazione R, dato cioè un insieme di coppie ordinate, i primi termini della coppie possono appartenere a un insieme A, detto *dominio* della relazione; analogamente i secondi termini delle coppie in R possono appartenere a un insieme B, detto *codominio* della relazione. In tal caso l'insieme R è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$. Viceversa, dati due insiemi A e B, un qualsiasi sottoinsieme R del prodotto cartesiano $A \times B$ individua una relazione, quella i cui elementi sono esattamente le coppie appartenenti al sottoinsieme scelto. Si osservi che il dominio e il codominio di una relazione non sono univocamente determinati, dato che possiamo considerare come dominio *qualsiasi* insieme contenente i primi elementi delle coppie di R, e come codominio *qualsiasi* insieme contenente i secondi elementi delle coppie di R. Se gli insiemi A e B coincidono, allora l'insieme $A = B$ viene detto *supporto* della relazione R. Si noti che si può sempre assumere che R abbia come supporto l'insieme $A \cup B$, dove A è un qualsiasi dominio e B un qualsiasi codominio.

ESEMPIO 1.3. Si consideri la relazione $R = \{(1,5),(2,7),(6,3)\}$. L'insieme $A = \{1,2,6\}$ è un possibile dominio di R e l'insieme $\{5,7,3\}$ è un possibile codominio; infatti $R \subseteq A \times B$. Anche l'insieme $A' = \{1,2,3,4,5,6\}$ è un possibile dominio e $B' = \{3,4,5,6,7\}$ è un possibile codominio; infatti $R \subseteq A' \times B'$. Se si considera l'insieme $C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, C è un possibile supporto di R, dato che sia i primi elementi che i secondi elementi delle coppie in R appartengono a C. Per concludere si osservi che anche l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali è un supporto di R.

NOTAZIONI 1.4. Una relazione R con dominio A e come codominio B si può indicare con la terna (A,B,R); si dice anche che R è una relazione dall'insieme A all'insieme B. Con questa notazione si vuole sottolineare l'insieme in cui si scelgono i primi termini delle coppie e quello in cui si scelgono i secondi. Si noti che questo concetto di relazione da un insieme a un altro è diverso dal concetto di relazione introdotto in 1.1, che è semplicemente un insieme di coppie ordinate. Infatti, la stessa relazione R può essere vista come relazioni tra insiemi diversi, come mostra il seguente esempio.

ESEMPIO 1.5. Si consideri la relazione $R = \{(1,5),(2,7),(6,3)\}$ descritta nell'esempio precedente. Possiamo considerare la relazione R come relazione tra gli insiemi A e B oppure tra gli insiemi A' e B', dove A, B, A' e B' sono gli insiemi descritti in 1.3. Quindi le scritture (A,B,R) e (A',B',R) indicano due diverse relazioni tra insiemi, anche se R è lo stesso insieme di coppie ordinate.

Per concludere introduciamo la nozione di insieme di definizione e di insieme immagine di una relazione.

DEFINIZIONE 1.6. Data una relazione R, l'insieme $\{x \mid \text{esiste } y \text{ tale che } (x,y) \in R\}$ è detto *insieme di definizione* di R e si indica con $\mathrm{Def}(R)$. L'insieme $\{y \mid \text{esiste } x \text{ tale che } (x,y) \in R\}$ è detto *insieme immagine* di R e si indica con $\mathrm{Im}(R)$.

In altre parole, l'insieme di definizione è formato da tutti i primi elementi delle coppie ordinate che appartengono alla relazione, l'insieme immagine dai secondi. Chiaramente se R è una relazione con dominio A e codominio B, allora $\mathrm{Def}(R) \subseteq A$ e $\mathrm{Im}(R) \subseteq B$. Se $\mathrm{Def}(R) = A$ allora la relazione R si dice *totale* in A; se $\mathrm{Im}(R) = B$, allora R si dice *suriettiva* su B.

Si osservi che l'insieme di definizione e l'insieme immagine di una relazione sono univocamente determinati da R, dipendono cioè solo dalle coppie che appartengono alla relazione. Invece il concetto di relazione totale o suriettiva assumono significato solo per relazioni da un insieme a un altro, dato che dipendono dal dominio e dal codominio di R.

ESEMPIO 1.7. Si consideri la relazione tra insiemi $(\mathbf{N},\mathbf{N},R)$ dove xRy se e solo se x è il doppio di y. Il dominio di R è $\mathbf{N}$, mentre l'insieme di definizione è $2\mathbf{N}$, dove $2\mathbf{N}$ indica l'insieme dei numeri naturali pari. La relazione quindi non è totale in $\mathbf{N}$, mentre è suriettiva su $\mathbf{N}$ dato che $\mathrm{Im}(R) = \mathbf{N}$. Al contrario la relazione $(2\mathbf{N},\mathbf{N},R)$, dove di nuovo xRy se e solo se x è il doppio di y, è totale in $2\mathbf{N}$, poiché $\mathrm{Def}(R) = 2\mathbf{N}$ coincide con il dominio.

Si consideri la relazione tra insiemi $(\mathbf{N},\mathbf{N},R)$ dove xRy se e solo se x è un terzo di y. Il codominio è l'insieme $\mathbf{N}$, mentre $\mathrm{Im}(R) = 3\mathbf{N}$, dove $3\mathbf{N}$ denota l'insieme dei naturali multipli di 3; pertanto R non è suriettiva su $\mathbf{N}$. Invece la relazioni tra insiemi

$(\mathbf{N}, 3\mathbf{N}, R)$ dove di nuovo xRy se e solo se x è un terzo di y, è suriettiva su $3\mathbf{N}$ poiché $\mathrm{Im}(R) = 3\mathbf{N}$ coincide con il dominio.

Si osservi infine che data una qualsiasi relazione R, scegliendo come dominio l'insieme $\mathrm{Def}(R)$ e come codominio l'insieme $\mathrm{Im}(R)$, la relazione tra insiemi descritta dalla terna $(\mathrm{Def}(R), \mathrm{Im}(R), R)$ è totale e suriettiva.

2. Proprietà delle relazioni

Vediamo ora alcune rilevanti proprietà di cui possono godere le relazioni. Nel seguito si suppone che R sia una relazione con supporto A.

Proprietà riflessiva: Una relazione tra insiemi (A, A, R) si dice *riflessiva* se, per ogni $x \in A$, la coppia (x, x) appartiene a R.

Proprietà antiriflessiva: Una relazione tra insiemi (A, A, R) si dice *antiriflessiva* se, per ogni $x \in A$, la coppia (x, x) non appartiene a R.

Proprietà simmetrica: Una relazione tra insiemi (A, A, R) si dice *simmetrica* se, per ogni coppia (x, y) appartenente a R, anche la coppia (y, x) appartiene a R.

Proprietà antisimmetrica: Una relazione tra insiemi (A, A, R) si dice *antisimmetrica* se, ogni qual volta $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$, si ha $x = y$.

Proprietà transitiva: Una relazione tra insiemi (A, A, R) si dice *transitiva* se, ogni qual volta le coppie $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, allora $(x, z) \in R$.

Esempi 2.1. La relazione tra insiemi $(\mathbf{N}, \mathbf{N}, R)$, dove xRy se e solo se $x \leq y$, è una relazione riflessiva. Infatti $x \leq x$ per ogni numero naturale x.

La relazione tra insiemi $(\mathbf{N}, \mathbf{N}, R)$, dove xRy se e solo se $x < y$, è una relazione antiriflessiva. Infatti nessun numero naturale x è strettamente minore di se stesso.

La relazione tra insiemi $(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}, R)$, dove $\mathbf{Z}$ è l'insieme dei numeri interi e xRy se e solo se x e y hanno lo segno, è una relazione simmetrica. Infatti se x ha lo stesso segno di y, allora anche y ha lo stesso segno di x.

La relazione tra insiemi $(\mathbf{N}, \mathbf{N}, R)$, dove xRy se e solo se $x \leq y$, è una relazione antisimmetrica. Infatti, se $x \leq y$ e $y \leq x$, allora possiamo sicuramente concludere che $x = y$.

La relazione tra insiemi (X, X, R), dove X è l'insieme delle rette del piano e xRy se e solo se la retta x è parallela alla retta y, è una relazione transitiva. Infatti se una retta x è parallela alla retta y e inoltre y è parallela alla retta z, possiamo concludere che anche x e z sono parallele.

3. Relazioni d'equivalenza

Definizione 3.1. Una relazione (A, A, R) riflessiva, simmetrica e transitiva è detta *relazione di equivalenza.*

Esempi 3.2. Sia X l'insieme delle rette del piano α.

La relazione tra insiemi (X, X, R), dove xRy se e solo se la retta x è parallela alla retta y, è una relazione d'equivalenza. Infatti è riflessiva, dato che ogni retta è parallela a se stessa; inoltre è simmetrica, poiché se una retta r è parallela alla retta s, allora anche s è parallela a r. Abbiamo già osservato nell'esempio 2.1 che R è transitiva, quindi concludiamo che R è una relazione d'equivalenza.

La relazione tra insiemi (X, X, R'), dove $xR'y$ se e solo se x e y hanno un punto in comune non è una relazione d'equivalenza. Infatti essa è riflessiva e simmetrica ma non transitiva. Infatti siano x e z due rette parallele e y una terza retta incidente sia x che z. Allora $xR'y$, $yR'z$ ma x non è in relazione con z, dato che due rette parallele non hanno punti di intersezione.

Si consideri una relazione d'equivalenza (A, A, R). Per ogni $x \in A$ possiamo costruire l'insieme di tutti gli elementi di A in relazione con x.

DEFINIZIONE 3.3. Il sottoinsieme di A descritto da $\{y \in A \mid xRy\}$ è detto *classe d'equivalenza* dell'elemento x e si denota $[x]_R$.

ESEMPIO 3.4. Si consideri ancora la relazione d'equivalenza (X, X, R), dove X è l'insieme delle rette di un piano α e xRy se e solo se la retta x è parallela alla retta y. Data una retta r, la classe d'equivalenza di r è l'insieme di tutte le rette del piano parallele a r. Si osservi che ogni classe d'equivalenza determinata da R individua una direzione del piano.

Analizziamo ora alcune importanti proprietà delle classi d'equivalenza associate a una relazione d'equivalenza (A, A, R).

PROPOSIZIONE 3.5. *Sia (A, A, R) una relazione d'equivalenza.*
(i) *Per ogni $x \in A$, $x \in [x]_R$.*
(ii) *Se $(x, y) \in R$, allora $[x]_R = [y]_R$.*
(iii) *Se $(x, y) \notin R$, allora $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$.*
(iv) *L'unione di tutte le classe d'equivalenza $\bigcup_{x\in A}[x]_R$ è l'insieme A.*

DIMOSTRAZIONE. (i) Poiché R riflessiva, per ogni $x \in A$ la coppia (x, x) appartiene a R e pertanto $x \in [x]_R$.

(ii) Sia $z \in [x]_R$; allora $(z, x) \in R$. Essendo R transitiva, da $(z, x) \in R$ e $(x, y) \in R$, si conclude che $(z, y) \in R$, cioè $z \in [y]_R$. Si è così verificato che $[x]_R \subseteq [y]_R$; analogamente si dimostra che $[x]_R \supseteq [y]_R$, e di conseguenza si ottiene $[x]_R = [y]_R$.

(iii) Se esistesse $z \in [x]_R \cap [y]_R = \emptyset$, si avrebbe $(z, x) \in R$ e $(z, y) \in R$. Essendo R simmetrica e transitiva, seguirebbe che $(x, z) \in R$ e quindi $(x, y) \in R$, contrariamente alle ipotesi.

(iv) Ogni classe d'equivalenza è un sottoinsieme di A, quindi $\bigcup_{x\in A}[x]_R \subseteq A$. Inoltre, poiché $x \in [x]_R$, si ottiene $x \in \bigcup_{x\in A}[x]_R$ per ogni $x \in A$; pertanto $A \subseteq \bigcup_{x\in A}[x]_R$. □

COROLLARY 3.6. *Data una relazione d'equivalenza (A, A, R) e dati $x, y \in A$, $(x, y) \in R$ se e solo se $[x]_R = [y]_R$.*

DIMOSTRAZIONE. Segue dalla definizione 3.3 e dalla precedente proposizione. □

Le proprietà (iii) e (iv) ci dicono che l'insieme delle classi d'equivalenza è una *partizione* di A; in generale, dato un insieme X una *partizione* di X è un insieme di sottoinsiemi di X a due a due disgiunti tali che la loro unione sia tutto X.

Inoltre data una partizione di A, ad essa è associata una relazione d'equivalenza nel modo seguente: dati due elementi x, $y \in A$, $xR'y$ se e solo se x e y appartengono allo stesso sottoinsieme della partizione. Si verifica facilmente che R' è riflessiva, simmetrica e transitiva.

ESEMPIO 3.7. Si consideri una relazione d'equivalenza (A, A, R). Data la partizione su A individuata dalla classi d'equivalenza di R, si costruisca la relazione R' su A come descritto nel paragrafo precedente. Si verifichi che $R = R'$.

4. Relazioni d'ordine stretto

Definizione 4.1. Una relazione (A, A, R) antiriflessiva e transitiva è detta *relazione d'ordine stretto.*

Esempi 4.2. Si consideri la relazione tra insiemi $(\mathbf{N}, \mathbf{N}, R)$ dove, dati i numeri naturali n e m, nRm se e solo se $n < m$; si verifica facilmente che R è una relazione d'ordine stretto.

Sia X un insieme e $(P(X), P(X), R)$ la relazione definita da YRX se e solo se $Y \subsetneq Z$, dove Y e Z sono sottoinsiemi di X; allora R è una relazione d'ordine stretto.

Come risulta chiaro dagli esempi precedenti, una relazione d'ordine stretto con supporto l'insieme A determina un criterio per confrontare tra loro gli elementi di A. In generale non tutti gli elementi di A possono essere confrontati tramite R; ad esempio, dato un insieme X con almeno due elementi a e b e la relazione $(P(X), P(X), \subsetneq)$ i due sottoinsiemi $\{a\}$ e $\{b\}$ non sono confrontabili tra loro, dato che nessuno dei due è contenuto nell'altro.

Definizione 4.3. Una relazione d'ordine stretto (A, A, R) gode della proprietà di *tricotomia* se dati due qualsiasi elementi x e y contenuti in A, o xRy, oppure yRx, oppure $x = y$.

Esempio 4.4. La relazione tra insiemi $(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}, <)$ gode della proprietà di tricotomia, poiché dati due qualsiasi numeri interi n o m, o $n < m$ o $m < n$ oppure $n = m$.

Si consideri ora un sottoinsieme $S \subseteq A$; tramite la relazione R vogliamo confrontare gli elementi di S tra loro e con gli elementi esterni a S. Nell'effettuare questo confronto si possono individuare alcuni elementi con caratteristiche rilevanti, descritti nella discussione che segue.

Data una relazione d'ordine stretto (A, A, R) e $S \subseteq A$, un elemento $u \in A$ è detto *maggiorante* per S se per ogni $x \in S$ si ha $x = u$ oppure $(x, u) \in R$; in altre parole un elemento è un maggiorante per S se è confrontabile con ogni elemento di S e risulta "maggiore", rispetto a R, di ogni elemento di S.

Un elemento $u \in S$ è detto *massimale* per S se per ogni $x \in S$ si ha $(u, x) \notin R$; in altre parole un elemento è un massimale per S se è un elemento di S e, se è confrontabile rispetto a R con altri elementi di S, risulta "maggiore".

Un elemento $u \in S$ è detto *massimo* per S se per ogni $x \in S$ si ha $(x, u) \in R$; in altre parole un elemento è un massimo per S se appartiene a S, è confrontabile con ogni altro elemento di S, e risulta "maggiore" di ogni altro elemento di S.

In modo analogo, possiamo definire gli elementi *minoranti*, *minimali* e *minimi* di S. Un elemento $u \in A$ è detto *minorante* per S se per ogni $x \in S$ si ha $x = u$ oppure $(u, x) \in R$; in altre parole un elemento è un minorante per S se è confrontabile con ogni elemento di S e risulta "minore", rispetto a R, di ogni elemento di S.

Un elemento $u \in S$ è detto *minimale* per S se per ogni $x \in S$ si ha $(x, u) \notin R$; in altre parole un elemento è un minimale per S se è un elemento di S e, se è confrontabile rispetto a R con altri elementi di S, risulta "minore".

Un elemento $u \in S$ è detto *minimo* per S se per ogni $x \in S$ si ha $(u, x) \in R$; in altre parole un elemento è un minimo per S se appartiene a S, è confrontabile con ogni altro elemento di S, e risulta "minore" di ogni altro elemento di S.

Si osservi che massimali, minimali, massimi e minimi sono elementi del sottoinsieme S, mentre i maggioranti e i minoranti possono anche non appartenere a S. Si noti inoltre che gli elementi massimali, minimali, maggioranti e minoranti, se esistono, possono non essere unici. Si verifica facilmente invece che il massimo e il minimo, se esistono, sono unici (si veda l'Esercizio 6).

Si considerino ora tutti gli elementi maggioranti per il sottoinsieme S. Essi formano un sottoinsieme di A e pertanto possiamo considerarne il minimo; tale minimo, se esiste, è detto *estremo superiore* di S, e l'insieme S si dice *superiormente limitato.* Essendo un minimo, l'estremo superiore se esiste è unico.

Si considerino invece tutti gli elementi minoranti per il sottoinsieme S. Essi formano un sottoinsieme di A e pertanto possiamo considerarne il massimo; tale massimo, se esiste, è detto *estremo inferiore* di S, e l'insieme S si dice *inferiormente limitato.* Essendo un massimo, l'estremo inferiore se esiste è unico.

Si vedano gli esercizi alla fine del capitolo per alcune importanti connessioni tra massimi, massimali, maggioranti e ed estremo superiore e analogamente tra minimi, minimali, minoranti ed estremo inferiore.

Dopo aver introdotto la nozione di minimo, possiamo studiare un'ulteriore proprietà di cui possono godere le relazioni d'ordine stretto, la proprietà di buon ordinamento.

DEFINIZIONE 4.5. Una relazione d'ordine stretto (A, A, R) si dice un *buon ordine* se ogni sottoinsieme non vuoto di A ammette elemento minimo.

ESEMPI 4.6. Si consideri l'usuale relazione d'ordine stretto $(\mathbf{N}, \mathbf{N}, <)$; questo è un buon ordine, dato che ogni sottoinsieme dei numeri naturali ammette minimo. Infatti sia $S \subseteq \mathbf{N}$ e sia $S \neq \emptyset$. Se $0 \in S$, allora chiaramente 0 è il minimo di S. Altrimenti, poiché S è non vuoto, esiste un elemento $s_0 \in S$, con $s_0 > 0$; se s_0 è l'elemento minimo di S, allora S ammette minimo, altrimenti esiste $s_1 \in S$ con $s_1 < s_0$; se s_1 è l'elemento minimo di S allora S ammette minimo, altrimenti esiste $s_2 \in S$ con $s_2 < s_1$; procedendo in questo modo, dopo al più un numero finito di passi, in particolare dopo al più s_0 passi, si trova l'elemento minimo di S. Si consideri invece la stessa relazione, ma tra numeri interi; allora $(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}, <)$ non è un buon ordine. Infatti sia S il sottoinsieme di $\mathbf{Z}$ formato da tutti i numeri negativi: chiaramente S non ammette minimo e pertanto la relazione non può essere un buon ordine.

5. Relazioni d'ordine largo

Come abbiamo visto nella sezione precedente, un tipico esempio di relazione d'ordine stretto è la relazione $<$ tra insiemi numerici. Spesso tuttavia è più utile confrontare coppie di numeri tramite la relazione $\leq$. Questa non è una relazione d'ordine stretto, dato che non è antiriflessiva, ma si verifica facilmente che è riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

DEFINIZIONE 5.1. Una relazione (A, A, R) riflessiva, antiriflessiva e transitiva è detta *relazione d'ordine largo.*

ESEMPI 5.2. Si consideri la relazione tra insiemi $(\mathbf{N}, \mathbf{N}, R)$ dove, dati i numeri naturali n e m, nRm se e solo se $n \leq m$; si verifica facilmente che R è una relazione d'ordine largo.

Sia X un insieme e $(P(X), P(X), R)$ la relazione definita da YRX se e solo se $Y \subseteq Z$, dove Y e Z sono sottoinsiemi di X; allora R è una relazione d'ordine largo.

Per chiarire la differenza tra il concetto di ordine stretto e ordine largo, si consiglia di ricordare i due esempi precedenti, confrontandoli con gli analoghi esempi 4.2 della sezione precedente.

Il legame tra le relazioni d'ordine stretto e d'ordine largo è molto forte: ogni relazione d'ordine stretto individua in modo univoco una relazione d'ordine largo, e viceversa.

PROPOSIZIONE 5.3. (a) *Sia* (A, A, R) *una relazione d'ordine stretto e si consideri la relazione* $R' = \{(x, y) \mid (x, y) \in R$ *oppure* $x = y\}$. *Allora* (A, A, R') *è una relazione d'ordine largo.*

(b) *Sia* (A, A, R) *una relazione d'ordine largo e si consideri la relazione* $R' = \{(x, y) \mid (x, y) \in R$ *e* $x \neq y\}$. *Allora* (A, A, R') *è una relazione d'ordine stretto.*

DIMOSTRAZIONE. (a) Dobbiamo verificare che R' è riflessiva, antisimmetrica e transitiva, sapendo che R è antiriflessiva e transitiva. Sia quindi $x \in A$; la coppia (x, x) appartiene a R' per costruzione, quindi R' è riflessiva. Inoltre se $(x, y) \in R'$ e $(y, x) \in R'$, possiamo concludere che $x = y$; se infatti $x \neq y$, dalla costruzione di R' seguirebbe che $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$. Per la transitività di R si avrebbe quindi che $(x, x) \in R$, contrariamente all'antiriflessività di R. Pertanto R' è antisimmetrica. Per finire, siano $(x, y) \in R'$ e $(y, z) \in R'$; se $x = y$ allora ovviamente $(x, z) \in R'$ e analogamente se $y = z$ allora $(x, z) \in R'$. Se $x \neq y$ e $y \neq z$, allora per costruzione $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$; essendo R transitiva si conclude che $(x, z) \in R$ e quindi $(x, z) \in R'$.

(b) Dobbiamo verificare che R' è antiriflessiva e transitiva sapendo che R è riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Sia quindi $x \in A$; la coppia (x, x) non appartiene a R' per costruzione, quindi R' è antiriflessiva. Inoltre siano $(x, y) \in R'$ e $(y, z) \in R'$; dalla costruzione di R' sappiamo che $x \neq y$, $y \neq z$, $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$. Per la transitività di R otteniamo $(x, z) \in R$; se $x = z$, si avrebbe inoltre $(y, x) \in R$ e quindi per l'antisimmetria di R si concluderebbe che $x = y$, contrariamente al fatto che $(x, y) \in R'$. Quindi otteniamo $(x, z) \in R$ e $x \neq z$, cioè $(x, z) \in R'$. □

6. Relazioni n-arie

La definizione di relazione data in 1.1 è anche detta relazione *binaria*, poiché coinvolge *coppie* ordinate. Si può generalizzare questa definizione, introducendo il concetto di relazione *n-aria*:

DEFINIZIONE 6.1. Una *relazione n-aria* è un insieme di *n-uple* ordinate.

Una relazione n-aria è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, dove A_i è un insieme a cui appartengono tutti gli i-esimi termini delle n-uple. Nel seguito, se non diversamente specificato, col termine relazione intenderemo relazioni binarie

Esercizi

ESERCIZIO 1. Descrivere geometricamente la relazione sull'insieme $X = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ definita da xRy se $x^2 + y^2 = 1$; si ripeta l'esercizio con la relazione xR se $x^2 + y^2 \leq 1$.

ESERCIZIO 2. Sia $X = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ e si consideri la relazione $R = \{((a, b), (c, d)) \mid (a, b), (c, d) \in X$ e $a + d = b + c\}$. Si dimostri che R è una relazione d'equivalenza.

ESERCIZIO 3. Si consideri la relazione su $\mathbf{Z}$ definita da xRy se e solo se $-2 \leq x - y \leq 2$. È una relazione d'equivalenza?

ESERCIZIO 4. Si consideri la seguente relazione su $\mathbf{Z}$: $R = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{Z},\ a^2 = b^2 \text{ e } b < a\}$. Dire se si tratta di una relazione di tipo noto; quali sono gli elementi $x \in \mathbf{Z}$ tali che $(3, x) \in R$?

ESERCIZIO 5. Si consideri la seguente relazione sull'insieme $\mathbf{Z} \setminus \{0\}$ dei numeri interi diversi da 0:

$$R = \{ (a, b) : a, b \in \mathbf{Z}, ab > 0\}.$$

Dire se è una relazione di tipo noto, motivandone la risposta. Quali sono gli elementi in relazione con -3?

ESERCIZIO 6. Sia (A, A, R) una relazione d'ordine stretto e sia $S \subseteq A$. Si dimostri che, se esiste un minimo di S, questo è unico. Si dimostri l'analogo fatto per un massimo.

ESERCIZIO 7. Mostrare che $R = \{(a, b), (a, e), (a, d), (a, f), (b, e), (b, f), (c, b), (c, e), (c, f), (d, f), (e, f)\}$ è una relazione d'ordine stretto sull'insieme $\{a, b, c, d, e, f\}$. Determinare gli eventuali elementi massimali, minimali, massimo, minimo, estremo superiore e estremo inferiore del sottoinsieme $\{b, d, e\}$.

ESERCIZIO 8. Mostrare che $R = \{(6, 5), (6, 4), (6, 3), (6, 2), (6, 1), (5, 3), (5, 4), (5, 2), (5, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1), (2, 1)\}$ è una relazione d'ordine stretto sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Determinare gli eventuali elementi massimali, minimali, massimo, minimo, estremo superiore e estremo inferiore del sottoinsieme $\{2, 3, 4\}$.

ESERCIZIO 9. Mostrare che $R = \{(7, 5), (7, 3), (7, 2), (7, 1), (6, 4), (6, 3), (6, 2), (6, 1), (5, 3), (5, 2), (5, 1), (4, 3), (4, 2), (4, 1), (3, 2), (3, 1)\}$ è una relazione d'ordine stretto sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Determinare gli eventuali elementi massimali, minimali, massimo, minimo, estremo superiore e estremo inferiore del sottoinsieme $\{3, 4, 5\}$.

ESERCIZIO 10. Si consideri la relazione sull'insieme $\mathbf{N}$ definita da $R = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{N} \text{ e } b - a \text{ è multiplo di } 5\}$. Si dica se è una relazione di tipo noto.

ESERCIZIO 11. Si consideri la relazione sull'insieme $\mathbf{Z}$ definita da $R = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{Z} \text{ e } b - a \text{ è multiplo di } 5\}$. Si dica se è una relazione di tipo noto.

ESERCIZIO 12. Sia $X = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ e sia $R = \{((a, b), (c, d)) \mid (a, b), (c, d) \in X \text{ e } a \leq c\}$. Si dica se R è una relazione di tipo noto.

ESERCIZIO 13. Sia $X = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ e sia $R = \{((a, b), (c, d)) \mid (a, b), (c, d) \in X \text{ e } a < c\}$. Si dica se R è una relazione di tipo noto.

ESERCIZIO 14. Sia R una relazione d'ordine stretto. Si costruisca come nella Proposizione 5.3(a) la relazione d'ordine largo R'. A partire da R', si costruisca come in 5.3(b) la relazione d'ordine stretto R''. Si dimostri che $R = R''$. Si svolga lo stesso esercizio partendo da una relazione R d'ordine largo.