ALGEBRA LINEARE CON ELEMENTI DI GEOMETRIA (Proff. L. Angeleri, M. Spera)

modulo : ELEMENTI DI GEOMETRIA Prof. M. Spera

Prova scritta del 22 giugno 2010

(1) Nel piano euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, e ampliato proiettivamente: 1. determinare la conica $\mathcal{C}$ tale che $r: y - 4x = 0$ sia un asintoto, passi per $P:[0,1,1]$, $Q:[1,1,0]$ e tale che $d: x-1=0$ sia un diametro, precisandone il tipo affine. 2. Determinare gli assi della conica, individuando quello focale. 3. Calcolare le lunghezze dei semiassi e abbozzare il grafico di $\mathcal{C}$

(2) Nello spazio euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, si consideri

$$\mathcal{C}: \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1 & \leftarrow \Sigma \text{ sfera} \\ x + y + z = 2 & \leftarrow \pi \text{ piano} \end{cases}$$

1. Dimostrare che si tratta di una circonferenza reale, e se ne determinino il centro e il raggio.

2. Determinare il vertice V del cono circoscritto a Σ, tangente lungo $\mathcal{C}$, nonché la sua semiapertura ϑ

Tempo a disposizione 1h.15m - Le risposte vanno adeguatamente giustificate

(1) Determinare la conica $\mathscr{C}$ tale che

$r: \ y-4x=0$ sia un asintoto,

passi per $P:[0,1,1]$, $Q:[1,1,0]$

e tale che $d: \ x-1=0$ sia un diametro.

Sol. Si tratta evidentemente di un'iperbole

centro di $\mathscr{C}$: $\int \begin{cases} y-4x=0 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow C:(1,4)$

passmo per C

$(\equiv [1,1,4])$

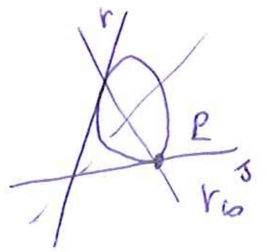
P individua la direzione dell'altro asintoto, che pertanto ha equazione

$s: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 4+t \end{cases}$ $\quad t = x-1$

$y = 4+x-1$
$= x+3$

$\mathscr{C}$ appartiene al fascio di coniche bitangenti

$$rs + \lambda r_\infty^2 = 0$$



$r: \ x_2 - 4x_1 = 0$
$s: \ x_2 - x_1 - 3x_0 = 0$
$r_\infty: \ x_0 = 0$

$$(x_2-4x_1)(x_2-x_1-3x_0)+\lambda x_0^2 = 0$$

Passaggio per Q: $\quad -4(\underbrace{0-1-3}_{-4}) + \lambda = 0$

$+16+\lambda = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\lambda = -16}$

$\mathscr{C}: \ (x_2-4x_1)(x_2-x_1-3x_0) - 16x_0^2 = 0$

$x_2^2 \underbrace{-4x_1x_2}\ \underbrace{-x_2x_1} + 4x_1^2 - 3x_0x_2 + 12x_0x_1 - 16x_0^2 = 0$

$$\mathcal{C}: \ -16x_0^2 + 4x_1^2 + x_2^2 - 5x_1x_2 - 3x_0x_2 + 12x_0x_1 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} -16 & 6 & -\frac{3}{2} \\ 6 & 4 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 32 & -12 & 3 \\ -12 & -8 & 5 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \det A = 32 \cdot 16 - 12 \cdot 15 - 12 \cdot 15 + 8 \cdot 9 - 25 \cdot 32 + 144 \cdot 2$$

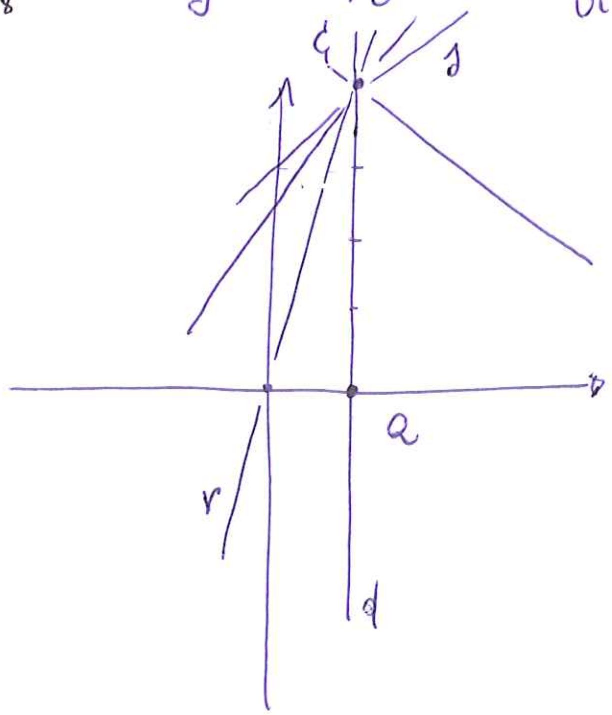
$$= 512 - 360 + 72 - 800 + 288 = 512 + 360 - 360 - 800$$

$$= 512 - 800 = -288 = -2 \cdot 2^4 \cdot 3^2$$

$$= -2^5 \cdot 3^2$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ 2 \\ \hline 512 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 800 \\ 512 \\ \hline 288 \end{array}$$

$$\underset{\text{tr}A_{00}}{J} = -10 \qquad \underset{\det A_{00}}{\alpha_{00}} = 16 - 25 = -9 \quad (\text{iperbole}\dots)$$



Controllo: asintoti

$$-8l^2 + 10lm - 2m^2 = 0$$

$$-8 + 10m - 2m^2 = 0$$

$$m^2 - 5m + 4 = 0$$

$$\Rightarrow m = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases} \qquad \underline{\text{ok}}$$

passaggio per Q: $-16 + 4 + 12 = 0$ ✓

assi : diam con. ortogonali

$$\begin{pmatrix} -m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8+5m \\ 5-2m \end{pmatrix} = 0$$

$$\boxed{\text{assi}: \ y-4 = m_\pm (x-1)}$$

$$-m(-8+5m) + 5 - 2m = 0$$

$$8m - 5m^2 + 5 - 2m = 0$$

$$6m - 5m^2 + 5 = 0$$

$$5m^2 - 6m - 5 = 0 \qquad \text{(eq. reciproca...)}$$

$$m = \frac{3 \pm \sqrt{9+25}}{5} = \frac{3 \pm \sqrt{34}}{5} = m_\pm$$

controllo: ortogonalità degli assi

$$\frac{3-\sqrt{34}}{5} \cdot \frac{3+\sqrt{34}}{5} = \frac{9-34}{25} = -\frac{25}{25} = -1 \quad ✓$$

asse focale $\rightsquigarrow$ $m = \dfrac{3-\sqrt{34}}{5}$

per ragioni geometriche (v. anche grafico)

semiassi a, b

$$t^2 + \frac{a_{00}\, I}{a}\, t + \frac{a_{00}^3}{a^2} = 0$$

$$t^2 + \frac{(-9)\cdot(-10)}{(-2^5 3^2)}\, t + \frac{(-9)^3}{2^{10} 3^4} = 0$$

$$t^2 - \frac{5}{2^4} t - \frac{3^2}{2^{10}} = 0$$

$$\frac{\cancel{3}^2 \, 2 \cdot 5}{2^5 \cdot \cancel{3}^2} = \frac{5}{2^4}$$

$$\frac{3^6}{2^{10} \cdot 3^4} = \frac{3^2}{2^{10}}$$

$$2^{10} t^2 - 5 \cdot 2^6 t - 3^2 = 0$$

$$t = \frac{5 \cdot 2^5 \pm \sqrt{5^2 \cdot 2^{10} + 2^{10} \cdot 3^2}}{2^{10}}$$

$3^2 + 5^2 = 34$

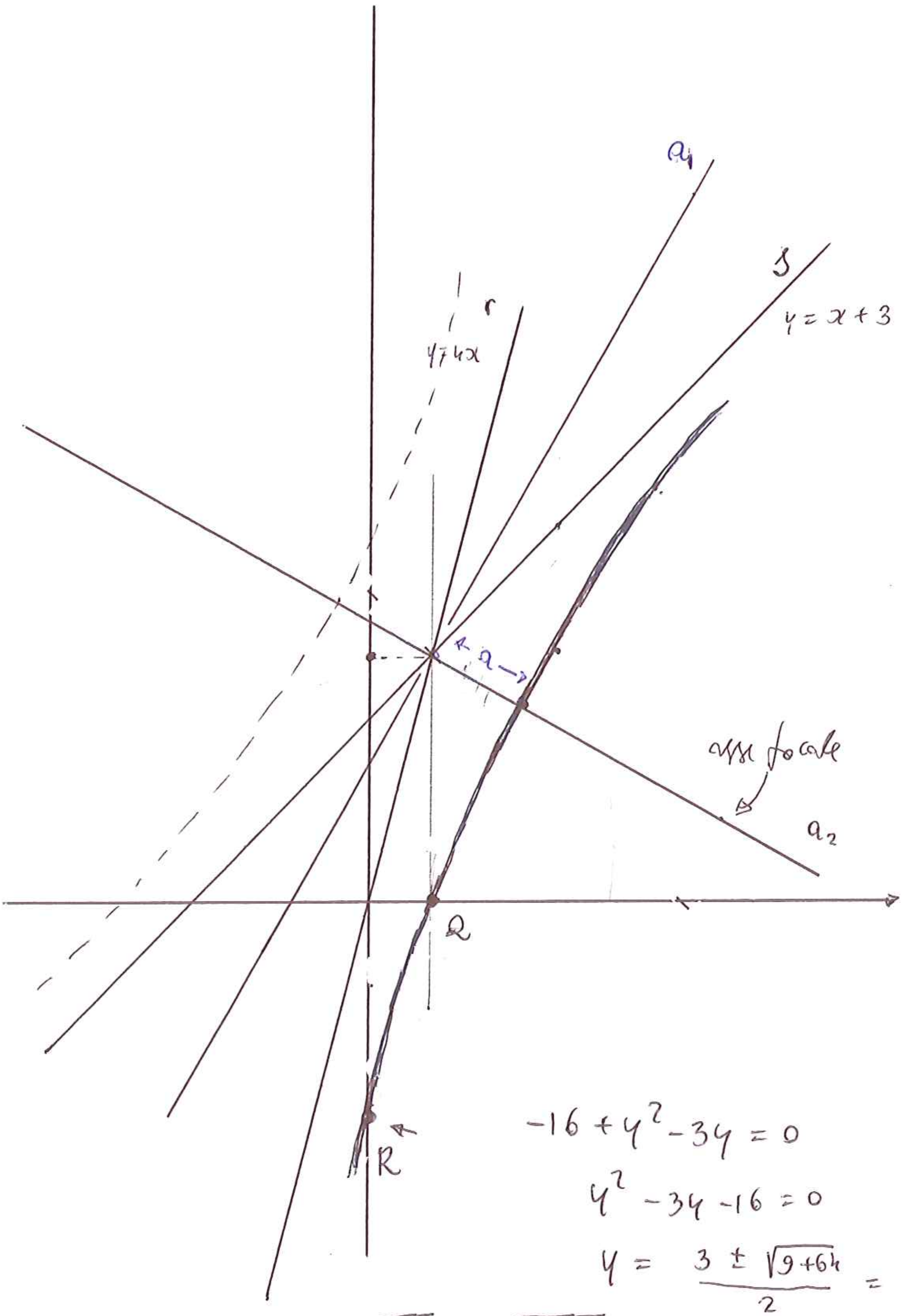
$$= \frac{5 \cdot 2^5 \pm \sqrt{2^{10} \cdot 34}}{2^{10}} =$$

$$= \frac{5 \cdot 2^5 \pm \sqrt{34} \cdot 2^5}{2^{10}} = \frac{1}{2^5}\left(5 \pm \sqrt{34}\right)$$

$$\Rightarrow \quad a = \sqrt{\frac{32}{5 + \sqrt{34}}} \qquad b = \sqrt{\frac{32}{\sqrt{34} - 5}}$$

$$a \sim \sqrt{\frac{32}{11}} \sim \sqrt{3} \sim 1{,}7$$

Abbozzo del grafico



$$-16 + y^2 - 3y = 0$$

$$y^2 - 3y - 16 = 0$$

$$y = \frac{3 \pm \sqrt{9+64}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{73}}{2}$$

$$\sqrt{73} = \sqrt{81-8} = \sqrt{81\left(1-\frac{8}{81}\right)} \simeq 9\left(1 - \frac{8}{162}\right) = 9 - \frac{9 \cdot 4}{81} = 9 - \frac{4}{9} \sim 8.5$$

(2)

I [illegible] 22/6/10

centro della sfera Σ

Circonferenza nello spazio

$$\mathcal{C}: \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1 \;:\; \Sigma \qquad C_\Sigma : (1,0,0) \\ x + y + z = 2 \;:\; \pi \end{cases}$$

piano

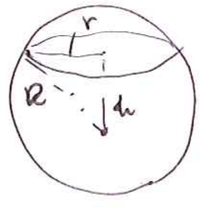
è reale?, $\quad C_\Sigma : (1,0,0)$

$$h = d(C_\Sigma, \pi) = \frac{|1+0+0-2|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1 \quad ✓$$

raggio r della circonferenza $\mathcal{C}$: $\quad r^2 = R^2 - h^2$

$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}}$$



centro C della circonferenza:

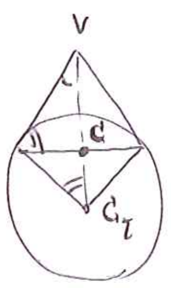
Sia $s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad C = s \cap \pi$

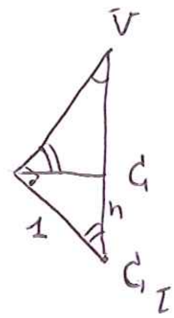
retta per C_Σ, $\perp \pi$ $\qquad 1 + t + t + t = 2$

$$3t = 1 \qquad t = \frac{1}{3}$$

$C : \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \left(\text{controllo } \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2 \; ✓ \right)$

determiniamo V, vertice del cono circoscritto a Σ lungo $\mathcal{C}$.





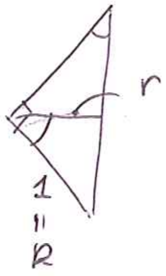
dal 1° teor di Euclide determiniamo

$$x = \overline{VC_\Sigma} \;; \qquad x \cdot h = 1^2 = 1$$

$$x = \frac{1}{h} = \sqrt{3}$$

Pertanto $\bar{V}: \begin{cases} x = 1+\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \\ z = \sqrt{3} \end{cases}$ $\bar{V}: (1+\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$

apertura del cono ϑ : è subito



$$\cos\vartheta = r = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\vartheta = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$$