# Logica Computazionale - 2007-8
# Esercizio 7

November 27, 2007

**Parte 3(v)-(vi) dell'Esercizio 6**

## 1 La categoria $C(\lambda)$

$C(\lambda)$ è definita come segue:

- **Ob**$(C(\lambda))$: definiti dalla grammatica

$$A, B \;:=\; \quad p \mid \top \mid A \cap B \mid A \supset B$$

- **Mor**$(C(\lambda))$: per ogni coppia di tipi $A$, $B$,

$$\mathcal{H}om(A, B) = \{b(x) \in \Lambda \mid x : A \vdash b : B \text{ in } \mathbf{NJ}^{\supset\cap\top}\}$$

  cioè i lambda termini $b(x)$ (una sola variabile libera $x$, *modulo* $\alpha$-conversione), associati ad una derivazione nella deduzione naturale minimale di $b : B$ dalla sola assunzione aperta $x : A$.

**Problema**. *Verificare che* $C(\lambda)$ è una categoria (*esercizio* (*v*)).

Vogliamo verificare che $C(\lambda)$ è cartesiana chiusa (*esercizio* (*vi*).

### 1.1 $C(\lambda)$ è cartesiana

• $C(\lambda)$ è cartesiana se ha un *oggetto terminale* e prodotti binari (da cui segue che ha tutti i *prodotti finiti*).

### 1.1.1 Oggetto terminale

L'oggetto terminale di $C(\lambda)$ è la formula $\top$, con un termine $nil_A(x) : \top$ per ogni tipo $A$, che decora la conclusione di una regola di inferenza della forma

$$\frac{t(x) : A}{nil_A(t(x)) : \top}\ \top\text{-I}$$

con la regola di *commutazione*

$$\begin{array}{c} x : A \\ \vdots \\ \dfrac{\dfrac{t(x) : B}{u(x) : C}\ \mathcal{I}}{nil_C(u(x)) : \top}\ \top\text{-I} \end{array} \qquad \succ \qquad \begin{array}{c} x : A \\ \vdots \\ \dfrac{t(x) : B}{nil_B(t(x)) : \top}\ \top\text{-I} \end{array}$$

dove $\mathcal{I}$ sta per qualsiasi regola ad una premessa (nel caso di una regola a due premesse, una delle due premesse è cancellata).

Abbiamo $\mathcal{H}om(A, \top) = \{nil_A(x) : \top\}$ perchè se definiamo $\equiv$ come la chiusura riflessiva, simmetrica e transitiva di $\succ$, allora per ogni $B$ ed ogni $x : A \vdash t(x) : B$ abbiamo

$$x : A \vdash nil_B(t(x)) \equiv x : A \vdash nil_A(x)$$

Pertanto se consideriamo le classi di equivalenza determinate da $\equiv$ sull'insieme dei lambda termini estesi con la funzione *nil*, queste soddisfano la proprietà dell'unicità. È dunque giustificata la scrittura $x : A \vdash \star : \top$ nella dispensa di M. E. Maietti *Semantica categoriale per il lambda calcolo tipato semplice*, p.4.

### 1.1.2 Prodotti binari

Dati $A$, $B$ in $\mathbf{Ob}(C(\lambda))$, il *prodotto categorico di $A$ e $B$* è dato da

- un oggetto $A \times B$ in $\mathbf{Ob}(C(\lambda))$ – cioè il tipo $A \cap B$ – insieme a
- due morfismi in $\mathbf{Mor}(C(\lambda))$ – cioè due deduzioni $\pi_0 : A \cap B \vdash A$ e $\pi_1 : A \cap B \vdash B$ –
- e ad una operazione $\langle\ ,\ \rangle$ tale che

per ogni coppia di derivazioni $x : C \vdash t : A$ e $x : C \vdash u : B$, esiste un'unica derivazione $x : C \vdash \langle t, u\rangle : A \cap B$ con la proprietà

$$(\P) \qquad \pi_0\langle t, u\rangle = t, \qquad \pi_1\langle t, u\rangle = u \qquad \langle \pi_0 \cdot h, \pi_1 \cdot h\rangle = h.$$

**Problema:** (vi)(a) *Considera l'insieme* **Ppr** *dei termini generato dalla grammatica*

$$t, u \ := \quad x \mid \langle t, u\rangle \mid \pi_0 t \mid \pi_1 t$$

*come* etichette (labels) *delle assunzioni e delle regole di inferenza* $\cap$-I, $\cap_0$-E *e* $\cap_1$-E, *rispettivamente. Verifica che le* $\beta\eta_0$*-riduzioni di tali termini riducono le formule massimali e minimali di derivazioni in* $\mathbf{NJ}^{\cap}$ *e che le classi di equivalenza di* **Ppr** *modulo la* $\beta\eta$*-equivalenza* (la chiusura riflessiva, simmetrica e transitiva della $\beta\eta_0$-riduzione) *soddisfano le equazioni* (¶).

### 1.1.3 Esponenti

Dati $A$, $B$ in una categoria cartesiana $\mathcal{C}$ l'*esponente* $B^A$ *di* $B$ *ed* $A$ è dato da

- un oggetto in $\mathbf{Ob}(\mathcal{C})$, scritto anche $[A \to B]$ e detto l' *oggetto dei morfismi da* $A$ *in* $B$, insieme ad
- un morfismo $App : [A \to B] \times A \to B$

tale che in $\mathbf{Mor}(\mathcal{C})$ per ogni morfismo $f : C \times A \to B$ esiste un *unico* morfismo $Cur(f) : C \to [A \to B]$ con la proprietà

- *esistenza:* $\qquad App \cdot \langle cur(f) \cdot \pi_C, \pi_A\rangle = f$

  L'unicità deriva dalla seguente equazione, per ogni $g : C \to [A \to B]$:

- *unicità:* $\qquad Cur(App \cdot \langle g \cdot \pi_C, \pi_A\rangle) = g$

Infatti se

$$App \cdot \langle cur(f) \cdot \pi_C, \pi_A\rangle = f = App \cdot \langle g \cdot \pi_C, \pi_A\rangle$$

allora

$$Cur(f) = Cur(App \cdot \langle cur(f) \cdot \pi_C, \pi_A\rangle) = Cur(App \cdot \langle g \cdot \pi_C, \pi_A\rangle) = g$$

In $\mathbf{Ob}(C(\lambda))$, poniamo

- per *oggetto dei morfismi* $[A \to B]$ da $A$ in $B$, la formula $A \supset B$;
- per morfismo $App : [A \to B] \times A \to B$ la seguente derivazione:

$$\dfrac{\cap_0\text{-E}\ \dfrac{v : (A \supset B) \cap A}{\pi_0 v : A \supset B} \qquad \dfrac{v : (A \supset B) \cap A}{\pi_1 v : A}\ \cap_1\text{-E}}{(\pi_0 v)\pi_1 v : B}\ \supset\text{-E}$$

• Dato un morfismo $f : C \cap A \supset B$ in $\mathbf{Mor}(C(\lambda))$ – cioè una derivazione $z : C \cap A \vdash fz : B$ – costruiamo un morfismo $Cur(f) : C \supset (A \supset B)$ – cioè la derivazione $y : C \vdash Cur(f)(y) : A \supset B$ – come segue:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{y : C \qquad x : A}{\langle y, x\rangle : C \cap A}\cap\text{-I}\\ \vdots \\ f[\langle y, x\rangle/z] : B\end{array}}{\lambda x. f[\langle y, x\rangle/z] : A \supset B}\supset\text{-I}$$

• Per dimostrare la proprietà di *esistenza* ed *unicità* del *Cur*, notiamo che per ogni $g : C \supset (A \supset B)$ in $\mathbf{Mor}(C(\lambda))$, $App \cdot \langle g \cdot \pi_C, \pi_A\rangle$ si rappresenta come segue. Data una derivazione $c : C \vdash g(c) : A \supset B$ abbiamo una derivazione

$\mathcal{D}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{z : C \cap A}{\pi_0 z : C}\cap_0\text{-E}\\ \vdots \\ g[\pi_0 z/c] : A \supset B\end{array} \qquad \dfrac{z : C \cap A}{\pi_1 z : A}\cap_1\text{-E}}{\langle g[\pi_0 z/c], \pi_1 Z\rangle : (A \supset B) \cap A}\cap\text{-I}}{\pi_0\langle g[\pi_0 z/c], \pi_1 Z\rangle : (A \supset B)}\cap_0\text{-E} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{z : C \cap A}{\pi_0 z : C}\cap_0\text{-E}\\ \vdots \\ g[\pi_0 z/c] : A \supset B\end{array} \qquad \dfrac{z : C \cap A}{\pi_1 z : A}\cap_1\text{-E}}{\langle g[\pi_0 z/c], \pi_1 z\rangle : (A \supset B) \cap A}\cap\text{-I}}{\pi_1\langle g[\pi_0 z/c], \pi_1 z\rangle : A}\cap_1\text{-E}}{(\pi_0\langle g[\pi_0 z/c], \pi_1 z\rangle)\pi_1\langle g[\pi_0 z/c], \pi_1 Z\rangle : B}\supset\text{-E}$$

Per dimostrare l'*esistenza* del *Cur*, occorre rimpiazzare $Cur(f)$ – cioè la derivazione $y : C \vdash Cur(f)(y) : A \supset B$ – per $g$ in $\mathcal{D}$ e poi mostrare che la derivazione si $\beta\eta$-riduce a $Cur(f)$.

**Problema**(vi)(b): *esegui questa verifica.*

Per dimostrare l'*unicità* del *Cur*, occorre considerare la derivazione $y : C \vdash Cur(\mathcal{D}) : A \supset B$ – che rappresenta $Cur(App \cdot \langle g \cdot \pi_C, \pi_A\rangle)$ – e poi mostrare che questa si $\beta\eta$-riduce a $y : C \vdash g(y) : A \supset B$.

**Problema**(vi)(c): *esegui questa verifica.*