UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

ANALISI MATEMATICA I - Modulo Avanzato

Pamphlet sugli Studi Qualitativi di ODEs

Marco Squassina

Anno Accademico 2006/2007

Indice

Capitolo 1

Esempi di studi qualitativi di ODEs

1 Qualche richiamo generale

Richiamiamo anzitutto, senza dimostrazione, alcuni utili teoremi.

(1.1) Definizione *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e sia $f(t,u)$ una funzione continua su $I \times \mathbb{R}$. Diciamo che $u : I \to \mathbb{R}$ è una soluzione dell'equazione differenziale*

$$u' = f(t,u), \tag{1.2}$$

se u è derivabile e $u'(t) = f(t,u(t))$ per ogni $t \in I$. Diciamo che $u : J \to \mathbb{R}$ è una soluzione massimale di (1.2) *se non esistono soluzioni di* (1.2) *definite su un intervallo $\tilde{J}$ con $J \subset \tilde{J}$.*

(1.3) Definizione *Diciamo soluzioni stazionarie di* (1.2) *le soluzioni costanti di* (1.2).

(1.4) Teorema [di esistenza e unicità locale] *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e sia $f(t,u)$ una funzione continua su $I \times \mathbb{R}$ e localmente lipschitziana rispetto a u. Siano $t_0 \in I$ e $u_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri il problema di Cauchy*

$$u' = f(t,u), \qquad u(t_0) = u_0.$$

Allora esistono $\delta > 0$ e un'unica soluzione $u :]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\to \mathbb{R}$ del problema di Cauchy.

(1.5) Osservazione *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e $f(t,\cdot)$ una funzione di classe $C^1(\mathbb{R})$. Allora $f(t,u)$ è localmente lipschitziana rispetto a u, per cui vale il teorema di esistenza ed unicità locale.*

(1.6) Osservazione *Siano $u : I \to \mathbb{R}$ e $v : I \to \mathbb{R}$ due soluzioni locali distinte dell'equazione*

$$u' = f(t,u).$$

Supponiamo che f soddisfi le ipotesi del teorema di esistenza locale. Allora $u(t) \neq v(t)$ per ogni $t \in I$. Infatti, se esistesse $\tilde{t} \in I$ tale che $u(\tilde{t}) = v(\tilde{t})$, i problemi di Cauchy

$$u' = f(t,u), \quad u(\tilde{t}) = v(\tilde{t}); \qquad v' = f(t,v), \quad v(\tilde{t}) = u(\tilde{t})$$

avrebbero la stessa soluzione su I, i.e. $u = v$ su I, contro l'ipotesi che u e v siano distinte.

(1.7) Teorema [di esistenza globale] *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f(t,u)$ una funzione continua su $I \times \mathbb{R}$ e localmente lipschitziana rispetto a u. Si consideri l'equazione differenziale*

$$u' = f(t,u).$$

Sia $u : J \to \mathbb{R}$ una sua soluzione massimale. Supponiamo che esistano $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$ tali che

$$|f(t,u(t))| \leq \alpha + \beta |u(t)|, \qquad \forall t \in J.$$

Allora $J = I$. In particolare, se $I = \mathbb{R}$ questa condizione (crescita sublineare della funzione f) implica che le soluzioni massimali sono definite su tutto $\mathbb{R}$.

(1.8) Teorema [di confronto] *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e siano $f(t,u)$, $g(t,u)$ due funzioni continue su $I \times \mathbb{R}$ e localmente lipschitziane rispetto ad u. Siano u e v due funzioni che verificano*

$$u' \leq f(t,u(t)), \qquad v' \geq g(t,v(t)), \qquad \forall t \in I.$$

Supponiamo inoltre che risulti

$$f(t,u(t)) \leq g(t,u(t)), \qquad \forall t \in I.$$

Allora

$$u(t_0) \leq v(t_0) \implies u(t) \leq v(t) \quad \forall t \geq t_0,$$

mentre

$$u(t_0) \geq v(t_0) \implies u(t) \geq v(t) \quad \forall t \leq t_0.$$

(1.9) Teorema [di monotonia] *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f(t,u)$ una funzione di classe C^1 su $I \times \mathbb{R}$. Sia u la soluzione del problema di Cauchy*

$$u' = f(t,u), \qquad u(t_0) = u_0.$$

Supponiamo che $f(t_0,u_0) = 0$ e che

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,u(t)) \geq 0, \qquad \forall t \in I.$$

Allora

$$u'(t) \leq 0, \qquad \forall t \leq t_0, \qquad u'(t) \geq 0, \qquad \forall t \geq t_0.$$

(1.10) Teorema [dell'asintoto] *Sia $u : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che esistono i limiti*

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = \Gamma, \qquad \lim_{t \to +\infty} u'(t) = \gamma.$$

Allora, se $\Gamma \in \mathbb{R}$, si ha $\gamma = 0$.

2 Esempi svolti di studi qualitativi

Vediamo ora una serie di esempi di problemi di Cauchy, studiati in modo completo al variare delle condizioni iniziali. Per problemi autonomi lo studio è in genere un pò più agevole (facendo però attenzione all'eventuale estinzione della soluzione in tempo finito). Per problemi non autonomi utilizzeremo talvolta alcuni espedienti ad-hoc, calzati sulla particolare struttura dell'equazione. Verranno in alcuni casi inclusi i grafici delle soluzioni, ottenuti con Octave e Gnuplot sotto Mac OSX. Ulteriori esercizi verrano svolti a lezione e saranno in parte tratti dal volume: Esercizi di Analisi Matematica 2, Volume 3 (equazioni differenziali ordinarie), di S. Salsa e A. Squellati.

(2.1) Problema *Studiare, al variare del dato iniziale $\alpha \in \mathbb{R}$, il comportamento qualitativo delle soluzioni del problema di Cauchy autonomo*

$$\begin{cases} u' = u^3 - u \\ u(0) = \alpha. \end{cases}$$

Si risolva inoltre esplicitamente il problema determinando i tempi di esplosione $t_{\max}$ delle soluzioni che hanno intervallo massimale $J_\alpha \neq \mathbb{R}$.

Svolgimento. Evidentemente $f(t,u) = u^3 - u$ è di classe $C^1(\mathbb{R})$, per cui, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione locale, definita in un intorno di 0. Le soluzione stazionarie dell'equazione devono soddisfare

$$u^3 - u = 0,$$

per cui $u \equiv -1$, $u \equiv 0$ e $u \equiv 1$ sono le uniche soluzioni stazionarie. Nel caso in cui α sia uguale a $-1, 0, 1$ queste sono rispettivamente le soluzioni del problema di Cauchy dato. Conviene quindi distinguere quattro casi:

$$\alpha > 1, \qquad 0 < \alpha < 1, \qquad -1 < \alpha < 0, \qquad \alpha < -1.$$

Caso $\boldsymbol{\alpha > 1}$. Essendo $u \equiv 1$ una soluzione stazionaria, in questo caso la soluzione $u(t)$ del problema rimane sopra la retta $y = 1$ nel suo intervallo massimale di definizione J_α, i.e.

$$\forall t \in J_\alpha : \quad u(t) > 1.$$

Di conseguenza, essendo

$$\forall t \in J_\alpha : \quad u'(t) = u^3(t) - u(t) = u(t)(u(t) - 1)(u(t) + 1) > 0,$$

la soluzione u risulta strettamente crescente su J_α. In particolare, si ha

$$\forall t \in J_\alpha \cap]-\infty, 0] : \quad 1 < u(t) \leq u(0) = \alpha.$$

Dal teorema di esistenza globale si deduce che la soluzione u risulta estendibile sul semiasse dei numeri reali negativi, ossia

$$]-\infty, 0] \subset J_\alpha.$$

La domanda ora è la seguente: l'intervallo J_α è limitato superiormente? la risposta è positiva. Infatti, integrando l'equazione differenziale data rispetto a t sull'intervallo $[0, t]$, risulta

$$\forall t \in J_\alpha \cap [0, +\infty[: \quad t = \int_\alpha^{u(t)} \frac{d\tau}{\tau^3 - \tau}.$$

Si noti che, essendo $\alpha > 1$, non sussistono problemi di integrabilità in senso improprio in $\tau = 1$ per l'integrale che compare a destra. Ora, se sopra $J_\alpha \cap [0, +\infty[$ la soluzione rimanesse limitata, per il teorema di esistenza globale la soluzione si potrebbe estendere a tutto il semiasse dei reali positivi, e quindi, in ultima analisi sarebbe definita su tutto $\mathbb{R}$. D'altra parte, in tale caso, la soluzione (monotona e limitata) avrebbe un asintoto orizzontale di valore $\ell > 1$, che risulta impossibile, essendo, per il teorema dell'asintoto

$$0 = \lim_{t \to +\infty} u'(t) = \lim_{t \to +\infty} u^3(t) - u(t) = \ell(\ell - 1)(\ell + 1) > 0.$$

Pertanto, deve risultare

$$\sup\{u(t) : \ t \in J_\alpha \cap [0, +\infty[\} = +\infty.$$

Allora esisterebbe una successione $t_j \subset J_\alpha \cap [0, +\infty[$ tale che $u(t_j) \to +\infty$ per $j \to \infty$ e

$$\lim_{j \to \infty} t_j = \lim_{j \to \infty} \int_\alpha^{u(t_j)} \frac{d\tau}{\tau^3 - \tau} = \int_\alpha^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau^3 - \tau}.$$

Come noto dalla teoria degli integrali impropri, la funzione $\frac{1}{\tau^3 - \tau}$ risulta convergente in senso improprio sull'intervallo di integrazione $[\alpha, +\infty[$, per cui

$$t_{\max} = \lim_{j \to \infty} t_j < +\infty,$$

da cui segue che la soluzione è definita sull'intervallo massimale $] - \infty, t_{\max}[$ e

$$\lim_{t \to t_{\max}^-} u(t) = +\infty.$$

Caso $0 < \alpha < 1$. Essendo $u \equiv 0$ e $u \equiv 1$ due soluzioni stazionarie, in questo caso la soluzione $u(t)$ del problema rimane compresa tra le rette $y = 0$ e $y = 1$ nel suo intervallo massimale J_α di definizione, i.e.

$$\forall t \in J_\alpha : \quad 0 < u(t) < 1.$$

Di conseguenza, per il teorema di esistenza globale, deve essere $J_\alpha = \mathbb{R}$. Inoltre, essendo

$$\forall t \in J_\alpha : \quad u'(t) = u^3(t) - u(t) = u(t)(u(t) - 1)(u(t) + 1) < 0,$$

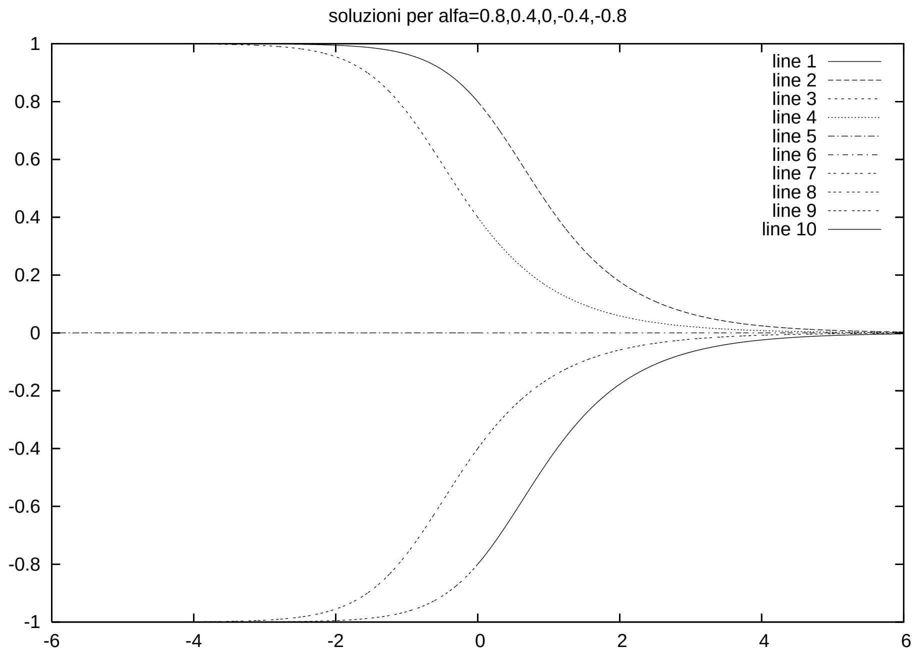
la soluzione u risulta strettamente decrescente su $\mathbb{R}$, quindi ammette limite sia per $t \to -\infty$ che per $t \to +\infty$. Ragionando come sopra, per il teorema dell'asintoto, si vede subito che

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = 0, \qquad \lim_{t \to -\infty} u(t) = 1.$$

Caso $-1 < \alpha < 0$. Questo caso si tratta come il precedente, con la sola differenza che la soluzione risulta strettamente crescente e, per il teorema dell'asintoto, risulta

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0, \qquad \lim_{t\to-\infty} u(t) = -1.$$

Il grafico di alcune delle soluzioni con dati iniziali compresi tra le soluzioni stazionarie appare come nella seguente figura:



Caso $\alpha < -1$. Questo caso è l'analogo del caso $\alpha > 1$; la soluzione risulta strettamente decrescente e l'intervallo massimale risulta ancora della forma $]-\infty, \tau_{\max}[$ con

$$\lim_{t\to\tau_{\max}^-} u(t) = -\infty.$$

Si osservi che l'equazione assegnata è a variabili separabili, quindi può anche essere risolta esplicitamente, calcolando i tempi di estinzione della soluzione nei casi $|\alpha| > 1$. Vediamo, a titolo di esempio, il caso $\alpha > 1$. Essendo

$$\frac{1}{u^3 - u} = -\frac{1}{u} + \frac{1}{2(u+1)} + \frac{1}{2(u-1)},$$

integrando l'equazione su $[0, t]$, $t \geq 0$, risulta

$$\left[-\log u + \frac{1}{2}\log(u+1) + \frac{1}{2}\log(u-1)\right]_{\alpha}^{u(t)} = t,$$

da cui

$$\frac{\sqrt{u^2(t) - 1}}{u(t)} = \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha} e^t,$$

pertanto

$$\forall t \in]-\infty, t_{\max}[: \qquad u(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2} e^{2t}}},$$

dove

$$t_{\max} = \log\left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}}\right).$$

Da questa espressione vi vede anche come l'intervallo massimale di definizione tende ad invadere tutta la retta reale quando α tende ad 1^+, mentre tende a $]-\infty, 0]$ quando α tende a $+\infty$. In altre parole, formalmente, potremmo scrivere $J_{+\infty} =]-\infty, 0]$ e $J_{1^+} = \mathbb{R}$. Simili considerazioni si possono fare per $\alpha \to -1^-$ e per $\alpha \to -\infty$. ■

(2.2) Problema *Studiare, al variare del dato iniziale $\alpha \in \mathbb{R}$, il comportamento qualitativo delle soluzioni del problema di Cauchy autonomo*

$$\begin{cases} u' = \sin u \\ u(0) = \alpha. \end{cases}$$

Svolgimento. Evidentemente $f(t,u) = \sin u$ è di classe C^1, per cui, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione locale, definita in un intorno di 0. Le soluzioni stazionarie sono le soluzioni dell'equazione $\sin u = 0$, per cui $u_k = k\pi$, per $k \in \mathbb{Z}$. In particolare, se $\alpha = \alpha_k = k\pi$, la soluzione del problema di Cauchy dato è la soluzione stazionaria $u(t) = u_k$. I tutti gli altri casi, dato $\alpha \in \mathbb{R}$, deve esistere $k \in \mathbb{Z}$ tale che

$$k\pi < \alpha < (k+1)\pi.$$

Per il Teorema di esistenza ed unicità locale, in tal caso, la soluzione si mantiene compresa tra le due soluzioni stazionarie, sul suo intervallo massimale di definizione J_α, ossia

$$\forall t \in J_\alpha : \quad k\pi < u(t) < (k+1)\pi.$$

Evidentemente $J_\alpha = \mathbb{R}$ per il teorema di esistenza globale, essendo $|f(t,u(t))| = |\sin u(t)| \leq 1$. Inoltre, si ha anche

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad u'(t) = \sin u(t) > 0, \quad \text{per } k \text{ pari},$$

e

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad u'(t) = \sin u(t) < 0, \quad \text{per } k \text{ dispari},$$

per cui, u risulta strettamente crescente o strettamente decrescente a seconda che k sia pari o dispari e, in conclusione, si verifica facilmente che

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = (k+1)\pi, \qquad \lim_{t\to-\infty} u(t) = k\pi, \quad \text{per } k \text{ pari}$$

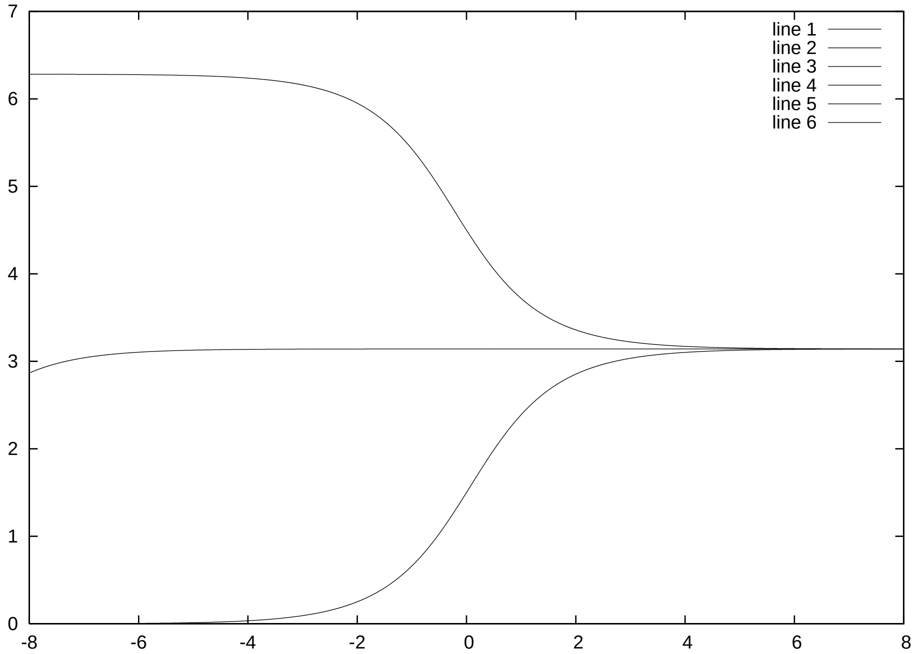
e

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = k\pi, \qquad \lim_{t\to-\infty} u(t) = (k+1)\pi, \quad \text{per } k \text{ dispari}.$$

Si osservi che

$$\forall t \in \mathbb{R}: \quad u''(t) = u'(t)\cos u(t) = \sin u(t)\cos u(t) = \frac{1}{2}\sin(2u(t)),$$

per cui si vede facilmente che ai livelli $\beta_k = \frac{2k+1}{2}\pi$ le soluzioni cambiano concavità (flessi). Il seguente grafico mostra alcune soluzioni del problema di Cauchy



La soluzione centrale è quasi costante e corrisponde alla scelta del valore iniziale $\alpha = 3.1415$, approssimazione di π (che è una soluzione stazionaria). ■

(2.3) Problema *Studiare, al variare del dato iniziale $\alpha \in \mathbb{R}$, il comportamento qualitativo delle soluzioni del problema di Cauchy autonomo*

$$\begin{cases} u' = \arctan(u^2 - 1) \\ u(0) = \alpha. \end{cases}$$

Svolgimento. Lo svolgimento viene lasciato per esercizio. ■

Vediamo ora un problema di Cauchy che presenta maggiori difficoltà di studio.

(2.4) Problema *Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$, il comportamento qualitativo delle soluzioni del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{\sqrt{u^2+t^2-1}} \\ u(0) = \alpha. \end{cases}$$

Stimare l'intervallo massimale della soluzione nel caso particolare $\alpha = 0$.

Svolgimento. La funzione che definisce l'equazione differenziale risulta di classe C^1 nell'insieme dei punti (t, u) tali che $t^2 + u^2 \neq 1$, quindi, localmente, per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, l'equazione ammette una ed una sola soluzione. Conviene distinguere i casi $|\alpha| < 1$ e $|\alpha| > 1$. Nel primo caso le soluzioni, che partono all'interno del disco di raggio 1 e centro l'origine, rimangono necessariamente confinate all'interno del disco (se incontrassero la circonferenza in un punto $(\tau, u(\tau))$, la soluzione non sarebbe derivabile in τ!). Per lo stesso motivo, nel secondo caso, le soluzioni che partono al di fuori del disco non possono mai entrarvi. Quindi, se $|\alpha| < 1$, le soluzioni hanno un intervallo massimale $J_\alpha \subset]-1, 1[$ e risultano strettamente decrescenti (visto il membro destro dell'equazione). Se $|\alpha| > 1$ le soluzioni devono essere strettamente crescenti sul loro intervallo massimale. Si osservi inoltre che, dall'equazione, si ricava l'espressione della derivata seconda di u

$$\forall t \in J_\alpha : \qquad u''(t) = -\frac{u(t)u'(t) + t}{\sqrt{u^2(t) + t^2}(\sqrt{u^2(t) + t^2} - 1)^2}.$$

Pertanto la soluzione risulta convessa sugli intervalli $I_\alpha \subset J_\alpha$ tali che

$$\forall t \in I_\alpha : \qquad u(t)u'(t) + t \leq 0,$$

mentre risulta concava sugli intervalli $I_\alpha \subset J_\alpha$ tali che

$$\forall t \in I_\alpha : \qquad u(t)u'(t) + t \geq 0.$$

Ne segue che, per $\alpha = 0$, essendo la soluzione (decrescente) negativa per $t \geq 0$ e positiva per $t \leq 0$, dalle disuguaglianze precedenti la soluzione risulta concava per $t \geq 0$ e convessa per $t \leq 0$. Osserviamo ora che in $t = 0$ la derivata vale -1, quindi la retta tangente al grafico della soluzione in 0 è la bisettrice del secondo e quarto quadrante Quindi, per motivi di convessità-concavità, risulta in questo caso che $J_0 \subset (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Nei casi $|\alpha| > 1$, tenuto conto del segno e della monotonia delle soluzioni, si può dire che

$$\alpha > 1 \implies J_\alpha \subset [0, +\infty[, \qquad \alpha < -1 \implies J_\alpha \subset]-\infty, 0].$$

Infatti, in questi casi, le soluzioni non possono avvicinarvi alla circonferenza $t^2 + u^2 = 1$ per cui il secondo membro dell'equazione si mantiene uniformemente limitato (quindi la derivata della soluzione si mantiene limitata) da cui l'estendibilità delle soluzioni sulle semirette. Si tratta di mostrare ora che esistono due valori critici $\alpha^+ > 1$ e $\alpha^- < -1$ tali che si trovano $\lambda_\alpha < 0$ e $\gamma_\alpha > 0$ che verificano

$$\alpha > \alpha^+ \implies J_\alpha = \mathbb{R}, \qquad 1 < \alpha \leq \alpha^+ \implies J_\alpha =]\lambda_\alpha, +\infty[.$$

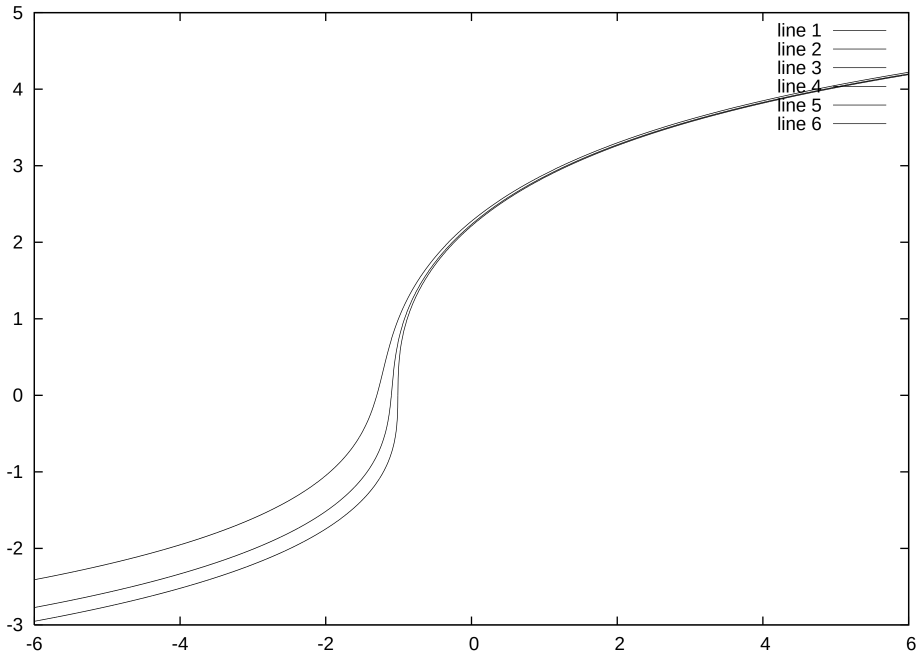
e

$$\alpha < \alpha^- \implies J_\alpha = \mathbb{R}, \qquad \alpha^- \leq \alpha < -1 \implies J_\alpha =]-\infty, \gamma_\alpha[.$$

Ragioniamo nel caso $\alpha > 1$ (si procede in modo simile se $\alpha < -1$). Prendiamo $\varepsilon > 0$ e consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} w' = \frac{1}{\sqrt{w^2+t^2-1}} \\ w(-1-\varepsilon) = 0. \end{cases}$$

Evidentemente questo problema ha una soluzione w_ε definita su tutto $\mathbb{R}$ e strettamente crescente. Infatti la soluzione parte fuori dal disco unitario centrato nell'origine, rimane sempre fuori (la soluzione non può collassare con tangente verticale sulla circonferenza, altrimenti dovrebbe essere decrescente su un opportuno intervallo, che è impossibile!) e risulta dall'equazione $w' > 0$. Esisterà quindi un $\varpi_\varepsilon > 1$ tale che $w(0) = \varpi_\varepsilon$. Risulta allora evidente (dal fatto che due soluzioni distinte della stessa equazione non si possono mai incrociare) che per ogni $\alpha \geq \varpi_\varepsilon$ la soluzione u del nostro problema (che partiva in $(0, \alpha)$) deve essere definita su tutto $\mathbb{R}$ (perchè vive al di sopra di w_ε che è definita su $\mathbb{R}$ e staccata dalla circonferenza, quindi u' rimane limitata) ed essere strettamente crescente. Si osservi che, per motivi elementari, ϖ_ε deve rimanere limitata per $\varepsilon \to 0$ (fissato $\varepsilon_0 > 0$, si vede subito geometricamente che $\varpi_\varepsilon < \varpi_{\varepsilon_0}$ per ogni $\varepsilon < \varepsilon_0$). Allora $\varpi_\varepsilon \to \alpha^+$ e α^+ deve avere la proprietà enunciata sopra (si pensi a dove va a sbattere una soluzione che parte in $(0, \alpha)$ con $1 < \alpha < \alpha^+$!). Nella seguente figura, riportiamo i grafici di w_ε per $\varepsilon = 0.3$, $\varepsilon = 0.1$ e $\varepsilon = 0.03$ rispettivamente (dall'alto verso il basso)



Un'altra indicazione di ciò che accade può essere ottenuta approssimando la soluzione u nell'intorno di 0 con il suo polinomio di McLaurin di secondo grado. Si trova

$$u(x) \approx \alpha + \frac{x}{\alpha - 1} - \frac{x^2}{2(\alpha - 1)^3}.$$

Il discriminante del polinomio di secondo grado risulta

$$\Delta_\alpha = \frac{3\alpha - 1}{(\alpha - 1)^3} > 0$$

e gli zeri sono dati da

$$x_\pm^\alpha = (\alpha - 1)^2 \pm \sqrt{(3\alpha - 1)(\alpha - 1)^3}.$$

Pertanto, per α abbastanza vicino a 1, sicuramente si ha $|x_{\pm}^{\alpha}| < 1$ per cui la parabola deve anche necessariamente intersecare la circonferenza in un punto ad ordinata positiva (e ascissa negativa). In particolare, la soluzione deve esplodere in tempo finito in corrispondenza di un certo $t = \lambda_\alpha < 0$. Per valori molto grandi di α la parabola (di grande ampiezza) non interseca la circonferenza, per cui non ci possono essere dei punti di estinzione per la soluzione, che sarà quindi definita su tutto $\mathbb{R}$. ■

Nell'esempio che segue facciamo variare l'istante iniziale del problema di Cauchy, anzichè il valore iniziale.

(2.5) Problema *Studiare, al variare del punto iniziale $\alpha \in \mathbb{R}$, il comportamento qualitativo delle soluzioni del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u' = \frac{e^{t-u}}{u} \\ u(\alpha) = 1. \end{cases}$$

Determinare, in particolare, il dominio di u_α al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. La funzione che definisce l'equazione differenziale risulta di classe C^1 nell'insieme dei punti (t, u) tali che $u \neq 0$, quindi, essendo $u(\alpha) \neq 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, l'equazione ammette sempre una ed una sola soluzione locale. Essendo $u(\alpha) > 0$, sull'intervallo massimale di definizione J_α, la soluzione u deve essere tutta contenuto nel semipiano delle ordinate positive, ossia

$$\forall t \in J_\alpha : \quad u(t) > 0$$

altrimenti si annullerebbe il denominatore al membro destro dell'equazione. In particolare, ne segue anche che

$$\forall t \in J : \alpha : \quad u'(t) = \frac{e^{t-u(t)}}{u(t)} > 0,$$

per cui u risulta strettamente crescente su J_α. Se vi fosse esplosione in tempo finito a destra di $t = \alpha$, esisterebbe $\beta_\alpha > \alpha$ tale che

$$\lim_{t \to \beta_\alpha^-} u(t) = +\infty,$$

che implicherebbe

$$\lim_{t \to \beta_\alpha^-} u'(t) = \lim_{t \to \beta_\alpha^-} \frac{e^{t-u(t)}}{u(t)} = e^{\beta_\alpha} \lim_{t \to \beta_\alpha^-} \frac{1}{u(t)e^{u(t)}} = 0,$$

impossibile. Pertanto deve essere $[\alpha, +\infty[\subset J$. Esiste quindi il limite di u per $t \to +\infty$. Se tale limite fosse finito, ossia se

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = \ell > 0,$$

si avrebbe

$$\lim_{t \to +\infty} u'(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^{t-u(t)}}{u(t)} = +\infty,$$

che non è possibile. Ne segue

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = +\infty.$$

Integrando l'equazione (si tratta di una equazione a variabili separabili), si ottiene la seguente soluzione in forma implicita

$$(u-1)e^u = e^t - e^\alpha.$$

Consideriamo anzitutto il caso $\alpha > 0$. Facendo un rapido studio della funzione

$$\varphi(u) = (u-1)e^u,$$

si ottiene $\varphi(u) \geq -1$ per ogni $u \in \mathbb{R}$, per cui appare in modo naturale il vincolo sui tempi

$$e^t - e^\alpha \geq -1,$$

ossia

$$t \geq \log(e^\alpha - 1).$$

Quindi u non si può prolungare a tutto il semiasse negativo, ossia $\gamma = \inf(J_\alpha) > -\infty$. Deve essere

$$\lim_{t \to \gamma^+} u(t) = 0, \qquad \lim_{t \to \gamma^+} u'(t) = +\infty.$$

Nel caso in cui $\alpha \leq 0$, allora dalla soluzione in forma implicita risulta che per ogni $t \leq \alpha$ è possibile determinare il corrispondente valore $u(t)$, ossia $\inf(J_\alpha) = -\infty$. Si osservi che il limite di u per $t \to -\infty$ deve essere finito, essendo u crescente e limitata tra 0 e α. Se fosse

$$\lim_{t \to -\infty} u(t) = 0,$$

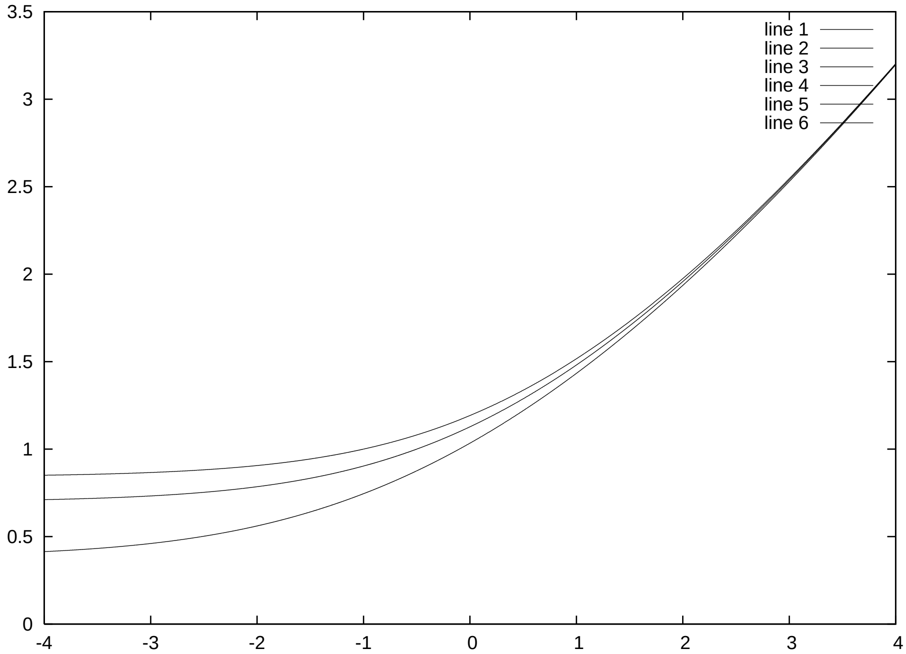
passando al limite nella soluzione implicita, si avrebbe $-1 = -e^\alpha$, da cui $\alpha = 0$, mentre in generale $\alpha \neq 0$. Ne segue che, per ogni $\alpha \leq 0$ deve esistere $\varpi_\alpha \in [0, \alpha[$ tale che

$$\lim_{t \to -\infty} u(t) = \varpi_\alpha,$$

e ϖ_α deve soddisfare l'equazione

$$(1 - \varpi_\alpha)e^{\varpi_\alpha} = e^\alpha,$$

che ammette sempre soluzione, essendo α negativo. Nel grafico seguente si vedono le soluzioni corrispondenti ad $\alpha = -1$, $\alpha = -0.5$ e $\alpha = -0.1$



Si noti come l'asintoto orizzontale della soluzione a $-\infty$ vari in effetti con α. ∎

(2.6) Problema *Studiare, al variare del dato iniziale $\alpha \geq 0$, il comportamento qualitativo delle soluzioni del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u' = \frac{u^2}{1-tu}, \\ u(0) = \alpha. \end{cases}$$

Svolgimento. La funzione che definisce l'equazione differenziale risulta di classe C^1 nell'insieme dei punti (t, u) tali che $1 - tu \neq 0$, quindi, per ogni α l'equazione, partendo in $t = 0$, ammette una ed una sola soluzione locale. Tenuto conto della forma del denominatore al membro destro dell'equazione, sull'intervallo massimale J_α delle soluzioni deve risultare

$$\forall t \in J_\alpha : \quad 1 - tu(t) \neq 0.$$

In altre parole, il grafico della soluzione non può incontrare l'iperbole $1/t$. Essendo poi $u(0) = \alpha$, la condizione sopra si traduce in

$$\forall t \in J_\alpha \cap]0, +\infty[: \quad u(t) < \frac{1}{t}.$$

Osserviamo inoltre che $u \equiv 0$ è una soluzione stazionaria per l'equazione, per cui, se $\alpha = 0$, $u \equiv 0$ è la soluzione del problema di Cauchy, se $\alpha > 0$ si ha

$$\forall t \in J_\alpha \cap]0, +\infty[: \quad 0 < u(t) < \frac{1}{t}, \qquad \forall t \in J_\alpha \cap] - \infty, 0[: \quad 0 < u(t) \leq \alpha.$$

Se $\alpha > 0$, si osservi che, se $t \leq 0$, allora $f(t,u) = \frac{u^2}{1-tu}$ è una funzione di classe C^1, per cui, essendo $0 < u(t) \leq \alpha$ dal teorema di esistenza globale si deduce che $]-\infty, 0] \subset J_\alpha$. D'altronde, la soluzione u non può essere definita su tutta la semiretta reale positiva, essendo la soluzione strettamente crescente ($u' > 0$) e limitata dall'iperbole equilatera $1/t$. Deve quindi esistere $t_\alpha > 0$ tale che

$$J_\alpha =]-\infty, t_\alpha[, \qquad \lim_{t \to t_\alpha^-} u(t) = \frac{1}{t_\alpha}, \qquad \lim_{t \to t_\alpha^-} u'(t) = +\infty,$$

come segue immediatamente dall'equazione. Per una possibile stima del valore di t_α, si può procedere come segue. L'espressione della derivata seconda di u è la seguente

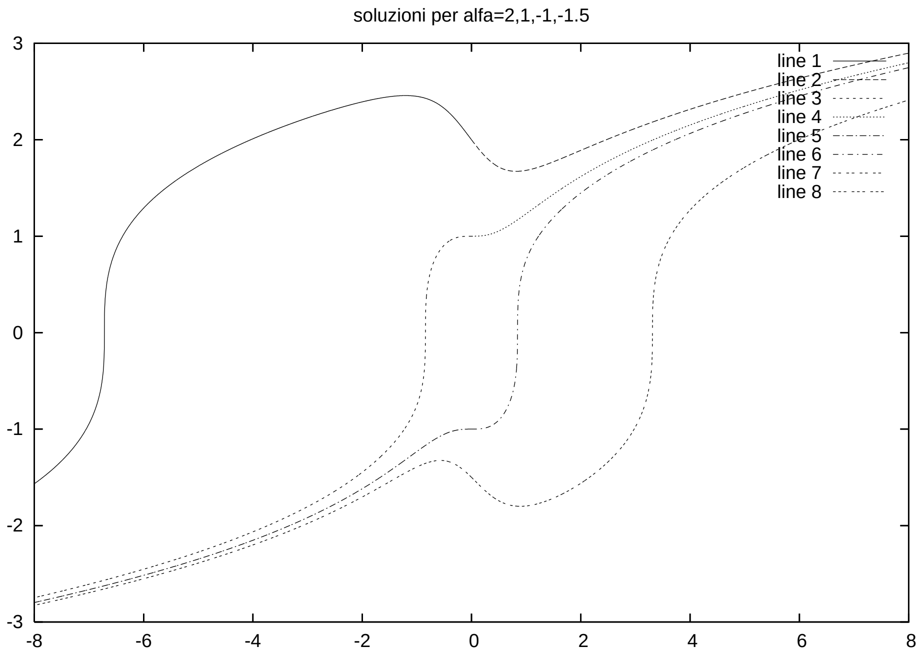
$$u''(t) = \frac{3u^3(t) + tu^2(t)u'(t)}{(1 - tu(t))^2},$$

per cui la soluzione è convessa per $t > 0$. Ora, la retta tangente al grafico di u in $t = 0$ è data da $y = \alpha + \alpha^2 t$. Questa incontra l'iperbole $1/t$ con $t > 0$ quando $\alpha^2 t^2 + \alpha t - 1 = 0$, che ha soluzione positiva $t_\alpha^+ = \frac{\sqrt{5}-1}{2\alpha}$. Allora, per via della convessità di u, deve essere $0 < t_\alpha < \frac{\sqrt{5}-1}{2\alpha}$. Per valori di α grandi, l'intervallo massimale ha estremo superiore prossimo a zero. ∎

(2.7) Problema *Studiare, al variare del dato iniziale $\alpha \in \mathbb{R}$, il comportamento qualitativo delle soluzioni del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{u^2} - \frac{1}{(1+t^2)^2} \\ u(0) = \alpha. \end{cases}$$

Svolgimento. Lo svolgimento viene lasciato per esercizio. Nel caso in cui si prende ad esempio $\alpha = 2, \alpha = \pm 1$ o $\alpha = -1.5$, allora il grafico delle soluzioni si presenta come in figura:

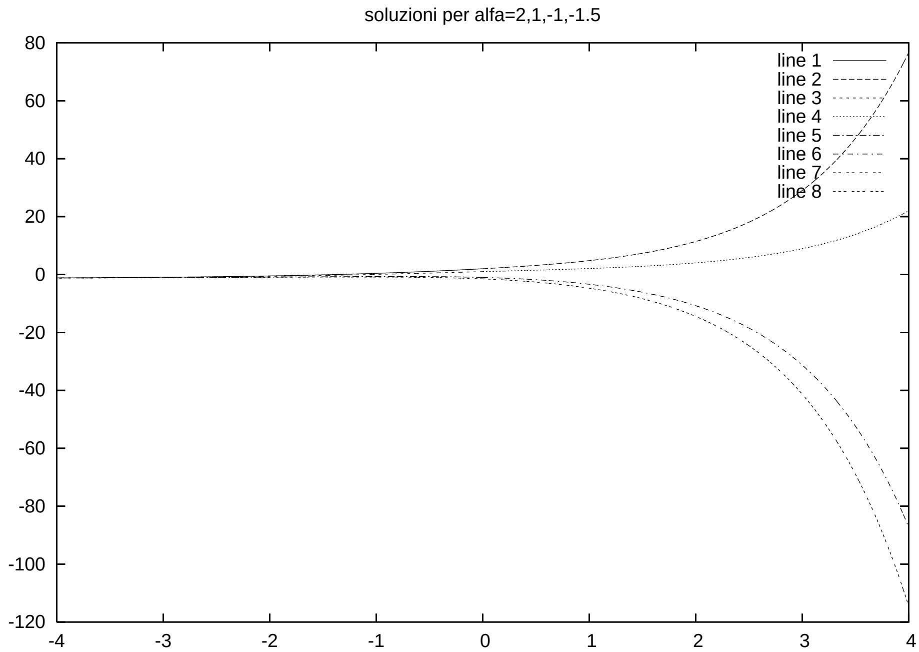


■

(2.8) Problema *Studiare, al variare del dato iniziale $\alpha \in \mathbb{R}$, il comportamento qualitativo delle soluzioni del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u' = u - \arctan(t) \\ u(0) = \alpha. \end{cases}$$

Svolgimento. Lo svolgimento viene lasciato per esercizio. Si veda ad esempio il grafico della soluzione quando $\alpha = 2, 1, -1, -1.5$



Si osserva che, in questo caso, l'equazione è anche risolvibile esplicitamente, con soluzione

$$u(t) = e^t \left[\alpha - \int_0^t e^{-s} \arctan(s) ds \right]$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. Si provi a far derivare le conclusioni ottenute in precedenza dallo studio di questa formula risolutiva. ■

(2.9) Problema *Studiare, al variare del dato iniziale $\alpha \in \mathbb{R}$, il comportamento qualitativo delle soluzioni del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u' = (e^u - 1)(1 - u) \\ u(0) = \alpha\,. \end{cases}$$

Svolgimento. Lo svolgimento è lasciato per esercizio. ■

(2.10) Problema *Studiare, al variare del dato iniziale $\alpha \in \mathbb{R}$, il comportamento qualitativo delle soluzioni del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u' = \frac{\sin^2 t}{1+t^2} e^{-u^2} \\ u(0) = \alpha \,. \end{cases}$$

Svolgimento. Evidentemente $f(t,u) = \frac{\sin^2 t}{1+t^2} e^{-u^2}$ è di classe C^1 rispetto a u, per cui, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione locale, definita in un intorno di 0. Per il teorema di esistenza globale, tutte le soluzioni massimali devono essere definite su $\mathbb{R}$, essendo

$$|f(t,u(t))| = \frac{\sin^2 t}{1+t^2} e^{-u^2(t)} \leq 1.$$

Inoltre,

$$u'(t) > 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}},$$

qualche che sia la soluzione u al variare di α. Non esistono soluzioni stazionarie. Si osservi che

$$u'(k\pi) = 0, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Pertanto le soluzioni sono tutte crescenti e $k\pi$ sono (gli unici) punti a tangente orizzontale. Esistono inoltre i limiti delle soluzioni per $t \to -\infty$ e $t \to +\infty$. Risulta, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{u^2(t)} u'(t) = \frac{\sin^2 t}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2},$$

da cui, integrando nel tempo su $[0,t]$, si ha

$$\int_\alpha^{u(t)} e^{s^2} ds \leq \int_0^t \frac{1}{1+s^2} ds = \arctan(t) \leq \frac{\pi}{2}.$$

In particolare, la soluzione si deve mantenere limitata, altrimenti essendo $u(t_j) \to +\infty$ lungo una opportuna successione t_j, dalla disuguaglianza precedente si dedurrebbe

$$\int_\alpha^{+\infty} e^{s^2} ds \leq \frac{\pi}{2},$$

che risulta impossibile. Ne segue che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, devono esistere $\beta_\alpha^+ \in \mathbb{R}$ e $\beta_\alpha^- \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{t \to -\infty} u(t) = \beta_\alpha^-, \qquad \lim_{t \to +\infty} u(t) = \beta_\alpha^+.$$

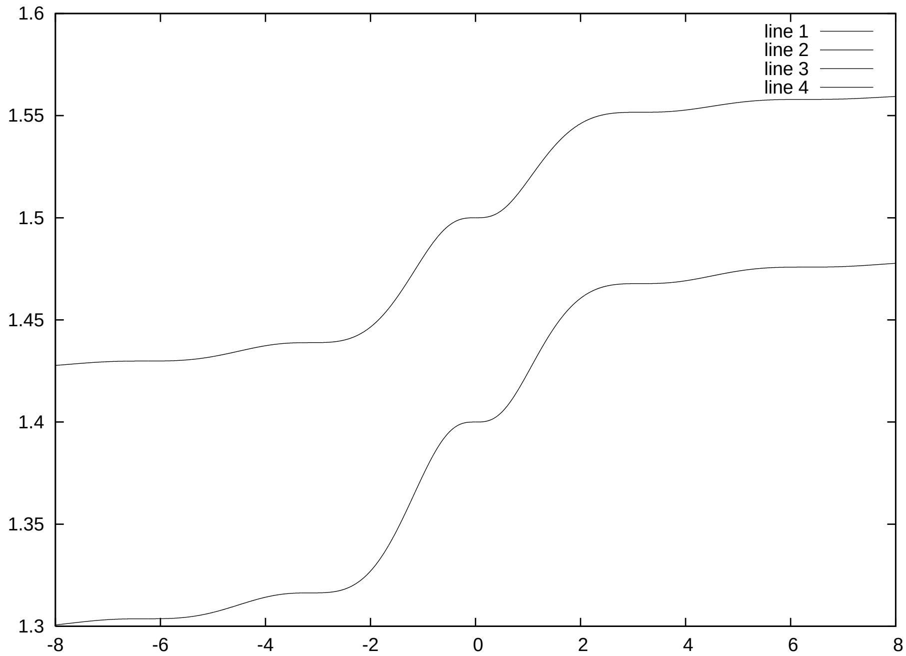
Tali valori dovranno soddisfare le equazioni

$$\int_\alpha^{\beta_\alpha^+} e^{s^2} ds = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 s}{1+s^2} ds, \qquad \int_{\beta_\alpha^-}^{\alpha} e^{s^2} ds = \int_{-\infty}^0 \frac{\sin^2 s}{1+s^2} ds,$$

e quindi anche

$$\int_{\alpha}^{\beta_{\alpha}^{+}} e^{s^2}\,ds = \int_{\beta_{\alpha}^{-}}^{\alpha} e^{s^2}\,ds.$$

Vediamo ad esempio come appare il grafico della soluzione per $\alpha = 1.4$ e $\alpha = 1.5$.



■

(2.11) Problema *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che*

$$f(0) = 0, \qquad f'(x) \geq 0 \quad \textit{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Si consideri l'equazione

$$u' = f(u).$$

Si discutano i seguenti punti:

(a) *gli intervalli di esistenza massimali sono della forma $I =]-\infty, \lambda[$, con $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}$;*

(b) *si esibisca un esempio di f per cui $\lambda = +\infty$ per qualche dato iniziale;*

(c) *si esibisca un esempio di f per cui $\lambda < +\infty$ per qualche dato iniziale;*

(d) *supponiamo che $f(1) = 0$ (e ora non necessariamente che $f' \geq 0$ su $\mathbb{R}$) e si consideri il problema*

$$\begin{cases} u' = f(u) \\ u(0) = \alpha. \end{cases} \tag{P_α}$$

Per quali valori di α la soluzione massimale di P_α è sempre definita su tutto $\mathbb{R}$?

(e) *supponiamo che*

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = \ell \in \mathbb{R}.$$

Mostrare che ℓ è una soluzione dell'equazione $f(x) = 0$;

(f) *se $\alpha > 0$ le soluzioni di P_α sono convesse?*

(g) *se $\alpha < 0$ le soluzioni di P_α sono concave?*

(h) *se $\alpha > 0$ e $f \in C^2(\mathbb{R})$ con f convessa, allora le soluzioni di P_α verificano $u''' \geq 0$?*

Svolgimento. Essendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1, l'esistenza e unicità locale è sempre garantita. Inoltre, essendo $f(0) = 0$, $u = 0$ è una soluzione stazionaria. In particolare, le soluzioni con un valore iniziale $u(0) > 0$ si mantengono strettamente positive, mentre le soluzioni con un valore iniziale $u(0) < 0$ si mantengono strettamente negative. Tenuto conto che f è una funzione crescente, ne segue che le soluzioni con un valore iniziale $u(0) > 0$ sono crescenti, mentre le soluzioni con un valore iniziale $u(0) < 0$ sono decrescenti (essendo $u'(t) = f(u(t)) \geq 0$ e $u'(t) = f(u(t)) \geq 0$ rispettivamente). Sia $J =]\delta, \lambda[$ l'intervallo massimale di definizione delle soluzioni. Supponiamo per assurdo che $\delta > -\infty$. Essendo le soluzioni monotone (crescenti per $u(0) > 0$, decrescenti per $u(0) < 0$), esiste finito il il limite

$$-\infty < \lim_{t\to\delta^+} u(t) = \gamma < +\infty.$$

Allora, si potrebbe considerare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(u) \\ u(\delta) = \gamma \end{cases}$$

prolungando in tal modo ulteriormente la soluzione a sinistra, che non è possibile, visto che J è un intervallo massimale. Quindi, $J =]-\infty, \lambda[$. L'affermazioni (a) è quindi provata. Veniamo ora agli esempi per le (b) e (c). Se ad esempio si prende $f(u) = u$, la soluzione (le funzioni esponenziali) sono definite su tutto $\mathbb{R}$. Se invece si prende $f(u) = e^u - 1$, la soluzioni positive devono explodere in tempo finito. Infatti, integrando l'equazione su $[0, t]$ (supponiamo ad esempio $u(0) = \alpha > 0$), si ha

$$t = \int_\alpha^{u(t)} \frac{ds}{e^s - 1} \leq \int_\alpha^{+\infty} \frac{ds}{e^s - 1} < \infty.$$

Veniamo ora alla (d). Ovviamente, essendo $f(0) = f(1) = 0$, si ha che $u = 0$ e $u = 1$ sono soluzioni stazionarie. Partendo quindi con un valore iniziale $\alpha \in [0, 1]$, le soluzioni rimangono limitate tra 1 e 0 e devono essere di conseguenza definite su tutto $\mathbb{R}$. Negli altri casi, invece la soluzione può esplodere in tempo finito. La (e) è una banale conseguenza del teorema dell'asintoto. Risulta ora

$$u''(t) = f'(u(t))u'(t) = f'(u(t))f(u(t))$$

da cui segue che, se $\alpha > 0$, le soluzioni di P_α sono convesse, mentre se $\alpha < 0$ le soluzioni di P_α sono concave. Risulta

$$u'''(t) = f''(u(t))(f(u(t)))^2 + (f'(u(t))^2 f(u(t))$$

per cui, in effetti, se $\alpha > 0$ e $f \in C^2(\mathbb{R})$ con f convessa, le soluzioni di P_α verificano $u''' \geq 0$. ■

(2.12) Problema *Sia $\varepsilon > 0$ e si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u' = u - \varepsilon u^2 \\ u(0) = \lambda. \end{cases} \tag{$P_{\lambda,\varepsilon}$}$$

Si discutano i seguenti punti:
(a) *esistenza ed unicità locale per $P_{\lambda,\varepsilon}$ al variare di λ e ε;*
(b) *esistenza globale per $P_{\lambda,\varepsilon}$ al variare di λ e ε;*
(c) *stimare l'ampiezza degli intervalli massimali delle soluzioni che esplodono;*
(d) *calcolare esplicitamente le soluzioni $u_{\lambda,\varepsilon}$ di $P_{\lambda,\varepsilon}$;*
(e) *fissato $\varepsilon > 0$, studiare il comportamento delle soluzioni u al variare di λ;*
(f) *fissato λ, studiare il comportamento delle soluzioni u per $\varepsilon \to 0$;*
(g) *studiare il comportamento asintotico per $\varepsilon \to 0$ del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u' = u - \varepsilon u^2 \\ u(0) = \frac{1}{2\varepsilon}. \end{cases} \tag{$P_{\lambda,\varepsilon}$}$$

Svolgimento. La funzione che definisce il problema di Cauchy risulta derivabile infinite volte. In particolare il problema $P_{\lambda,\varepsilon}$ ammette un'unica soluzione locale per ogni λ e per ogni ε. Osserviamo che l'equazione ammette le soluzioni stazionarie $u = 0$ e $u = 1/\varepsilon$. Pertanto, si verifica facilmente che, prendendo $0 < \lambda < \frac{1}{\varepsilon}$, la corrispondente soluzione di $P_{\lambda,\varepsilon}$ è definita su tutto $\mathbb{R}$. Se $\lambda > \frac{1}{\varepsilon}$, allora $u(t) > \frac{1}{\varepsilon}$ sull'intervallo massimale J, mentre $\lambda < 0$, allora $u(t) < 0$ su J. In tali casi, integrando l'equazione su $[0, t]$ risulta

$$\int_\lambda^{u(t)} \frac{ds}{s - \varepsilon s^2} = t$$

per cui la soluzione deve esplodere in tempo finito (la funzione integranda è integrabile in senso improprio su $[\lambda, +\infty[$). Si noti che è possibile integrare esplicitamente l'equazione, ricavando gli intervalli massimale di definizione in modo esplicito. Risulta infatti

$$\frac{1}{s - \varepsilon s^2} = \frac{1}{s} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon s - 1},$$

per cui $\frac{|\varepsilon\lambda - 1||u(t)|}{|\lambda||\varepsilon u(t) - 1|} = e^t$, ossia

$$u(t) = \begin{cases} \frac{\lambda e^t}{1 - \lambda\varepsilon + \lambda\varepsilon e^t} & \text{se } \lambda > \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{con } J = \left]\log\frac{\lambda\varepsilon - 1}{\lambda\varepsilon}, +\infty\right[\\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{se } \lambda = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{con } J = \mathbb{R} \\ \frac{\lambda e^t}{1 - \lambda\varepsilon + \lambda\varepsilon e^t} & \text{se } 0 < \lambda < \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{con } J = \mathbb{R} \\ 0 & \text{se } \lambda = 0, \quad \text{con } J = \mathbb{R} \\ \frac{\lambda e^t}{1 - \lambda\varepsilon + \lambda\varepsilon e^t} & \text{se } \lambda < 0 \quad \text{con } J = \left]-\infty, \log\frac{\lambda\varepsilon - 1}{\lambda\varepsilon}\right[\end{cases}$$

Pertanto gli intervalli massimali delle soluzioni che esplodono sono della forma

$$J_{\lambda,\varepsilon} = \left]\log\frac{\lambda\varepsilon - 1}{\lambda\varepsilon}, +\infty\right[, \quad \text{se } \lambda > \frac{1}{\varepsilon}, \qquad J_{\lambda,\varepsilon} = \left]-\infty, \log\frac{\lambda\varepsilon - 1}{\lambda\varepsilon}\right[, \quad \text{se } \lambda < 0.$$

In particolare, fissato $\varepsilon > 0$, quando $\lambda \to +\infty$, la soluzione e l'intervallo massimale tendono a

$$u(t) = \frac{e^t}{\varepsilon(e^t - 1)} > 0, \qquad J_{+\infty,\varepsilon} =]0, +\infty[\,,$$

mentre quando $\lambda \to -\infty$, la soluzione e l'intervallo massimale tendono a

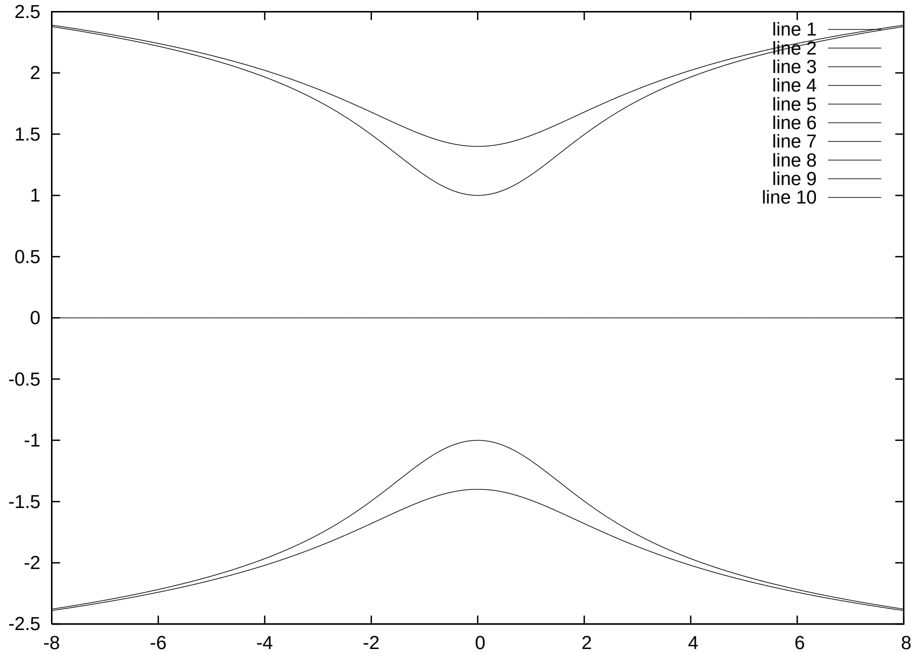
$$u(t) = \frac{e^t}{\varepsilon(e^t - 1)} < 0, \qquad J_{-\infty,\varepsilon} =]-\infty, 0[\,.$$

Fissato $\lambda > 0$, per ε abbastanza piccolo, deve essere $0 < \lambda < \frac{1}{\varepsilon}$ quindi la soluzione è definita su $\mathbb{R}$. Per $\varepsilon \to 0$ la soluzione formalmente tende λe^t (per $\lambda < 0$, la soluzione tende nuovamente a λe^t su $\mathbb{R}$). ■

(2.13) Problema *Studiare, al variare del dato iniziale $\alpha \in \mathbb{R}$, il comportamento qualitativo delle soluzioni del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u' = tue^{-u^2}, \\ u(0) = \alpha. \end{cases}$$

Svolgimento. Lo svolgimento viene lasciato per esercizio. Nella seguente figura vengono rappresentate le soluzioni del problema per $\alpha = \pm 1.4$, $\alpha = 0$ e $\alpha = \pm 1$:

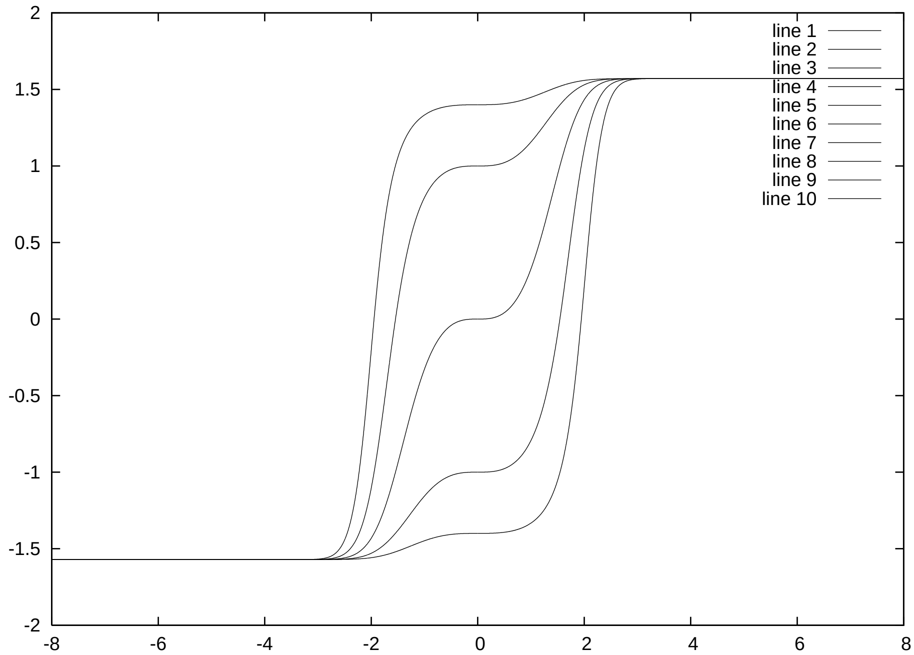


Si notino le simmetrie rispetto alla soluzione stazionaria $u = 0$. ■

(2.14) Problema *Studiare, al variare del dato iniziale $\alpha \in \mathbb{R}$, il comportamento qualitativo delle soluzioni del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u' = t^2 \cos(u), \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Lo svolgimento viene lasciato per esercizio. Nella seguente figura vengono rappresentate le soluzioni del problema per $\alpha = \pm 1.4$, $\alpha = 0$ e $\alpha = \pm 1$:



Si vede come $t = 0$ sia luogo di flessi per le soluzioni. ■

(2.15) Problema *Studiare, al variare del dato iniziale $\alpha \in \mathbb{R}$, il comportamento qualitativo delle soluzioni del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u' = \frac{u-1}{e^u+1} \\ u(0) = \alpha. \end{cases}$$

Svolgimento. Lo svolgimento viene lasciato per esercizio. ■

3 Appendice: equazioni lineari e a variabili separabili

Questa appendice è una rielaborazione di parte delle dispense di Analisi I del Prof. Marco Degiovanni. Vediamo anzitutto le equazioni lineari.

(3.1) Definizione *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ ed $a, f : I \to \mathbb{R}$ due funzioni continue. Diciamo che $u : I \to \mathbb{R}$ è* una soluzione dell'equazione differenziale

$$u'(t) = a(t)u(t) + f(t)\,, \tag{3.2}$$

se u è derivabile e la (3.2) *è soddisfatta per ogni $t \in I$. Le equazioni differenziali di questo tipo si dicono* lineari del primo ordine.

(3.3) Teorema *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ ed $a, f : I \to \mathbb{R}$ due funzioni continue. Siano $A : I \to \mathbb{R}$ una primitiva di a e $B : I \to \mathbb{R}$ una primitiva di*

$$\{t \mapsto f(t)\exp(-A(t))\}\ .$$

Allora le soluzioni $u : I \to \mathbb{R}$ dell'equazione differenziale (3.2) *sono tutte e sole le funzioni della forma*

$$u(t) = c\exp(A(t)) + B(t)\exp(A(t))$$

con $c \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Supponiamo anzitutto che $u : I \to \mathbb{R}$ sia una soluzione della (3.2). Risulta

$$u'(t)\exp(-A(t)) - a(t)\,u(t)\exp(-A(t)) = f(t)\exp(-A(t))\,,$$

ossia

$$(u(t)\exp(-A(t)))' = f(t)\exp(-A(t)) = B'(t)\,.$$

Esiste quindi $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$u(t)\exp(-A(t)) = c + B(t)\,,$$

ossia

$$u(t) = c\exp(A(t)) + B(t)\exp(A(t))\,.$$

Viceversa, sia

$$u(t) = c\exp(A(t)) + B(t)\exp(A(t))\,,$$

con $c \in \mathbb{R}$. Risulta

$$\begin{aligned} u'(t) &= c\,a(t)\exp(A(t)) + B(t)\,a(t)\exp(A(t)) + f(t)\exp(-A(t))\exp(A(t)) = \\ &= a(t)\,u(t) + f(t)\,, \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

(3.4) Definizione *Siano I e J due intervalli in $\mathbb{R}$ ed $a : I \to \mathbb{R}$ e $b : J \to \mathbb{R}$ due funzioni continue. Diciamo che $u : \widetilde{I} \to \mathbb{R}$ è* una soluzione dell'equazione differenziale

$$u'(t) = a(t)b(u(t)), \tag{3.5}$$

se $\widetilde{I}$ è un intervallo contenuto in I, u è derivabile, $u(\widetilde{I}) \subseteq J$ e la (3.5) *è soddisfatta per ogni $t \in \widetilde{I}$. Le equazioni differenziali di questo tipo si dicono* a variabili separabili.

(3.6) Teorema *Siano I e J due intervalli in $\mathbb{R}$ ed $a : I \to \mathbb{R}$ e $b : J \to \mathbb{R}$ due funzioni continue. Poniamo $E = \{x \in J : b(x) \neq 0\}$ e denotiamo con $A : I \to \mathbb{R}$ una primitiva di a e con $B : E \to \mathbb{R}$ una primitiva di $1/b$. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) *se $x \in J$ e $b(x) = 0$, la funzione $u : I \to \mathbb{R}$ costantemente uguale a x è una soluzione della* (3.5)*;*

(b) *una funzione continua $u : \widetilde{I} \to E$, con $\widetilde{I}$ intervallo in I, è una soluzione della* (3.5) *se e solo se esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che*
$$\forall t \in \widetilde{I} : \; B(u(t)) = A(t) + c .$$

Dimostrazione. L'affermazione (a) è evidente. Proviamo la (b). Se $u : \widetilde{I} \to E$ è una soluzione della (3.5), risulta

$$\frac{u'(t)}{b(u(t))} = a(t),$$

ossia

$$(B \circ u)'(t) = a(t).$$

Pertanto esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$B(u(t)) = A(t) + c .$$

Siano viceversa $u : \widetilde{I} \to E$ una funzione continua e $c \in \mathbb{R}$ tali che

$$B(u(t)) = A(t) + c . \tag{3.7}$$

L'insieme $u(\widetilde{I})$ è un intervallo e la funzione $B : u(\widetilde{I}) \to \mathbb{R}$ è derivabile con derivata non nulla, quindi strettamente monotona. Pertanto la funzione inversa

$$B^{-1} : B(u(\widetilde{I})) \to \mathbb{R}$$

è derivabile. Ne segue che

$$u(t) = B^{-1}(B(u(t))) = B^{-1}(A(t) + c)$$

è derivabile. Inoltre dalla (3.7) si deduce che

$$\frac{u'(t)}{b(u(t))} = a(t),$$

per cui u è soluzione della (3.5). ■