ALGEBRA LINEARE CON ELEMENTI DI GEOMETRIA

Proff. L. Angeleri, M. Spera

modulo: ELEMENTI DI GEOMETRIA   Prof. M. Spera

Prova scritta del 1° settembre 2010

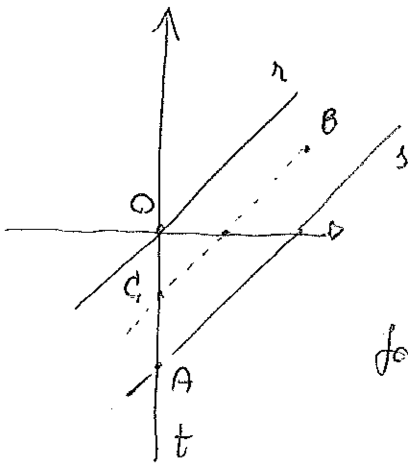
(1) Nel piano euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, e ampliato proiettivamente, si determini la conica $\mathcal{C}$ tangente a $r: x-y=0$ in $O:(0,0)$, tangente a $s: x-y-2=0$ in $A:(0,-2)$ e passante per $B:(2,1)$. Determinarne il tipo affine, il centro C e la lunghezza dei semiassi, e se ne abbozzi il grafico

(2) Nello spazio euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, si determinino i piani π_1, π_2 del fascio di asse r: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{cases}$ passanti per $P_1:(1,1,2)$ e $P_2:(0,0,0)$, rispettivamente.

Individuato il punto $H \in r$ avente minima distanza da P_1, si calcoli l'area del triangolo HP_1P_2.

Tempo a disposizione: 1h. 15m. Le risposte vanno adeguatamente giustificate

(1) conica tangente in $O:(0,0)$ a $r: x-y=0$
tangente in $A:(0,-2)$ a $s: x-y-2=0$
passante per $B:(2,1)$
determinarne il tipo affine, il centro C_1 e la lunghezza dei semiassi



Sol. notiamo che $r \parallel s$ =>
OA è un diametro => $C_1: (0,-1)$ centro

$t = OA: \quad x = 0$

fascio di coniche bitangenti (non omogeneo)

$$r \cdot s + \lambda t^2 = 0$$

$$(x-y)(x-y-2) + \lambda x^2 = 0$$

Passaggio per $B:(2,1)$ => $\underbrace{(2-1)}_{1}\underbrace{(2-1-2)}_{-1} + \lambda \cdot \underbrace{2^2}_{4} = 0$

$$-1 + 4\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{4}$$

$$\mathscr{C}: \quad 4(x-y)(x-y-2) + x^2 = 0$$

$$4(x-y)^2 - 8(x-y) + x^2 = 0$$

$$4(x^2 - 2xy + y^2) - 8x + 8y + x^2 = 0$$

$$\boxed{\mathscr{C}: \ 5x^2 - 8xy + 4y^2 - 8x + 8y = 0}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & +4 \\ -4 & 5 & -4 \\ +4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{Q} = +4^3 \cancel{+4^3} - 5\cdot 4^2 \cancel{-4^3} =$$

$$\overset{\shortparallel}{\det A} = 1\cdot 4^3 - 5\cdot 4^2 = 4\cdot 4^2 - 5\cdot 4^2 = -4^2$$

$$= -16$$

$$\mathcal{Q}_{00} = 5\cdot 4 - 16 = 20-16 = 4 \quad (\text{ellisse})$$

$$\mathcal{J} = 5+4 = 9$$

$$\boxed{t^2 + \frac{\mathcal{Q}_{00}}{\mathcal{Q}}\mathcal{J}\, t + \frac{\mathcal{Q}_{00}^3}{\mathcal{Q}^2} = 0 \qquad \text{semiassi}}$$

$$t^2 + \frac{4\cdot 9}{-4^2}t + \frac{4^3}{4^4} = 0$$

$$t^2 - \frac{9}{4}t + \frac{1}{4} = 0$$

$$9^2 - 4^2$$
$$= (9+4)(9-4)$$
$$= 13\cdot 5 = 65$$

$$4t^2 - 9\cdot t + 1 = 0$$

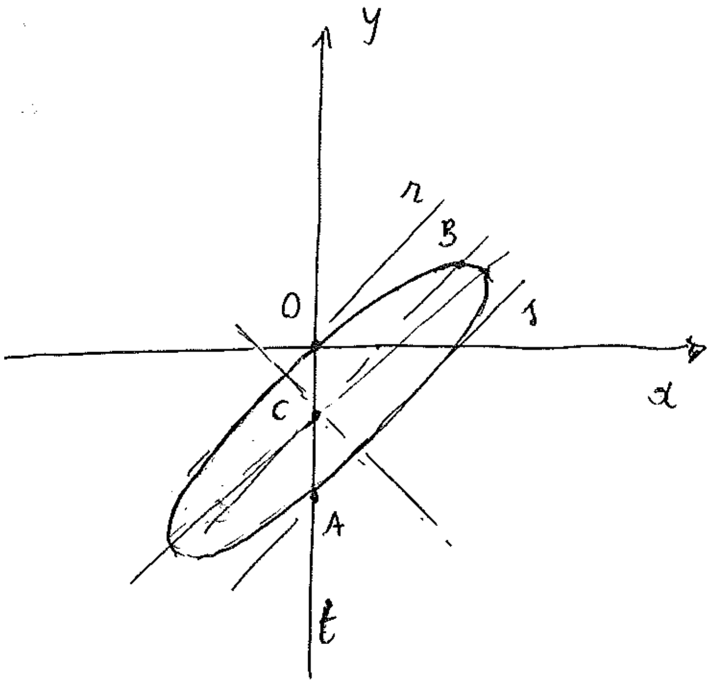
$$t = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4^2}}{8} = \frac{9 \pm \sqrt{65}}{8} \sim \frac{9 \pm 8}{8} \begin{cases} \frac{17}{8} \sim 2 \\ \frac{1}{8} \end{cases}$$

$$t = \begin{cases} \frac{17}{8} \\ \frac{1}{8} \end{cases}$$

$$t = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{a^2} \\ \dfrac{1}{\beta} = \dfrac{1}{b^2} \end{cases} \qquad \begin{matrix} a = \sqrt{\alpha} \\ b = \sqrt{\beta} \end{matrix}$$

$$\boxed{a = \sqrt{8}} = 2\sqrt{2}$$

$$\boxed{b = \sqrt{\frac{8}{17}}} \sim \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Assi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & +4 \\ -4 & 5 & -4 \\ +4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

A_{00}

$$\begin{pmatrix} 1 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$0 = \begin{pmatrix} 1 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5m - 4 \\ -4m + 4 \end{pmatrix} = 5m - 4 \quad - m(-4m + 4)$$

$$= 5m - 4 \quad + 4m^2 - 4m$$

$$= 4m^2 + m - 4$$

$$4m^2 + m - 4 = 0$$

$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4^3}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{65}}{8}$$

$\approx \frac{7}{8}$

$\approx -\frac{9}{8}$

Elegeo 1/9/2010

(2)

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{cases}$$

fascio di asse r

dir: $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\rightsquigarrow$ eq. cart. $\begin{cases} x = 1 + \frac{y}{2} \\ y - z = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 2x - y - z = 0 & \pi_1 \\ y - z = 0 & \pi_2 \end{cases}$

$$\lambda \pi_1 + \mu \pi_2 = 0 \qquad (\lambda, \mu) \neq (0,0)$$

$$\boxed{\lambda (2x - y - z) + \mu (y - z) = 0}$$

$$2\lambda x + (\mu - \lambda) y - \mu z - 2\lambda = 0$$

passaggio per $P_1 : (1, 1, 2)$

$$2\lambda \cdot 1 + (\mu - \lambda) \cdot 1 - \mu \cdot 2 - 2\lambda = 0$$

$$\cancel{2\lambda} + \mu - \lambda - 2\mu - \cancel{2\lambda} = 0$$

$$-\lambda - \mu = 0$$

sia $\lambda = 1 \Rightarrow \mu = -1$ $\rightsquigarrow$ $2x - y - z - y + z = 0$

$\pi' : \boxed{2x - 2y + z - z = 0}$

$2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 2 - 2 = 0$ ✓

passaggio per $P_2 = 0 : (0, 0, 0)$

$$\lambda (-2) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ , prendiamo}$$

$$\mu = 1 \Rightarrow \pi'' = \pi_2 : \boxed{y - z = 0}$$

chiaro a priori

troviamo $H = r \cap \pi$

piano per P_1, $\perp r$

π : piano per P_1 , $\perp r$

$$1(x-1)+2(y-1)+2(z-2)=0$$

$$x-1+2y-2+2z-4=0$$

$$\boxed{\pi: \quad x+2y+2z-7=0}$$

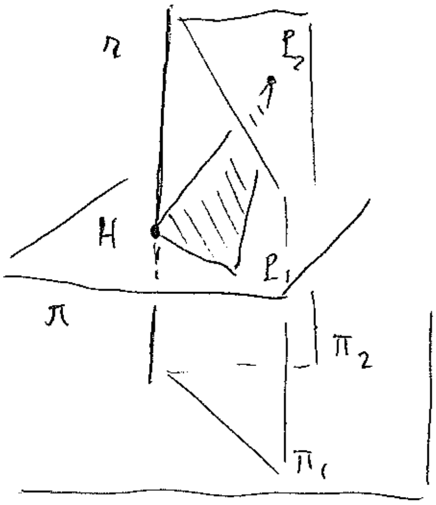
$H=\pi\cap r$ $\qquad 1+t+2\cdot 2t+2\cdot 2t-7=0$

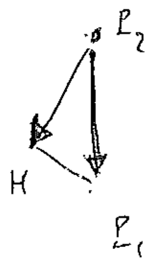
$$r:\begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=2t \end{cases} \qquad 1+t+4t+4t-7=0$$

$$9t-6=0 \qquad t=\frac{6}{9}=\frac{2}{3} \qquad \boxed{t=\frac{2}{3}}$$

$$H:\left(1+\frac{2}{3},\ 2\cdot\frac{2}{3},\ 2\cdot\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{5}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$$

Area di $H P_1 \underset{O}{\underset{\parallel}{P_2}} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{P_2H}\times\overrightarrow{P_2P_1}\right\|$





$$=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}\right\|$$

$$=\frac{1}{2\cdot 3}\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}\right\|$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2}=\frac{1}{6}\sqrt{4^2+6^2+1^2}=$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{16+36+1}=\frac{1}{6}\sqrt{53}=\frac{\sqrt{53}}{6}$$