Esercizi assegnati il 12 ottobre

1 Primo Esercizio

Verificare se le seguenti formule sono equivalenti nella semantica di **K**:

$$\Diamond(A \lor B) \qquad (\Diamond A \lor \Diamond B) \tag{1.1}$$

$$\Diamond(A \land B) \qquad (\Box A \land \Diamond B) \tag{1.2}$$

$$\Box(\Diamond A \to \Box B) \land \Box\Box A \qquad \Box\Box(A \to B) \tag{1.3}$$

Si tratta di dimostrare, per ogni coppia di formule $A \iff B$, che sono validi entrambi i sequent $A \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow A$ nella semantica di **K**. Nella costruzione dell'albero di prova adotto la seguente simbologia per contrassegnare i nodi terminali:

- $\Box$: nodo chiuso (sequent valido);
- $\blacksquare$: nodo aperto (sequent falsificabile);
- $\circledast$: nodo non espanso, in quanto si è già individuato un nodo falsificabile nell'albero di prova;

L'applicazione della **regola di *ramificazione disgiuntiva*** è indicata con l'abbreviazione "*ram.disg.*".

Esercizio 1.1

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Box$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$A \Rightarrow A, B$}
\AxiomC{$\Box$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$B \Rightarrow A, B$}
\RightLabel{$r\lor$}
\BinaryInfC{$A \lor B \Rightarrow A, B$}
\RightLabel{$2 \cdot l\neg, r\neg$}
\UnaryInfC{$\neg A, \neg B \Rightarrow \neg(A \lor B)$}
\RightLabel{$\mathbf{KR}$}
\UnaryInfC{$\Box\neg A, \Box\neg B \Rightarrow \Box\neg(A \lor B)$}
\RightLabel{$2 \cdot r\neg$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \Diamond A, \Diamond B, \Box\neg(A \lor B)$}
\RightLabel{$l\neg$}
\UnaryInfC{$\Diamond(A \lor B) \Rightarrow \Diamond A, \Diamond B$}
\RightLabel{$r\lor$}
\UnaryInfC{$\Diamond(A \lor B) \Rightarrow (\Diamond A \lor \Diamond B)$}
\end{prooftree}
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Box$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$A \Rightarrow A, B$}
\RightLabel{$l\neg, r\neg, r\lor$}
\UnaryInfC{$\neg(A \lor B) \Rightarrow \neg A$}
\RightLabel{$\mathbf{KR}$}
\UnaryInfC{$\Box\neg(A \lor B) \Rightarrow \Box\neg A$}
\RightLabel{$l\neg$}
\UnaryInfC{$\Box\neg(A \lor B), \Diamond A \Rightarrow$}
\AxiomC{$\Box$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$B \Rightarrow A, B$}
\RightLabel{$l\neg, r\neg, r\lor$}
\UnaryInfC{$\neg(A \lor B) \Rightarrow \neg B$}
\RightLabel{$\mathbf{KR}$}
\UnaryInfC{$\Box\neg(A \lor B) \Rightarrow \Box\neg B$}
\RightLabel{$l\neg$}
\UnaryInfC{$\Box\neg(A \lor B), \Diamond B \Rightarrow$}
\RightLabel{$l\lor$}
\BinaryInfC{$\Box\neg(A \lor B), (\Diamond A \lor \Diamond B) \Rightarrow$}
\RightLabel{$r\neg$}
\UnaryInfC{$(\Diamond A \lor \Diamond B) \Rightarrow \Diamond(A \lor B)$}
\end{prooftree}
$$

Esercizio 1.2

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\blacksquare$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$A, B \Rightarrow$}
\RightLabel{$r\neg, l\land$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \neg(A \land B)$}
\RightLabel{$\mathbf{KR}$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \Box\neg(A \land B)$}
\AxiomC{$\blacksquare$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\Rightarrow A$}
\RightLabel{$\mathbf{KR}$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \Box A$}
\RightLabel{$ram.disg.$}
\BinaryInfC{$\Rightarrow \Box\neg(A \land B), \Box A$}
\AxiomC{$\Box$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$A, B \Rightarrow B$}
\RightLabel{$l\neg, r\neg, l\land$}
\UnaryInfC{$\neg B \Rightarrow \neg(A \land B)$}
\RightLabel{$\mathbf{KR}$}
\UnaryInfC{$\Box\neg B \Rightarrow \Box\neg(A \land B)$}
\RightLabel{$r\neg$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \Box\neg(A \land B), \Diamond B$}
\RightLabel{$r\land$}
\BinaryInfC{$\Rightarrow \Box\neg(A \land B), (\Box A \land \Diamond B)$}
\RightLabel{$l\neg$}
\UnaryInfC{$\Diamond(A \land B) \Rightarrow (\Box A \land \Diamond B)$}
\end{prooftree}
$$

Le due formule non sono equivalenti. Il sequent $\Diamond(A\wedge B) \Rightarrow (\square A\wedge\Diamond B)$ non è valido, in quanto il sequent $S = (\Rightarrow \square\neg(A\wedge B), \square A)$ è aperto, dato che *tutti* i sequent generati dall'applicazione della *ramificazione disgiuntiva* sono falsificabili.

Contromodello per il sequent $S = (\Diamond(A\wedge B) \Rightarrow (\square A\wedge\Diamond B))$. Possiamo costruire un contromodello basandoci sulla ramificazione disgiuntiva presente nel ramo sinistro dell'albero di prova. Sia $\mathcal{M} = (W, \sqsubseteq, v)$ tale che $\{w_0, w_1, w_2\} \subseteq W$, ove w_1, w_2 sono due mondi possibili tali che:

$$v(w_1, A) = V$$
$$v(w_1, B) = V$$
$$v(w_2, A) = F$$

Sia inoltre "$\sqsubseteq$" tale che $w_1 \sqsubseteq w_0$ e $w_2 \sqsubseteq w_0$. La valutazione $v(w_0, \cdot)$ sia arbitraria.

Tale modello falsifica il sequent $S' = (\Rightarrow \square\neg(A\wedge B), \square A)$ alla radice della ramificazione disgiuntiva, infatti $w_1 \nVdash \neg(A\wedge B)$ e $w_2 \nVdash A$ e di conseguenza $w_0 \nVdash \square\neg(A\wedge B)\vee\square A$. Esiste dunque un modello ($\mathcal{M}$) nel quale un mondo possibile (w_0) falsifica il sequent, che perciò non è valido, e, per la correttezza della procedura di tableaux semantico, nemmeno S è valido.

Esercizio 1.3

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\square\\ \vdots\\ A \Rightarrow A\to B, A\end{array}}{\neg A, A \Rightarrow A\to B}\,l\neg}{\square\neg A, \square A \Rightarrow \square(A\to B)}\,\mathbf{KR}}{\square A \Rightarrow \square(A\to B), \Diamond A}\,r\neg \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\square\\ \vdots\\ A, B \Rightarrow B\end{array}}{B, A \Rightarrow A\to B}\,r\to}{\square B, \square A \Rightarrow \square(A\to B)}\,\mathbf{KR}}{\dfrac{\Diamond A\to\square B, \square A \Rightarrow \square(A\to B)}{\square(\Diamond A\to\square B), \square\square A \Rightarrow \square\square(A\to B)}\,\mathbf{KR}}\,l\to}{\square(\Diamond A\to\square B)\wedge\square\square A \Rightarrow \square\square(A\to B)}\,l\wedge$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\blacksquare\\ \vdots\\ \Rightarrow A, B\end{array} \quad \begin{array}{c}\square\\ \vdots\\ B \Rightarrow B\end{array}}{A\to B \Rightarrow B}\,l\to}{\square(A\to B) \Rightarrow \square B}\,\mathbf{KR} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\square\\ \vdots\\ A \Rightarrow A\end{array} \quad \begin{array}{c}\blacksquare\\ \vdots\\ B, A \Rightarrow\end{array}}{A\to B, A \Rightarrow}\,l\to}{\square(A\to B) \Rightarrow \square\neg A}\,\mathbf{KR}, r\neg}{\square(A\to B) \Rightarrow \square B, \square\neg A}\,ram.disg.}{\Diamond A, \square(A\to B) \Rightarrow \square B}\,l\neg}{\square(A\to B) \Rightarrow \Diamond A\to\square B}\,r\to}{\square\square(A\to B) \Rightarrow \square(\Diamond A\to\square B)}\,\mathbf{KR} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\blacksquare\\ \vdots\\ \Rightarrow A\end{array} \quad \begin{array}{c}\blacksquare\\ \vdots\\ B \Rightarrow A\end{array}}{A\to B \Rightarrow A}\,l\to}{\square\square(A\to B) \Rightarrow \square\square A}\,2\cdot\mathbf{KR}}{\square\square(A\to B) \Rightarrow \square(\Diamond A\to\square B)\wedge\square\square A}\,r\wedge$$

Le due formule non sono equivalenti perchè il sequent $\square\square(A\to B) \Rightarrow \square(\Diamond A\to\square B)\wedge\square\square A$ non è valido.

Contromodello per il sequent $S = (\Box\Box(A \to B) \Rightarrow \Box(\Diamond A \to \Box B) \wedge \Box\Box A)$**.** Possiamo costruire un contromodello basandoci sui sequent falsificabili presenti nel ramo destro dell'albero di prova. Sia $\mathcal{M} = (W, \sqsubseteq, v)$ un modello arbitrario. Costruiamo un nuovo modello $\mathcal{M}'$ ponendo:

$$W' = W \cup \{w_0, w_1, w_2\}$$
$$\sqsubseteq' = \sqsubseteq \cup \{\langle w2, w1\rangle, \langle w1, w0\rangle\} \quad \text{cioè } (w_2 \sqsubseteq' w_1 \text{ e } w_1 \sqsubseteq' w_0)$$

Sia v' una estensione di v tale che che:

$$v'(w_2, A) = F$$
$$v'(w_2, B) = V$$

Le valutazioni $v'(w_0, \cdot)$ e $v'(w_1, \cdot)$ siano arbitrarie.

Tale modello falsifica il sequent $S' = \Box\Box(A \to B) \Rightarrow \Box\Box A$. Per costruzione di $\mathcal{M}'$, $w_2 \Vdash A \to B$ e $w_2 \nVdash A$. Dato che w_2 è l'unico mondo raggiungibile da w_1, allora $w_1 \nVdash \Box(A \to B) \to \Box A$. Affinche w_1 forzi $\Box(A \to B) \to \Box A$ sarebbe infatti necessario che non accadesse che $w_1 \Vdash \Box(A \to B)$ e $w_1 \nVdash \Box A$. Però $w_1 \Vdash \Box(A \to B)$, perchè w_2 (unico mondo raggiungibile) forza $A \to B$. Allo stesso modo, $w_1 \nVdash \Box A$, perchè esiste un mondo raggiungibile (w_2, al solito...), che falsifica A.

Analogamente $w_0 \nVdash \Box\Box(A \to B) \to \Box\Box A$, perchè, ancora una volta, l'unico mondo raggiungibile da w_0 è proprio w_1, che forza $\Box(A \to B)$ ma falsifica $\Box A$. Dunque S' non è valido e di conseguenza nemmeno S.

2 Secondo Esercizio

Verificare se i seguenti sequent sono validi nella semantica di **K**:

$$\Box(A \to B) \to \Box A \Rightarrow \Box A \tag{2.1}$$
$$\Box(\Box(A \to B) \to \Box A) \Rightarrow \Box\Diamond A \tag{2.2}$$
$$\Box\Diamond\Box A \Rightarrow \Diamond\Box\Diamond A \tag{2.3}$$

Esercizio 2.1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\blacksquare\\ \vdots\\ \Rightarrow A\end{array}}{\Rightarrow \Box A}\,\mathbf{KR} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\blacksquare\\ \vdots\\ A \Rightarrow B\end{array}}{\Rightarrow \Box(A \to B)}\,\mathbf{KR}, r\to}{\Rightarrow \Box A, \Box(A \to B)}\,ram.disg. \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Box\\ \vdots\\ A \Rightarrow A\end{array}}{\Box A \Rightarrow \Box A}\,\mathbf{KR}}{\Box(A \to B) \to \Box A \Rightarrow \Box A}\, l\to$$

Il sequent non è valido perchè entrambe le alternative della ramificazione disgiuntiva nel ramo sinistro dell'albero sono falsificabili.

Contromodello per il sequent $S = (\Box(A \to B) \to \Box A \Rightarrow \Box A)$**.** Possiamo costruire un contromodello basandoci sulla ramificazione disgiuntiva presente nel ramo sinistro dell'albero di prova. Sia $\mathcal{M} = (W, \sqsubseteq, v)$ tale che $\{w_0, w_1, w_2\} \subseteq W$, ove w_1, w_2 sono due mondi possibili tali che:

$$
\begin{aligned}
&v(w_1, A) = F\\
&v(w_2, A) = V\\
&v(w_2, B) = F
\end{aligned}
$$

Sia inoltre "$\sqsubseteq$" tale che $w_1 \sqsubseteq w_0$ e $w_2 \sqsubseteq w_0$. La valutazione $v(w_0, \cdot)$ sia arbitraria.

Tale modello falsifica il sequent $S' = (\Rightarrow \Box A, \Box(A \to B))$ alla radice della ramificazione disgiuntiva, infatti $w_0 \not\Vdash \Box(A \to B)$ (in quanto $w_2 \sqsubseteq w_0$ e $w_2 \not\Vdash A \to B$) *e* $w_0 \not\Vdash \Box A$ (in quanto $w_1 \sqsubseteq w_0$ e $w_1 \not\Vdash A$). Dunque S' non è valido e di conseguenza nemmeno S.

Esercizio 2.2

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\blacksquare\\ \vdots\\ A \Rightarrow A, B\end{array}}{\neg A \Rightarrow A \to B}\; l\neg, r\to}{\Box\neg A \Rightarrow \Box(A \to B)}\;\mathbf{KR} \qquad \begin{array}{c}\blacksquare\\ \vdots\,(*)\\ \Box A, \Box\neg A \Rightarrow\end{array}}{\dfrac{\Box(A \to B) \to \Box A, \Box\neg A \Rightarrow}{\Box(A \to B) \to \Box A \Rightarrow \Diamond A}\; r\neg}\; l\to}{\Box(\Box(A \to B) \to \Box A) \Rightarrow \Box\Diamond A}\;\mathbf{KR}
$$

Il sequent *non* è valido, perchè nell'albero di prova esistono sequent aperti. In particolare, il sequent indicato con $(*)$ è aperto perchè ricade nel sotto–caso 3 della procedura di semantic tableaux per **K** (sequent del tipo † privo di formule modali nella conclusione).

Per quanto riguarda il contromodello, è intuitivo che un qualsiasi modello il cui supporto contenga almeno un mondo che non può accedere ad alcun altro mondo falsifica $\Box A, \Box\neg A \Rightarrow$ (infatti, un tale mondo soddisfa vacuamente $\Box A$ e $\Box\neg A$).

Esercizio 2.2

Sequent ($\Box\Diamond\Box A \Rightarrow \Diamond\Box\Diamond A$):

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\blacksquare\\ \vdots\\ \Box\Diamond\Box A, \Box(\neg\Box\Diamond A) \Rightarrow\end{array}}{\Box\Diamond\Box A \Rightarrow \Diamond\Box\Diamond A}\; r\neg
$$

Sequent ($\Diamond\Box\Diamond A \Rightarrow \Box\Diamond\Box A$):

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\blacksquare\\ \vdots\\ \Box\Diamond A \Rightarrow\end{array}}{\Rightarrow \neg\Box\Diamond A}\; r\neg}{\Rightarrow \Box(\neg\Box\Diamond A)}\;\mathbf{KR} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\blacksquare\\ \vdots\\ \Box(\neg\Box A) \Rightarrow\end{array}}{\Rightarrow \Diamond\Box A}\; r\neg}{\Rightarrow \Box\Diamond\Box A}\;\mathbf{KR}}{\Rightarrow \Box(\neg\Box\Diamond A), \Box\Diamond\Box A}\; ram.disg.}{\Diamond\Box\Diamond A \Rightarrow \Box\Diamond\Box A}\; l\neg
$$

Nessuno dei due sequent è valido. In entrambe le prove, i sequent aperti sono tali in quanto del tipo † e privi di formule modali nella conclusione.

Per quanto riguarda la della prima formula, si tratta di trovare un modello che contenga un mondo che soddisfi conteporaneamente le formule:

$$\Box\Diamond\Box A \quad \text{e} \quad \Box(\neg\Box\Diamond A)$$

In questo modo il sequent $\Box\Diamond\Box A, \Box(\neg\Box\Diamond A) \Rightarrow \bot$ risulta fasificabile.

Sia dunque $\mathcal{M} = (W, \sqsubseteq, v)$ ove $W = \{w_0, w_1, w_2\}$ e $w_2 \sqsubseteq w_1$, $w_1 \sqsubseteq w_0$. La valutazione $v(\cdot,\cdot)$ sia arbitraria. Evidentemente $w_2 \Vdash \Box A$ e $w_2 \nVdash \Diamond A$, in quanto privo di "successori". Di conseguenza, $w_1 \Vdash \Diamond\Box A$, perchè esiste un mondo raggiungibile da w_1 che forza $\Box A$ (w_2). Ma anche $w_1 \Vdash \neg\Box\Diamond A$, perchè esiste un mondo raggiungibile da w_1 che *non* forza $\Diamond A$ (sempre w_2). Infine, $w_0 \Vdash \Box\Diamond\Box A$ e $w_0 \Vdash \Box(\neg\Box\Diamond A)$ perchè tutti i mondi da esso raggiungibili (solo w_1) forzano sia $\Diamond\Box A$ che $\neg\Box\Diamond A$.