

Si ha, in virtù della discussione appena svolta:

$$(*) \quad \underline{r}'_c = \underline{r}' + \rho \underline{n} - \frac{\rho'}{\tau} \underline{b} \quad \tau \neq 0$$

Determiniamo le curve sferiche: \underline{r}_c è costante, e così R .

Si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \underline{r}'_c = \underline{t} + \rho' \underline{n} + \rho \underline{n}' - \left(\frac{\rho'}{\tau}\right)' \underline{b} - \frac{\rho'}{\tau} \underline{b}' = \\ &= \underline{t} + \rho' \underline{n} + \rho (-\tau \underline{t} - \tau \underline{b}) - \left(\frac{\rho'}{\tau}\right)' \underline{b} - \frac{\rho'}{\tau} \tau \underline{n} = \\ &= -(\tau \rho + \left(\frac{\rho'}{\tau}\right)') \underline{b} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(*) \quad \boxed{\tau \rho + \left(\frac{\rho'}{\tau}\right)' = 0}$$

Calcoliamo $(R^2)' = \left(\rho^2 + \frac{\rho'^2}{\tau^2}\right)' =$

$$= 2\rho\rho' + 2\left(\frac{\rho'}{\tau}\right)\left(\frac{\rho'}{\tau}\right)' = 2\frac{\rho'}{\tau} \left[\rho\tau + \left(\frac{\rho'}{\tau}\right)'\right]$$



\Rightarrow (*) implica $R' = 0$ (cioè R costante).

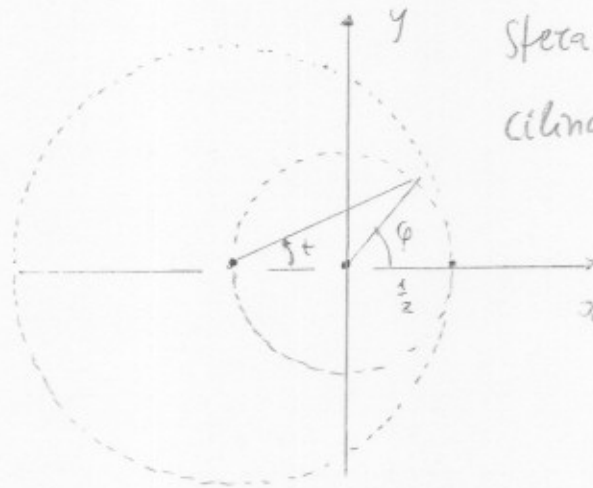
viceversa R costante da $\frac{\rho'}{\tau} = 0$ oppure $\rho\tau + \left(\frac{\rho'}{\tau}\right)' = 0$;

nel primo caso $\rho' = 0 \Rightarrow R$ è costante (e in

tal caso $R = \rho$ (il cerchio osculatore è un cerchio massimo)

oppure si ha (*)

* La finestra di Viviani



Sfera $\mathcal{S} \begin{cases} (x + \frac{1}{2})^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ \text{cilindro } \mathcal{C} \end{cases} \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$

$\mathcal{C} \quad \gamma = \mathcal{S} \cap \mathcal{C}$

curva di Viviani

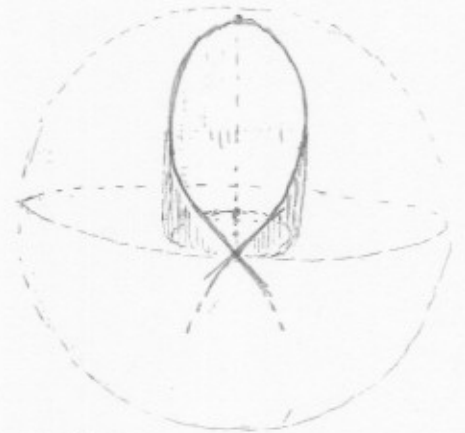
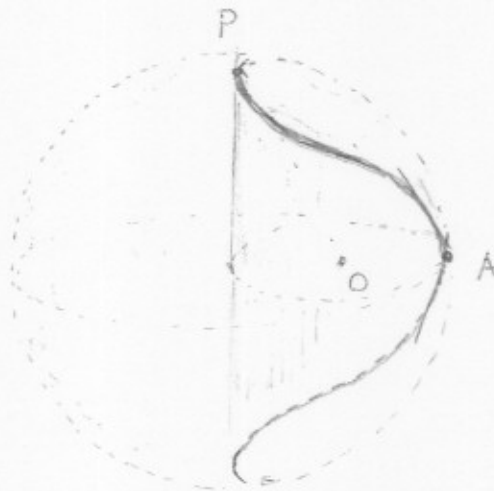
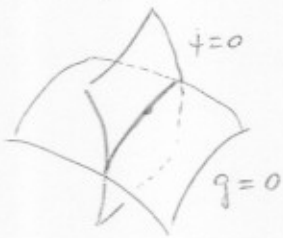
(cf. l' "ippopede" di Eudosso)

deturminiamo i pt. Singolari

$$\begin{cases} f = 0 \\ g = 0 \end{cases}$$

$$\nabla f \times \nabla g = 0$$

(i.e. $\nabla f \parallel \nabla g$)



$f = 0$

regolarità ~

interazione tangibile

(teorema del Dini

generalizzato)

$$(x + \frac{1}{2})^2 + y^2 + z^2 = 1 = 0$$

$$\nabla f = (2(x + \frac{1}{2}), 2y, 2z)$$

$$g = 0$$

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4} = 0$$

$$\nabla g = (2x, 2y, 0)$$

X

$$\nabla f \parallel \nabla g \Leftrightarrow z = y = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

$$(x + \frac{1}{2})^2 - 1 = 0$$

$$(x - \frac{1}{2})(x + \frac{3}{2}) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

* Mo Singolare:

$$A: (\frac{1}{2}, 0, 0)$$

Determiniamo una parametrizzazione per γ

Poniamo (coordinate cilindriche)

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

si ha $\rho = \frac{1}{2}$

e, da $x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} + y^2 + z^2 = 1$,

$$x + \underbrace{x^2 + y^2}_{= \frac{1}{4}} + \frac{1}{4} + z^2 = 1 \Rightarrow x + z^2 = \frac{1}{2}$$

$$\gamma: \begin{cases} x + z^2 = \frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

NOTA:

si può giungere alla parametrizzazione anche direttamente per via geometrica v. figura.

Comincio porre, successivamente:

$$x = \frac{1}{2} \cos \varphi = \frac{1}{2} [2 \cos^2(\frac{\varphi}{2}) - 1] = \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2} \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$$

$$z^2 = \frac{1}{2} - x = \frac{1}{2} (1 - \cos \varphi) = \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

\Rightarrow (v. anche fig.) $z = + \sin \frac{\varphi}{2}$ In def.

se $t = \frac{\varphi}{2}$

A partire da
è facile calcolare
 R, τ e verificare,
a ritroso, che
 γ è sferica...

$$\gamma: \begin{cases} x = \cos^2 t - \frac{1}{2} \\ y = \sin t \cos t \\ z = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, \pi)$$

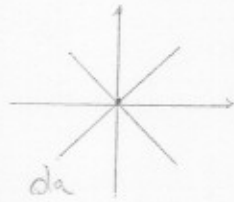
$$\begin{cases} \dot{x} = 2 \cos t (-\sin t) = -\sin 2t \\ \dot{y} = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t = \cos 2t \\ \dot{z} = \cos t \end{cases} \quad ds = \sqrt{1 + \cos^2 t} dt \dots$$

$$t=0 \Rightarrow \dot{x}(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1, \quad \dot{z}(0) = 1$$

$$t=\pi \Rightarrow \dot{x}(\pi) = 0, \quad \dot{y}(\pi) = 1, \quad \dot{z}(\pi) = -1$$

[la curva è regolare e non richiediamo l'invertibilità, non lo è secondo la def. da noi data]

È facile a questo punto determinare le espressioni di R e τ , a partire da



$$R = \frac{\|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}\|}{\|\dot{\underline{r}}\|^3}$$

$$\dot{\underline{r}} = (-\sin 2t, \cos 2t, \cos t)$$

$$\ddot{\underline{r}} = (-2\cos 2t, -2\sin 2t, -\sin t)$$

$$\dddot{\underline{r}} = (+4\sin 2t, -4\cos 2t, -\cos t)$$

$$\tau = - \frac{\langle \dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}, \dddot{\underline{r}} \rangle}{\|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}\|^2}$$

ad esempio (per confronto con il calcolo alternativo che faremo in seguito) poniamo $t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \underline{r}(\frac{\pi}{2}) = (-\frac{1}{2}, 0, 1)$

$$\Rightarrow \dot{\underline{r}} = (0, -1, 0)$$

$$\|\dot{\underline{r}}\| = 1 \quad \dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}} =$$

$$\ddot{\underline{r}} = (2, 0, -1)$$

$$\dddot{\underline{r}} = (0, 4, 0)$$

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\| \dots \| = \sqrt{2^2 + 0 + 1} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{5} \quad \text{Si ha subito } \tau = 0 \text{ perché } \dddot{\underline{r}} = -4\dot{\underline{r}}.$$

Riprendiamo la curva di vicini

$$V: \begin{cases} (x + \frac{1}{2})^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

★★ Calcolo della curvatura e torsione per via indiretta in un gbo (bi)regolare ($K > 0$)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + \frac{1}{4} + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \begin{matrix} x^2 + y^2 + x + z^2 = \frac{3}{4} \\ \underbrace{}_{\frac{1}{4}} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x + z^2 + \frac{1}{2} = 1 \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x + z^2 = \frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \quad (A)$$

Si ha $x = x(s)$ etc. si ha: $\begin{cases} x' + 2zz' = 0 \\ 2xx' + 2yy' = 0 \end{cases} \quad (B)$
 $v = \frac{d}{ds}$ e l'impulso d'arco

deriviamo successivamente

$$\begin{cases} x'' + 2z'^2 + 2zz'' = 0 \\ x'^2 + 2xx'' + y'^2 + 2yy'' = 0 \end{cases} \quad (C)$$

$$\begin{cases} x''' + \underbrace{2 \cdot 2 \cdot z'z''}_{4z'z''} + \underbrace{2z'z''}_{6z'z''} + 2zz''' = 0 \\ 2x'a'' + x'a'' + 2x''' + \underbrace{2y'y'' + y'y'' + yy'''}_{3y'y'' + yy'''} = 0 \end{cases} \quad (D)$$



Tali relazioni computano, usate ricorsivamente, per calcolare R e τ in un qualsiasi punto della curva; il metodo usato è del tutto generale. \triangle tutto funziona se $R > 0$...

(+) usate assieme a $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$ (e le loro derivate)

Per esempio sia $P: (-\frac{1}{2}, 0, 1)$

si trova:

$$\text{in } P \quad (B) \quad \begin{cases} x' + 2 \cdot 1 \cdot z' = 0 \\ -\frac{1}{2} x' = 0 \end{cases} \Rightarrow x' = 0 \quad \left. \vphantom{\begin{cases} x' + 2 \cdot 1 \cdot z' = 0 \\ -\frac{1}{2} x' = 0 \end{cases}} \right\} z' = 0$$

da $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$ si ha $y' = \pm 1$

(dipende dall'orientamento...) scegliamo $y'(P) = +1$

$\Rightarrow \underline{r}' = \underline{t}(P) = \underline{j}$. Proseguiamo:

(C) $\begin{cases} x'' + 2z'' = 0 \\ -\frac{1}{2}x'' + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x'' = 2 \quad \left. \vphantom{\begin{cases} x'' + 2z'' = 0 \\ -\frac{1}{2}x'' + 1 = 0 \end{cases}} \right\} z'' = -1$

trova y'' : determiniamola così: da

$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$ si ha, derivando

$2x'x'' + 2y'y'' + 2z'z'' = 0 \Rightarrow y''(P) = 0$

$\begin{matrix} \text{"} & \text{"} & \text{"} \\ 0 & +1 & 0 \end{matrix}$

$\Rightarrow \underline{r}''(P) = 2\underline{i} - \underline{k} \Rightarrow R = \|\underline{r}''\| = \sqrt{5}$

trova (D)

$\begin{cases} x''' + 2z''' = 0 \\ -\frac{1}{2}x''' = 0 \end{cases} \Rightarrow x''' = 0 \quad \left. \vphantom{\begin{cases} x''' + 2z''' = 0 \\ -\frac{1}{2}x''' = 0 \end{cases}} \right\} z''' = 0 \quad \left. \vphantom{\begin{cases} x''' + 2z''' = 0 \\ -\frac{1}{2}x''' = 0 \end{cases}} \right\} y''' = \frac{1}{\sqrt{5}}$

deriviamo ancora

$x''^2 + \underbrace{x'x''}_0 + \underbrace{y''^2}_0 + \underbrace{y'y''}_{+1} + \underbrace{z''^2}_1 + \underbrace{z'z''}_0 = 0$

$4 + y''' + 1 = 0$

$y''' = -5$

$\underline{r}'''(P) = -5\underline{j}$

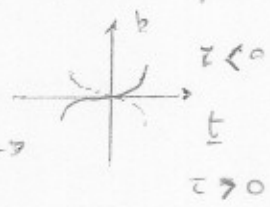
A questo punto possiamo calcolare la torsione in P :

$$\tau = - \frac{\langle \underline{r}' \times \underline{r}'', \underline{r}''' \rangle}{R^2} = - \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

o anche direttamente... $\underline{r}' \times \underline{r}''' = \underline{0}$ $\tau = 0$
in P

Era da attendersi tale risultato?

Sì: per ragioni di simmetria, la curva, in un intorno di P , rimane da una stessa parte del primo osculatore e pertanto, in virtù della descrizione locale nei piani principali, τ deve essere nulla, altrimenti \rightarrow



il primo osculatore in P non è $\underline{z} = 1$

la sua equazione è

$$\langle X - P, \underline{r}' \times \underline{r}'' \rangle = 0$$

$$-(x + \frac{1}{2}) - 2(z-1) = 0$$

$$x + \frac{1}{2} + 2z - 2 = 0$$

$$2x + 4z - 3 = 0 \quad (\text{controllo: } 2 \cdot (-\frac{1}{2}) + 4 - 3 = 0)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{5} \underline{b}$$

$$\underline{j} \times (2\underline{i} - \underline{k}) =$$

$$= -2\underline{k} - \underline{i}$$

$$= -\underline{i} - 2\underline{k}$$

ciò consente di concludere che $\tau'(P) = 0$

Osservazione: in virtù della sfericità di Γ , e da $\tau(P) = 0$, possiamo anche concludere che $\tau'(P) = 0$, e che

$$\lim_{P' \rightarrow P} \left| \frac{\tau'}{\tau} \right| = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad (\text{si ricordi } R^2 = \rho^2 + \left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^2 \quad \tau \neq 0 \dots)$$

◇ I teoremi di Fenchel e di Fary-Milnor

Sia \mathcal{C} una curva spaziale, liscia, regolare, chiusa.

Si ha $\int_{\mathcal{C}} R ds \geq 2\pi$, e vale $\Leftrightarrow \mathcal{C}$ è piana e convessa.

Curvatura totale

(Fenchel)

e, se \mathcal{C} è tannodata, è $\int_{\mathcal{C}} R ds > 4\pi$



(Fary-Milnor)

Commento:

sfera osculatrice



cerchio osculatore

$$ds = R d\psi$$

↑
raggio della
sfera osculatrice



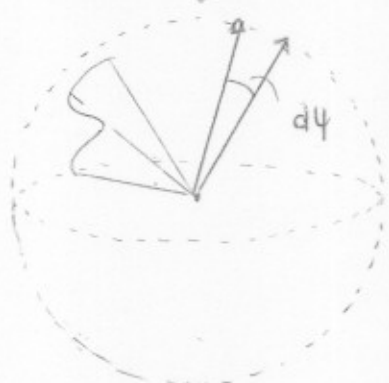
$$\int_{\mathcal{C}} R ds = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\frac{1}{R}} ds = \int_{\mathcal{C}} \frac{R}{\frac{1}{R}} d\psi$$

↑
↓

$$\geq \int d\psi \geq 2\pi$$

↖ > se \mathcal{C} non è piana

indicatrice delle tangenti



Si forma un "ventaglio"
"l'integrale" dei "dψ"
è certamente $\geq 2\pi$

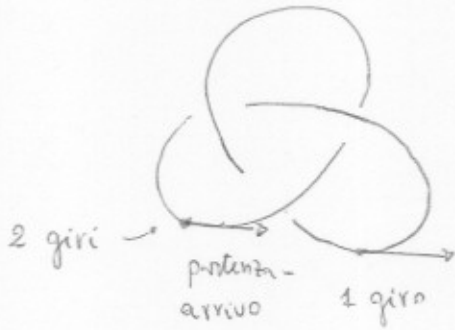
e vale 2π se e solo se la
curva è piana (non ci sono "pieghe")
e convessa (è maniniera "la stessa
direzione") \Rightarrow Fenchel.



Ora, se \mathbb{C} è annodata, \underline{t} (o meglio, φ) compie almeno due giri, e non può essere piana

\Rightarrow Fary - Milnor

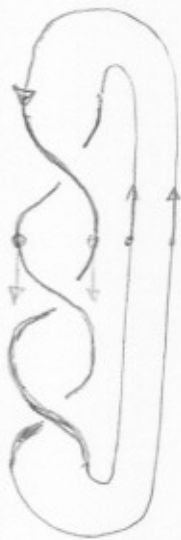
ex:




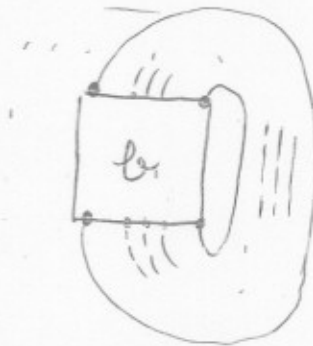
per dimostrazioni
rigorose v. per ex.
di Cerro

Ciò si vede benissimo
in generale se il nodo è
rappresentato come "chiusura di
una treccia" (ciò è sempre
possibile, teorema di Alexander...)

diagramma "ogni piana"
per evitare "pieghe"



Si possono anche "smussare"
gli incroci 



qui $\frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} R ds > \#$ fili della
treccia \mathbb{C}
con la quale
si costruisce \mathbb{C}

◇ Complementi

Sia \mathcal{C} una curva spaziale, liscia, bi-regolare ($\kappa > 0$)
 chiusa



Sia $X = X(s)$ un campo
 vettoriale normale (i.e. $X \perp \underline{t} \equiv 0$)
 con $\|X'\| = 1$.

Definiamo il twist (distorsione)
 di X lungo \mathcal{C} tramite:

$$Tw_{\mathcal{C}}(X) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \langle X', \underline{t} \times X \rangle ds$$

Se poniamo, in particolare, $X = \underline{b}$, τ ($\triangle \mathcal{C}$
 τ irregolare...
 v. oltre...)

$$Tw_{\mathcal{C}}(\underline{b}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \langle \underbrace{\underline{b}'}_{\parallel \underline{n}_2}, \underbrace{\underline{t} \times \underline{b}}_{= -\underline{n}_1} \rangle ds = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \tau ds$$

τ
 torsione totale

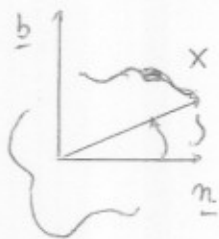
posto

$$X = \cos \varphi \underline{n} + \sin \varphi \underline{b}, \text{ da}$$

$$\begin{aligned} X' &= -\sin \varphi \cdot \varphi' \underline{n} + \cos \varphi \underline{n}' + \cos \varphi \cdot \varphi' \underline{b} + \sin \varphi \underline{b}' = \\ &= -\sin \varphi \cdot \varphi' \underline{n} + \cos \varphi (-\kappa \underline{t} - \tau \underline{b}) + \cos \varphi \cdot \varphi' \underline{b} + \\ &\quad + \sin \varphi \cdot \tau \underline{n} \end{aligned}$$

$$= -\kappa \cos \varphi \underline{t} + \sin \varphi (\tau - \varphi') \underline{n} + \cos \varphi (\varphi' - \tau) \underline{b}$$

$$\text{e } \underline{t} \times X = \cos \varphi (\underbrace{\underline{t} \times \underline{n}}_{\underline{b}}) + \sin \varphi (\underline{t} \times \underline{b}) = \underline{b} - \underline{n}$$



$$\underline{t} \times \underline{x} = -\sin \varphi \cdot \underline{m} + \cos \varphi \cdot \underline{b} \quad \text{segue}$$

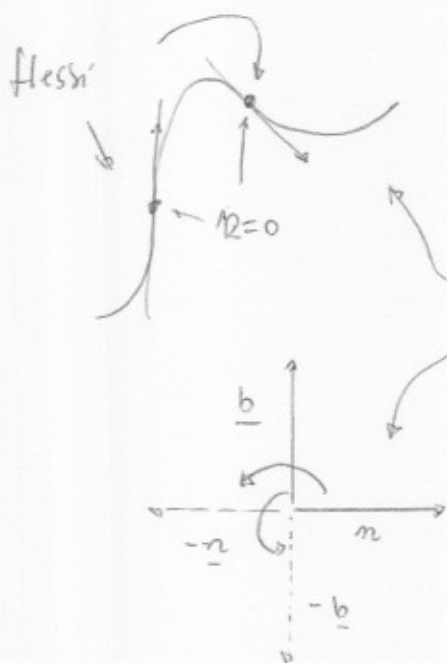
$$\langle \underline{x}', \underline{t} \times \underline{x} \rangle = \sin^2 \varphi (\varphi' - \tau) + \cos^2 \varphi (\varphi' - \tau)$$

$$= \varphi' - \tau$$

$$\Rightarrow Tw_{\mathcal{C}}(X) = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^e \varphi' ds}_{\frac{\pi}{2l}} - \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^e \tau ds}_{\text{torsione totale}} \quad (\star)$$

numero di avvolgimento della curva descritta da X attorno all'origine ..
nel r.f. $(0, \underline{m}, \underline{b})$ solidale con la curva

total twist di $X \equiv [Tw_{\mathcal{C}}(X)]_{\text{mod } 1}$
Distorsione totale

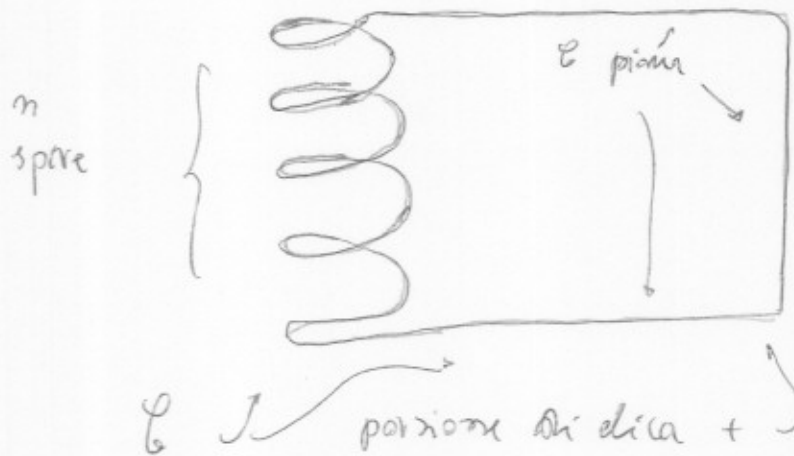


* notiamo che in un punto di flessa ($R=0$) il medio di Frémet non è definito, e varia, in ogni caso, in modo discontinuo, ruotando di un angolo pari a π

$Tw_{\mathcal{C}}(X)$ invece non varia, se $X = X(s)$ è liscio \Rightarrow i due contributi a $Tw_{\mathcal{C}}$

in (\star) sono entrambi discontinui ma le loro variazioni si compensano.

Consideriamo il seguente esempio,
di valenza generale



$$\underline{r} = a \cos t \underline{i} + a \sin t \underline{j} + bt \underline{k}$$

$$\underline{\dot{r}} = -a \sin t \underline{i} + a \cos t \underline{j} + b \underline{k}$$

$$|\underline{\dot{r}}| dt = \sqrt{a^2 + b^2} dt = ds$$

$$z = -\frac{b}{a^2 + b^2} = -b \quad \text{se } a^2 + b^2 = 1$$

angolo di pendenza α

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{se } a^2 + b^2 = 1 \quad \underline{i}$$

$$\sin \alpha = |z|$$

$$ds = dt$$

Calcoliamo $\text{Tr}_B(x)$

$$x = b \dots$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi n} z ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi n} \sin \alpha \cdot dt = n \cdot \sin \alpha = n \cdot \frac{1}{2\pi} t$$

area zona sferica

* Cf. teorema di Archimede



$$= n \cdot \frac{1}{4\pi} 2A$$



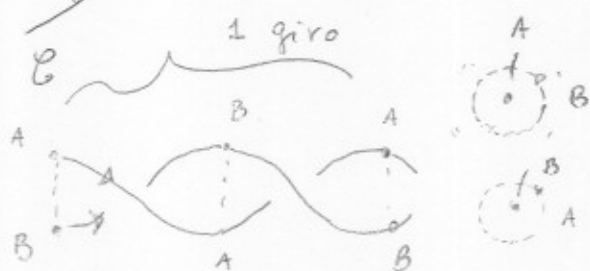
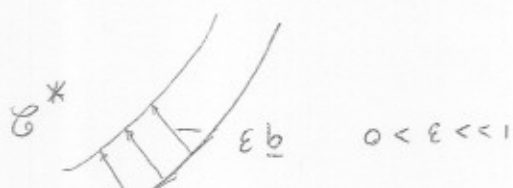
Si ha $\ell R(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$

numero di
allacciamento, o
di legame

||

n

(determinabile in vari modi)

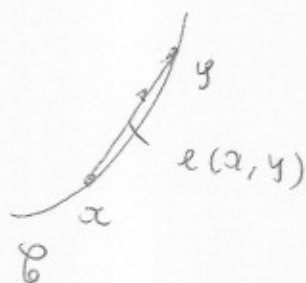


Cominciamo

writhe

writhe

$$w_e(\mathcal{C}) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathcal{C} \times \mathcal{C}} e^* dz \quad \left(\begin{array}{c} \square \\ 0 \end{array} \right)$$



numero di
avvitamento

$$e: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow S^2$$

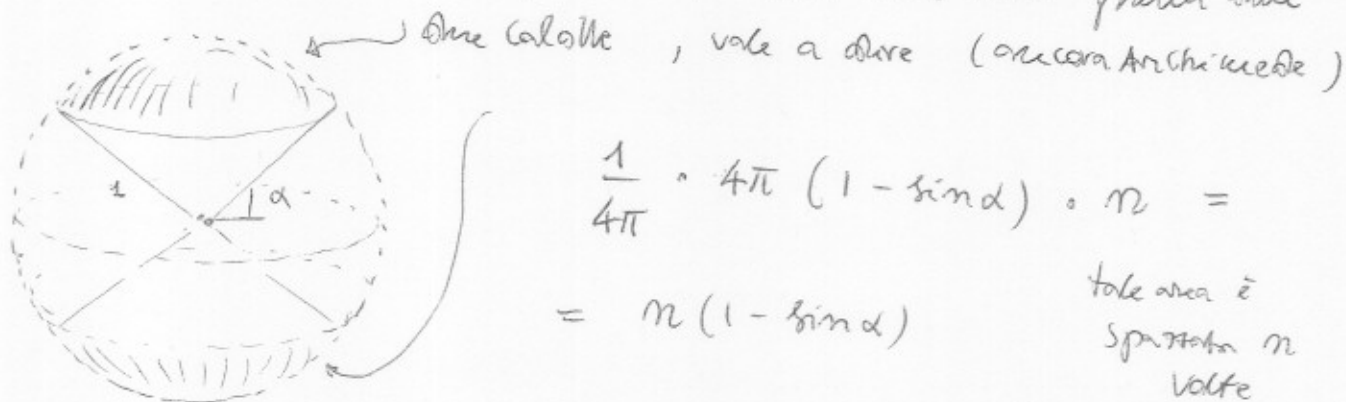
$$(x, y) \mapsto \frac{y-x}{|y-x|} \equiv e(x, y)$$

★ in modo diretto e intuitivo: $\frac{1}{4\pi}$ dell'area

(orientata) spartita su S^2 dai vettori $e(x, y)$.
e con molteplicità

\mathcal{C} si conosce facilmente, nel caso di esame, che

(si possono trascinare i tratti piani di \mathcal{C}) tale area vale quella delle



$$\frac{1}{4\pi} \cdot 4\pi (1 - \sin \alpha) \cdot n =$$

$$= n(1 - \sin \alpha)$$

tale area è

spartita n
volte

(n = numero delle
spizze)

Si ha allora

$$\text{linking number} = \text{twisting} + \text{writhe}$$

$$Lk(\mathcal{C}, \mathcal{C}^*) = TW + Wr$$

$$n = n \sin d + n (1 - \sin d)$$

invariante topologica, intero

dipendono dalla geometria della curva, e non sono interi

tale relazione è generale:

$$Lk = TW + Wr$$

matro



è la formula di



Calugoreanu (- White)

utilissima anche nelle applicazioni (ex. biologia, struttura del DNA)

proiezione di un nodo chink in 3-d

Nota:

Per una curva "quasi piana", Wr e Z

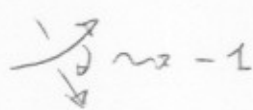
e si calcola tramite un "blackboard framing"



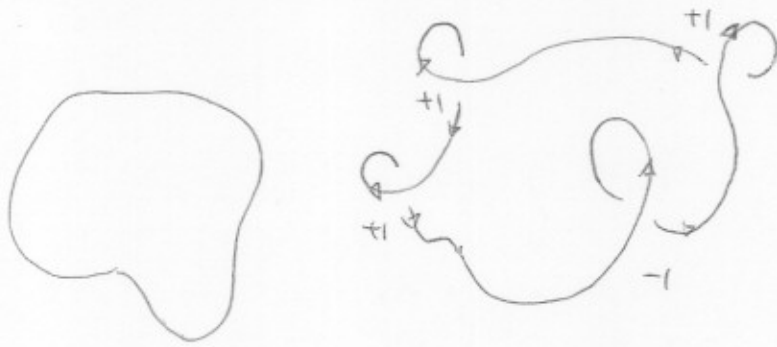
$$W = L(\mathcal{C}, \mathcal{C}^*) \quad \text{lunghezza incrociamento}$$

Nell'esempio

direttamente:



$$-1 + 1 + 1 = +1$$



$WZ = 0$

$WZ = 3 - 1 = 2$

Inaso nell'inaso

Movimenti di Reidemeister

I :



II :



III :



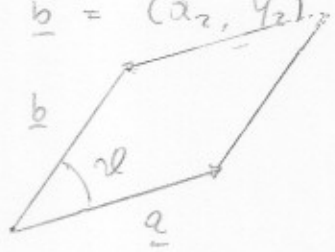
WZ è
invariante
rispetto a
II e III

ma
non rispetto
a I

✧ Richiamo: interpretazione geometrica del determinante in dimensione 1, 2 e 3 utile per il seguito

◇ dim 1 lunghezza (orientata) $\det A = a$ $A = (a)$

◇ dim 2 area (orientata) di un parallelogramma

$\underline{a} = (x_1, y_1)$ $\underline{b} = (x_2, y_2)$ $A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$
 $K = \|\underline{a}\| \|\underline{b}\| |\sin \alpha|$

 [anche nello spazio; si ricorda che
 $K^2 = \|\underline{a}\|^2 \|\underline{b}\|^2 \sin^2 \alpha = \|\underline{a}\|^2 \|\underline{b}\|^2 (1 - \cos^2 \alpha)$
 $= \|\underline{a}\|^2 \|\underline{b}\|^2 - \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle^2$
 $\Rightarrow K = \sqrt{\|\underline{a}\|^2 \|\underline{b}\|^2 - \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle^2}$

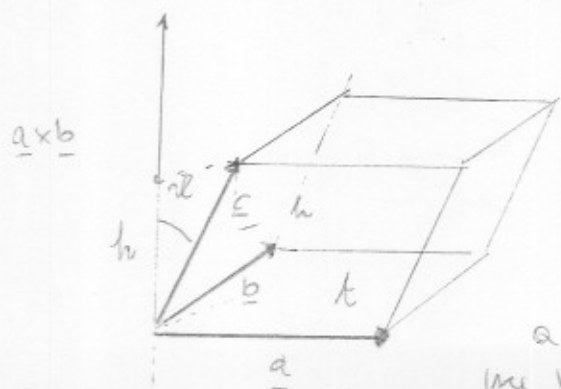
Proseguiamo: \circ (cf. Cauchy-Schwarz)

$$\begin{aligned}
 K^2 &= (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 = \\
 &= \underbrace{x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2}_{\text{mm}} + x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2 - \underbrace{x_1^2 x_2^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 - y_1^2 y_2^2}_{\text{mm}} = \\
 &= x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2 - 2(x_1 y_2)(x_2 y_1) = \\
 &= (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \Rightarrow K = \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right| = |\det A|
 \end{aligned}$$

una dim. alternativa istruttiva si trova nei numeri complessi...

◇ dim 3 : volume (orientato) di un parallelepipedo

$$\begin{aligned}
 V &= K \cdot h = \|\underline{a} \times \underline{b}\| \|\underline{c}\| |\cos \alpha| \\
 \text{vol.} &= |\langle \underline{c}, \underline{a} \times \underline{b} \rangle| = \text{prodotto misto}
 \end{aligned}$$

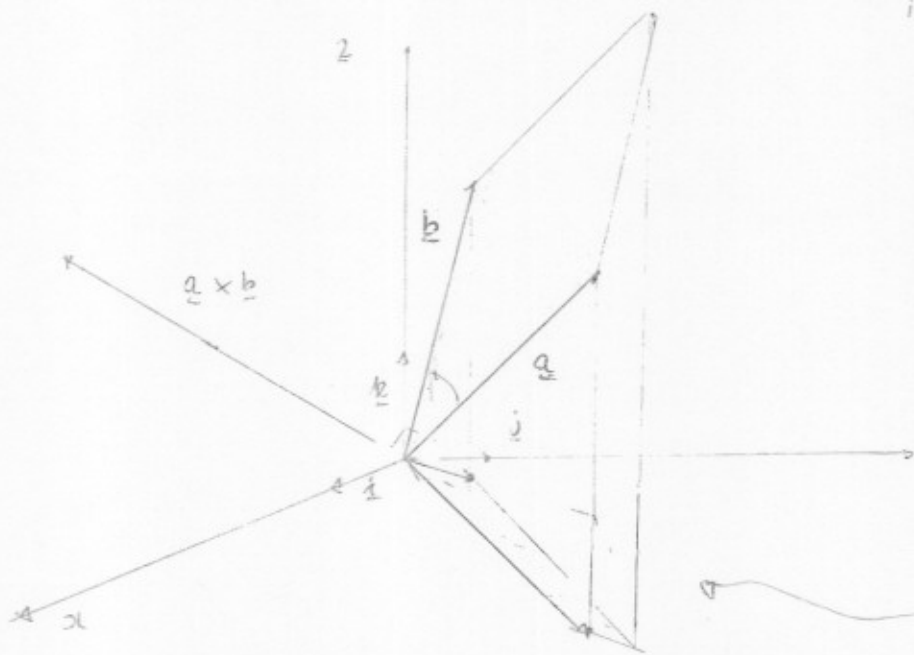


$$= \left| \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \right| = |\det(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})|$$

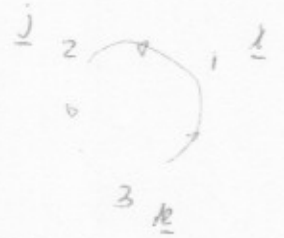
a ben volti $\underline{a} \times \underline{b}$ è un vettore area (orientato)

$$(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b}) = \begin{pmatrix} -c_3 & - \\ -a_3 & - \\ -b_3 & - \end{pmatrix}$$





interpretazione geometrica
delle componenti del
prodotto vettoriale:
due orientate delle
proiezioni del parallelogramma
nello spazio individuato
da \underline{a} e \underline{b} sui
piani coordinati



$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \underline{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \underline{j} \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + \underline{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Tale interpretazione è cruciale

per comprendere appieno l'analisi e la geometria delle
superficie

$$d\underline{\sigma} = \overbrace{(\underline{r}_u \times \underline{r}_v)}^{\underline{x}^0} du dv = \underline{n} \cdot d\sigma$$

elemento
d'area orientata

$$d\sigma = \|d\underline{\sigma}\| = \|\underline{r}_u \times \underline{r}_v\| du dv$$

"area di un parallelogramma
infinitesimo"

