ALGEBRA LINEARE CON ELEMENTI DI GEOMETRIA mod. avanzato

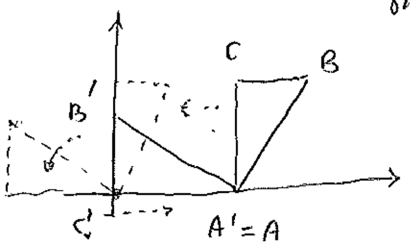
prof. M. Spera a.a. 2008/09 - Prova scritta del 29/6/2009

(1) Fissato nel piano euclideo un riferimento cartesiano, si determini la matrice dell'affinità che porta il triangolo ABC nel triangolo $A'B'C'$ (v. figura) [Sugg. scriverla come prodotto di tre trasformazioni ...]. Di che tipo di trasformazione si tratta?

$A: (\sqrt{3},0) \mapsto A': (\sqrt{3},0)$

$B: (1+\sqrt{3},\sqrt{3}) \mapsto B': (0,1)$

$C: (\sqrt{3},\sqrt{3}) \mapsto C': (0,0)$



Determinare G, I (incentro) e G', I'

(2) Nel piano euclideo, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, e ampliato proiettivamente, si determini la conica $\mathcal{C}$ tangente a $r: 2x+y=0$ in $O:(0,0)$, di centro $C:(1,1)$ e tale che uno degli asintoti abbia la direzione dell'asse x. Determinare l'altro asintoto, la forma canonica metrica, e abbozzare il grafico di $\mathcal{C}$.

(3) Nello spazio euclideo, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, dati $\pi: x+y-z+1=0$, $r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+2t \\ z = 1-t \end{cases}$ individuare il piano del fascio $\mathcal{F}$ di asse r passante per $Q:(2,-1,2)$ $(\in \pi)$. Posto $R:(2,1,0)$ $(\in r)$, si trovi S, piede della perpendicolare condotta da R a π, e si calcolino l'area del triangolo PQS (dove $P = r \cap \pi$) e il volume del tetraedro $SPQR$. Tempo a disposizione 1h 45m

---

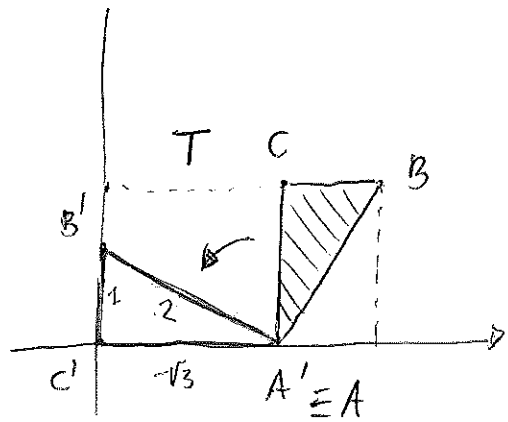
(1') Determinare, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$, nucleo e immagine di $A_{a,b} = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ b & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2') Data $A_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $a \in \mathbb{R}$, si dica per quali valori di a essa ammette autovalori reali, e se ne studi la diagonalizzabilità. Per $a=3$ si determini una base di autovettori

Tempo totale 2h 30 Le risposte vanno adeguatamente giustificate

$\boxed{29/6/09}$

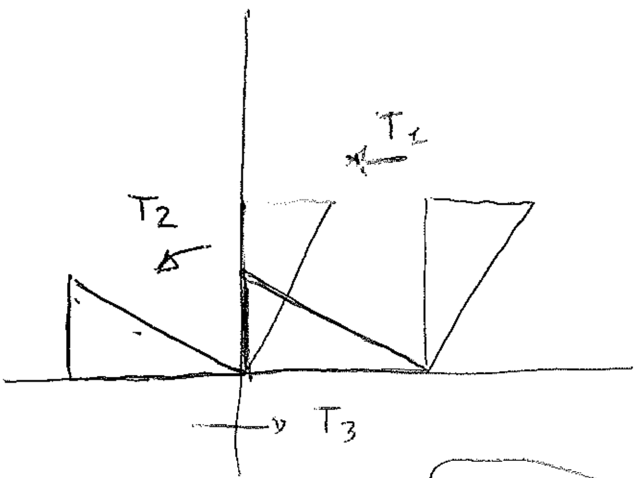
①



$A: (\sqrt{3},0) \longmapsto A': (\sqrt{3},0)$

$B: (1+\sqrt{3},\sqrt{3}) \longmapsto B' = (0,1)$

$C: (\sqrt{3},\sqrt{3}) \longmapsto C': (0,0)$



Si ha subito

$$T = \overset{III^a}{T_3} \cdot \overset{II^a}{T_2} \cdot \overset{I^a}{T_1}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(T_3 = T_1^{-1})$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -1 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -1 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{T} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3}+1 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix} \end{array}$$

controllo
moltiplichiamo per $(A \; B \; C)$

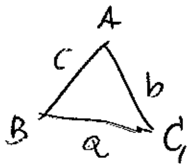
$T \cdot A = A'$ ecc.

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A' & B' & C' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \checkmark$$

$$G = \frac{1}{3} A + \frac{1}{3} B + \frac{1}{3} C$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{3}+1 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3}+\frac{1}{3} \\ 2\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

$$G' = \frac{1}{3} A' + \frac{1}{3} B' + \frac{1}{3} C' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$



$$I = \frac{a}{a+b+c} A + \frac{b}{a+b+c} B + \frac{c}{a+b+c} C$$

$a = 1$
$b = \sqrt{3}$
$c = 2$

$$= \frac{1}{3+\sqrt{3}} A + \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} B + \frac{2}{3+\sqrt{3}} C$$

$$= \frac{1}{3+\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 3+\sqrt{3} \\ \sqrt{3} + \overset{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} + 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3}\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3+\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 3+\sqrt{3} \\ 3+4\sqrt{3} \\ 3+2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$I' = T \cdot I = \frac{1}{3+\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -1 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3+\sqrt{3} \\ 3+4\sqrt{3} \\ 3+2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\cdot} \begin{pmatrix} 3+\sqrt{3} \\ 3+3\sqrt{3}-3-2\sqrt{3} \\ \underbrace{-3\sqrt{3}-3+3+4\sqrt{3}}_{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3+\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 3+\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{3+4\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \\ \dfrac{3+2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{(3+4\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{6} \\ \dfrac{(3+2\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{6} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{9+12\sqrt{3}-3\sqrt{3}-12}{6} \\ \dfrac{9+6\sqrt{3}-3\sqrt{3}-6}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-3+9\sqrt{3}}{6} \\ \dfrac{3+3\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{3\sqrt{3}-1}{2} \\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

(espressione razionalizzata)

$$I' = \frac{1}{3+\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 3+\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} =$$

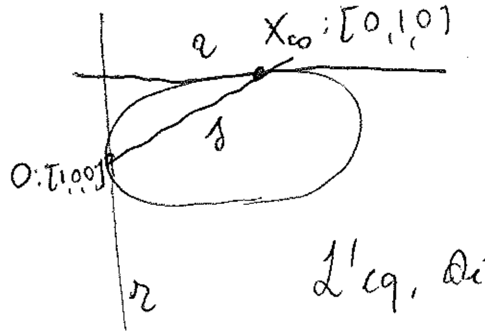
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}{6} \\ \frac{\sqrt{3}\cdot(3-\sqrt{3})}{6} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3\sqrt{3}-3}{6} \\ \frac{3\sqrt{3}-3}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{3}-1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{3} \end{pmatrix}$$

(espressione razionalizzata)

(2)

Conica $\mathscr{C}$ tangente a $r: y+2x=0$ in $O:(0,0)$, centro $C:(1,1)$ e con uno degli asintoti avente la direzione dell'asse x.



La retta $s = OX_\infty$ è l'asse x stesso:

$$y=0$$

L'eq. di a è ovviamente $y=1$

Scriviamo il fascio di coniche bitangenti

$$r \cdot a - \lambda s^2 = 0$$

$$(y+2x)(y-1) - \lambda y^2 = 0$$

$$y^2 - \lambda y^2 + 2xy - y - 2x = 0$$

$$2xy + (1-\lambda)y^2 - 2x - y = 0$$

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \underset{P}{\approx} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2(1-\lambda) \end{pmatrix}$$

per determinare λ, osserviamo che la polare di C deve essere $r_\infty : x_0 = 0$

.... Si ha, pertanto:

polare di C

$$(x_0 \;\; x_1 \;\; x_2)\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2(1-\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_0 \;\; x_1 \;\; x_2)\begin{pmatrix} \overbrace{-2-1}^{-3} \\ 0 \\ \underbrace{-1+2+2(1-\lambda)}_{=1+2-2\lambda=3-2\lambda} \end{pmatrix} = 0$$

$$-3x_0 + x_2\left(3 - 2\lambda\right) = 0,$$

sicché necessariamente è $\lambda = \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &2\left(1-\tfrac{3}{2}\right) \\ &= 2\left(-\tfrac{1}{2}\right) = -1 \end{aligned}$$

A_{00}

$\Omega = \det A = 4+4+4 = 12 \qquad \gamma = \operatorname{tr} A_{00} = -1$

$\Omega_{00} = \det A_{00} = -4$

Determiniamo l'altro asintoto a'

$\mathscr{C}$:
$4xy - y^2 - 4x - 2y = 0$

da

$$4m - m^2 = 0$$

si ha $m = 0$ (come è giusto che sia!)

e $m = 4$

$\Rightarrow$ a':

$$y - 1 = 4(x-1)$$

$$y - 1 = 4x - 4$$

$$y = 4x - 3$$

Determiniamo le direzioni degli assi (ex: dimm. con. $\perp$)

$$\begin{pmatrix} -m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = 0$$

assi:

$a_\pm$:

$y - 1 = m_\pm (x-1)$

a_+ è quello focale

$$\begin{pmatrix} -m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2m \\ 2-m \end{pmatrix} = 0$$

$$-2m^2 + 2 - m = 0$$

$$2m^2 + m - 2 = 0$$

$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4} \equiv m_\pm$$

Semiassi a, b.

$$\mathcal{A} = 12$$
$$\mathcal{A}_{00} = -4$$
$$\gamma = -1$$

$$t^2 + \frac{\mathcal{A}_{00}\,\gamma}{\mathcal{A}}\,t + \frac{\mathcal{A}_{00}^3}{\mathcal{A}^2} = 0$$

$$t^2 - \frac{4(-1)}{12}\,t + \frac{-4^3}{12^2} = 0$$

$$t^2 + \frac{1}{3}\,t + \frac{-4^3}{4^2 \cdot 3^2} = 0$$

$$t^2 + \frac{1}{3}\,t - \frac{4}{3^2} = 0$$

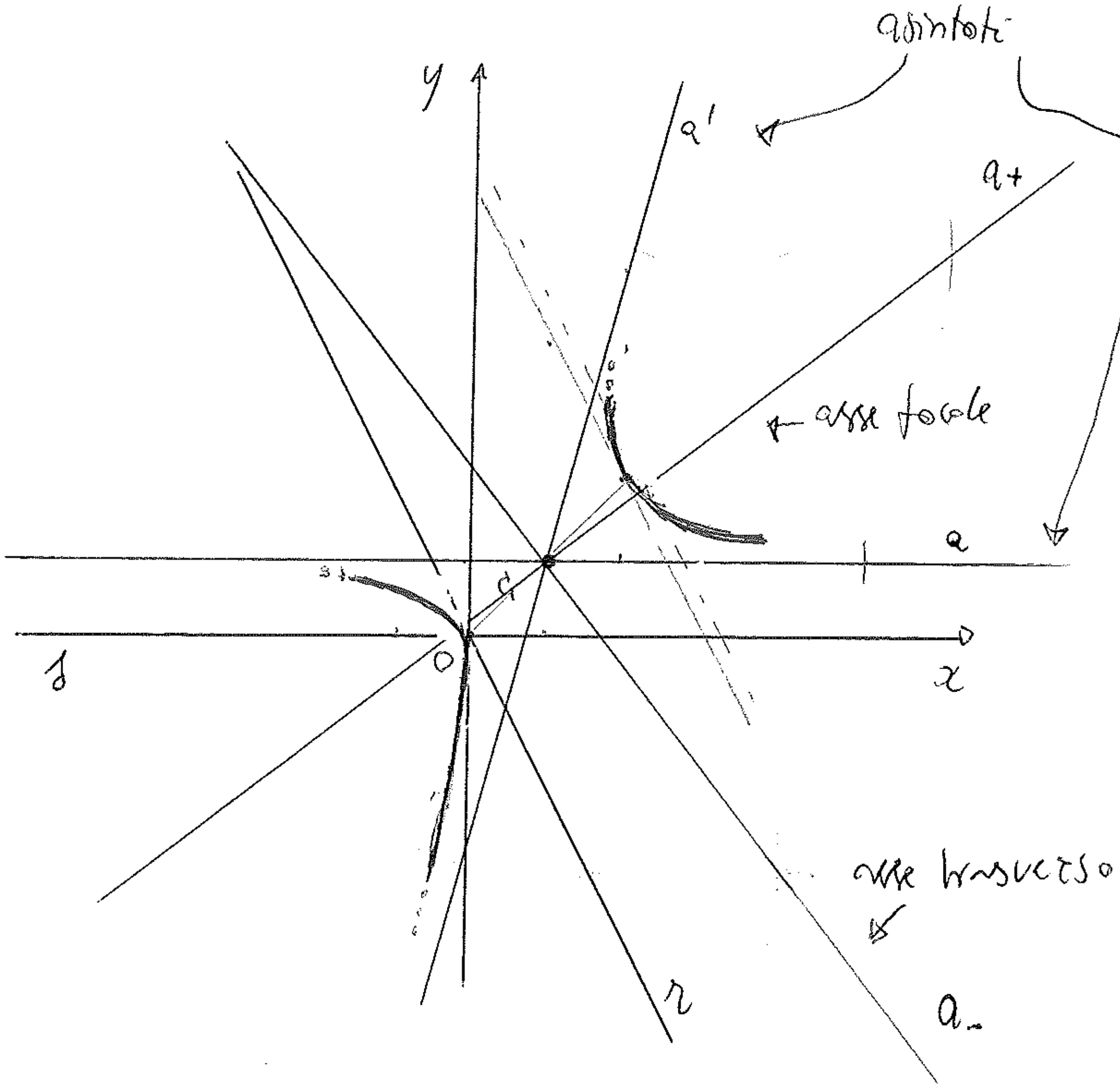
$$9t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16 \cdot 9}}{18} = \frac{-3 \pm 3\sqrt{17}}{3 \cdot 6}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{6} \qquad t = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \\ \frac{1}{\beta} \end{cases} \qquad \begin{matrix} \alpha = a^2 \\ \beta = -b^2 \end{matrix}$$

$$a = \sqrt{\frac{6}{\sqrt{17} - 1}} = \sqrt{\frac{6(\sqrt{17}+1)}{\underbrace{17 - 1}_{16}}} = \sqrt{\frac{3(\sqrt{17}+1)}{8}}$$

$$b = \sqrt{\frac{6}{\sqrt{17} + 1}} = \sqrt{\frac{6(\sqrt{17}-1)}{\underbrace{17 - 1}_{16}}} = \sqrt{\frac{3(\sqrt{17}+1)}{8}}$$

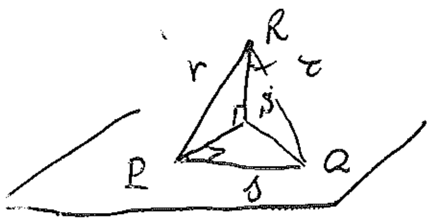


Abbozzo del grafico

$\boxed{29.16/09}$

(3) Sia dato $\pi: \; x+y-z+1=0$

$(P: (1,-1,1) \in \pi)$ $\qquad \pi': \; x-z=0$



$$r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+2t \\ z = 1-t \end{cases}$$

$$s = \pi \cap \pi' : \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x-z=0 \end{cases}$$

$Q: (2,-1,2) \in s \qquad R: (2,1,0) \in r$

fascio di piani per r:

$$r: \begin{cases} x+z-2=0 & (I^a + III^a) \\ 2x-y-3=0 & (-2I^a + II^a) \end{cases}$$

$-2x = -2-2t$

$y = -1+2t$

$-2x+y = -3$

$2x-y = 3$

$2x-y-3=0$

$\mathcal{F}$:

$$(x+z-2) + \lambda(2x-y-3) = 0$$

[per trovare il piano π'' contenente s basta imporre] il passaggio per $Q: (2,-1,2)$

$$(2+2-2) + \lambda(\overbrace{4+1-3}^{2}) = 0$$

$$2 + 2\lambda = 0 \implies \lambda = -1$$

$\pi'' : x + z - 2 \quad - (2x - y - 3) = 0$

$x + z - 2 \quad - 2x + y + 3 = 0$

$-x + y \quad + z + 1 = 0$

$\pi'' : \qquad x - y - z - 1 = 0$

t: retta per $R : (2,1,0) \quad \perp \quad \pi$

$$t: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases}$$

$\pi : x + y - z + 1 = 0$

$S = t \cap \pi \qquad (2+t) + (1+t) - (-t) + 1 = 0$

$2 + t + 1 + t + t + 1 = 0$

$3t + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{4}{3}$

$S : \left(\frac{2}{3} , -\frac{1}{3} , \frac{4}{3} \right)$

$x_S = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

$y_S = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$

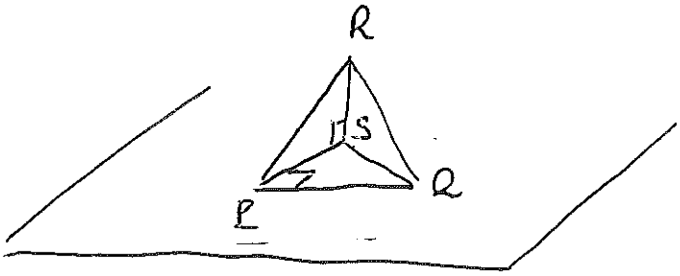
$z_S = +\frac{4}{3}$

Area di PQS

$P: (1, -1, 1)$

$Q: (2, -1, 2)$

$S = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$



$\vec{PQ} = (1, 0, 1)$

$2-1=1$
$-1+1=0$
$2-1=1$

$\vec{PS} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$\frac{2}{3}-1 = -\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{3}+1 = \frac{2}{3}$
$\frac{4}{3}-1 = \frac{1}{3}$

$\|\vec{PQ}\| = \sqrt{2}$

$\|\vec{PS}\| = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{6} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$$A = \frac{1}{2}\|\vec{PQ} \times \vec{PS}\|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ancora più semplicemente, si ha $\vec{PS} \perp \vec{PQ}$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2}\|\vec{PQ}\|\,\|\vec{PS}\|$

$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{3}$ ✓

V_{SPQR}: troviamo $h = \overline{RS}$

① $\frac{|2+1+1|}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$R: (2, 1, 0)$

② controllo $R: (2, 1, 0)$

$S: \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

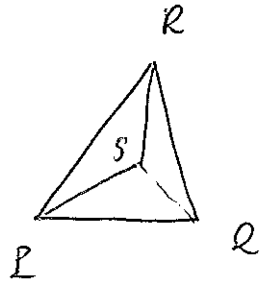
$$\sqrt{\left(\frac{2}{3}-2\right)^2+\left(-\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{3\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{3}\cdot\frac{4}{3} = \frac{4}{\sqrt{3}} \quad \checkmark$$

$$V = \frac{1}{3} A\cdot h = \frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{9}$$

Altro modo: $\vec{PR}$: $(2-1,\ 1+1,\ -1) = (1, 2, -1)$

calcoliamo

$$\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}\right|$$



$$\boxed{\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} -\ \vec{PR}\ - \\ -\ \vec{PS}\ - \\ -\ \vec{PQ}\ - \end{vmatrix}\right|}$$

$$= \frac{1}{18}\left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{18}\left|\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{\cancel{18}_{9}}\cdot\cancel{2}\cdot 4 = \frac{4}{9} \quad \checkmark$$

29/6/09

1'

nucleo (sp. nullo) e immagine di

$$A_{a,b} = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ b & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ al variare di $a, b \in \mathbb{R}$

Sol.

$$\det A_{a,b} = 1 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{vmatrix} = -a-b \quad (= -(a+b))$$

$\neq 0 \iff a+b \neq 0$. In tal caso $r(A_{a,b}) = 3$,

$\nu(A_{a,b}) = 0 \implies$ base di $\operatorname{Im} A_{a,b}$ = es. base canonica.

$\operatorname{Ker} A_{a,b}$ non ha base (è il sottospazio banale)

Se $a+b=0$, è subito visto che $r(A_{a,b}) = 2$

$\implies \nu(A_{a,b}) = 1$

$$\operatorname{Im} A_{a,-a} : \langle \underbrace{\begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{base}} \rangle$$

Si vede subito che, se $a=-b=0$,

$\operatorname{Ker} A_{0,0} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ e, se $a \neq 0$ (e $b=-a$)

$$\operatorname{Ker} A_{a,-a} = \langle e_1 - a e_2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

che congloba la precedente

Ma risolviamo in modo standard:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ -a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$ax + y + 2z = 0$$
$$-ax - y = 0$$
$$z = 0$$

$$\begin{cases} ax + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$x = x$
$y = -ax$
$z = 0$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

in part. se $a = 0$

$$a = 0 \qquad \begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

29/6/09

2'

Sia $A_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

per quali valori $a \in \mathbb{R}$ p_c^A ammette radici reali?

$$p_c^A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ a & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(1+\lambda)\left[(-\lambda)(-2-\lambda) - a\right] =$$

$$= -(1+\lambda)\left[\lambda^2 + 2\lambda - a\right]$$

radici $\lambda = -1$ e radici di

$$\lambda^2 + 2\lambda - a = 0$$

$$\lambda = -1 \pm \sqrt{1+a}$$

$\Rightarrow$ rad. reali per $a \geq -1$

Per quali valori di $a \geq -1$ è diag.?

Se $a > -1$, si hanno tre radici distinte

$\Rightarrow$ è diagonalizzabile

Se $a = -1$, $\lambda = -1$ è radice tripla

$m_a(-1) = 3$

$$r\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2 \Rightarrow \nu = 1 = m_g(-1)$$

$\Rightarrow$ non è diag.

Se $a = 3$ le radici sono $\lambda = \begin{cases} -1 \\ -1 \pm 2 \nearrow 1 \\ \quad\quad\ \searrow -3 \end{cases}$

base di autovettori:

$V_{-1}^{A_3}$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$$

$V_{-1}^{A_3} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\begin{cases} \cancel{4}^{2}x + \cancel{2}z = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ y = 3x \\ z = -2x \end{cases}$$

$V_1^{A_3}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-x + y + 2z = 0 \qquad (y = x)$$
$$3x - 3y = 0 \qquad y = x$$
$$-2z = 0 \qquad z = 0$$

$$\begin{cases} x = x \\ y = x \\ z = 0 \end{cases} \qquad V_1^{A_3} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$V_{-3}^{A_3}$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3x + y + 2z = 0 \qquad x$$
$$3x + y = 0 \qquad y = -3x$$
$$2z = 0 \qquad \Rightarrow z = 0$$

$$\begin{cases} x = x \\ y = -3x \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad V_{-3}^{A_3} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$