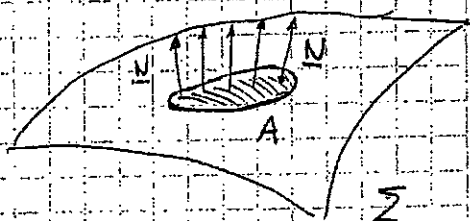


★ LA MAPPA DI GAUSS (o applicazione di Gauss)

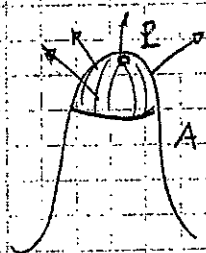
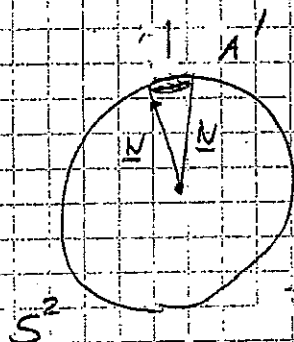
Si vuole generalizzare il concetto di curvatura dalle curve alle superfici.

Si ricorre alla discussione del Cap. I.

Idea di base:



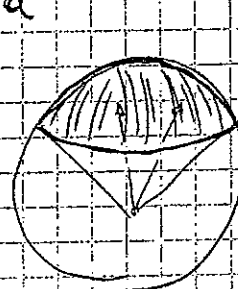
Surf. orientata
regolare



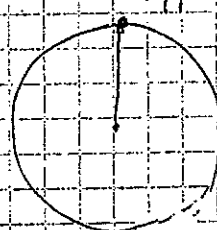
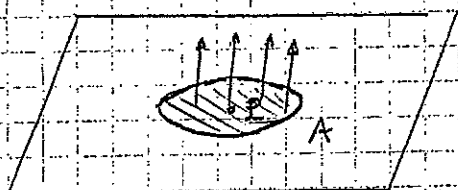
"grande curvatura"

"grande curvatura"

"curvatura nulla"



$A' =$ un solo punto



Gauss: $K(P) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A}$ (e Rodrigues) curvatura in P aree di A' e A ... (orientate)
(K potrà risultare anche negativa)

★ Per S^2_R si ottiene $K = \frac{1}{R^2}$

(... si ricordi per la circ. di raggio R , la curvatura vale $\frac{1}{R}$...)

Formalismi:

sup. regolare orientata

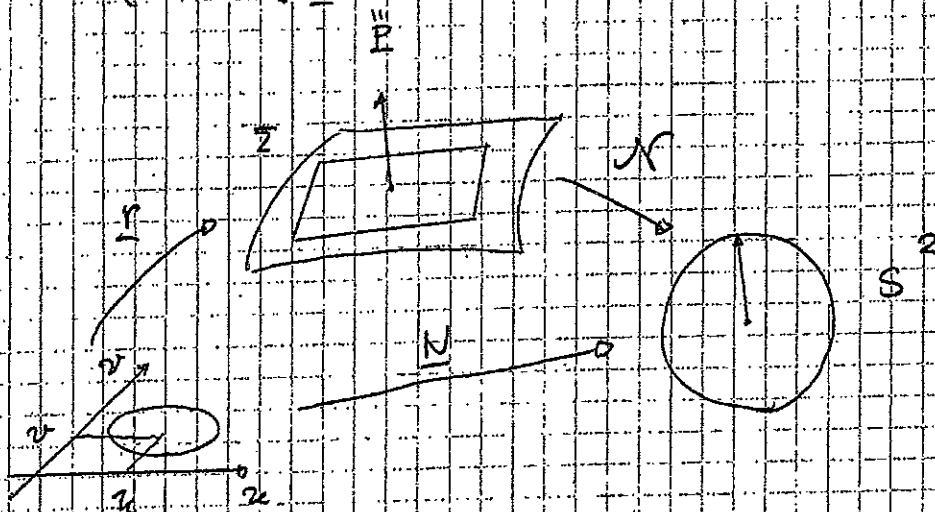
$$\mathcal{N} : \begin{matrix} \Sigma & \xrightarrow{\quad} & S^2 \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{N}(\mathbb{R}) = \underline{N}(\mathbb{R}) \end{matrix}$$

mappe di Gauss

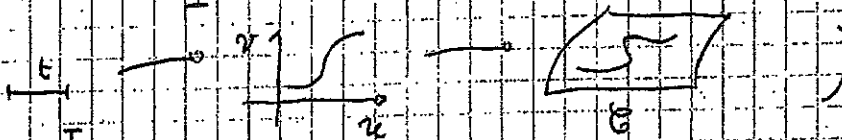
Sia $\underline{N} = \underline{N}(u, v) \quad (u, v) \in \mathcal{U}$

$$\mathcal{N} \circ \underline{\Gamma} = \underline{N}$$

$$(\mathcal{N}(\underline{\Gamma}(u, v)) = \underline{N}(u, v))$$



Porremo poi, per il seguito, per una curva regolare γ su Σ $\underline{\gamma}(t) := \underline{\Gamma}(u(t), v(t)) \quad t \in \mathbb{I} \dots$



Definiamo: differenziabili (secondo Fréchet)

$$f: \mathcal{U} \subset V \rightarrow W$$

regione

v, w sp. vett. reali (finite dim)
 $\dim V = n; \dim W = m$

f diff. in $a \in \mathcal{U}$:
 $x - a = h$

$$f(x) - f(a) = \underbrace{df(a)}_{\text{differenziale di } f \text{ in } a} \cdot h + o(h) \quad x \in \mathcal{U} \subset V$$

$\text{Hom}(V, W)$

concretamente $df(a) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ (m righe, n colonne):

matrice Jacobiana

studiamo il differenziale di N

(nel senso di Fréchet)

$$S := -dN$$

operatore
di forma
(... shape)

$$dN|_P : T_P \rightarrow T_{N(P)}^* S^2$$

Per il teorema di derivazione delle funzioni
composte si

prodotto fra matrici

$$dN|_{(u,v)} = dN|_{\underline{r}(u,v)} \cdot d\underline{r}|_{(u,v)}$$

ovvero

$$(\underline{N}_u \quad \underline{N}_v) = dN|_{\underline{r}(u,v)} \cdot (\underline{r}_u \quad \underline{r}_v)$$

Ricordando che

$$A \cdot B = A \left(\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \right) =$$

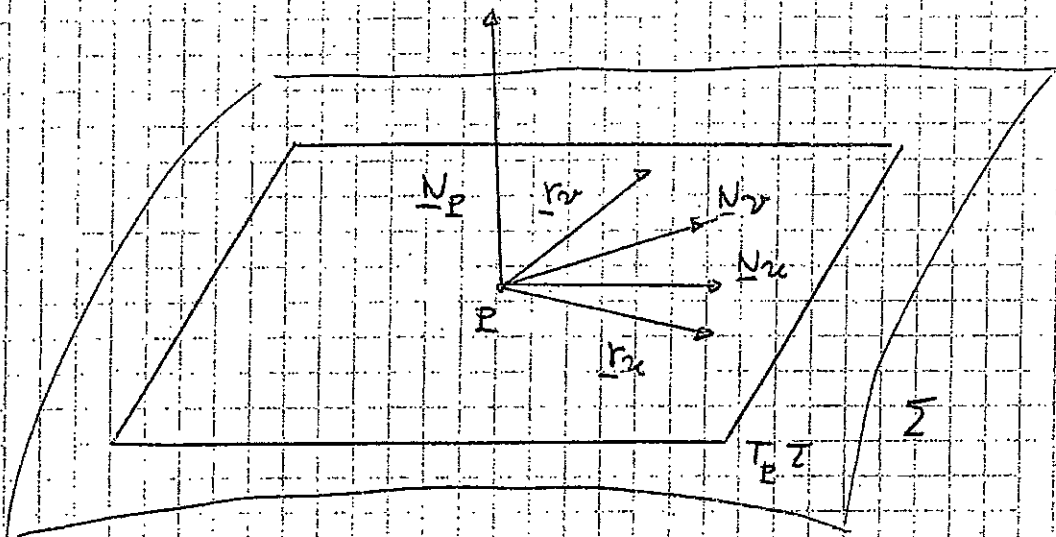
/ \

colonne di B

$$= \left(A \left(\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \right) \quad A \left(\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \right) \quad \dots \quad A \left(\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \right) \right)$$

s'ha:

$$\star \begin{cases} dN|_{\underline{r}(u,v)} (\underline{r}_u) = \underline{N}_u \\ dN|_{\underline{r}(u,v)} (\underline{r}_v) = \underline{N}_v \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{posso leggere } S \\ \text{come operatore} \\ \text{da } T_P \text{ su se stesso} \end{matrix}$$



(costantemente:

$$\begin{cases} \underline{\alpha} = \underline{\alpha}(t) & t=0 \rightarrow P_0 \equiv \underline{\alpha}(0) \\ \underline{N} = \underline{N}(t) \end{cases}$$

$$\dot{\underline{N}}(0) = \left. \frac{d\underline{N}}{dt} \right|_{t=0} = \underline{N}_u^0 \dot{u}(0) + \underline{N}_v^0 \dot{v}(0)$$

||

$$\left. \frac{dX(\underline{\alpha}(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. dX \right|_{\underline{\alpha}(0)} (\underline{r}_u^0) \dot{u}(0) + \left. dX \right|_{\underline{\alpha}(0)} (\underline{r}_v^0) \dot{v}(0)$$

Fatto cruciale

$$\star S : T_P \Sigma \rightarrow T_P \Sigma \quad \text{è simmetrico}$$

$$(\underline{S}_P)$$

Dimo. Basta verificare che $\langle \underline{r}_u | S \underline{r}_v \rangle = \langle \underline{r}_v | S \underline{r}_u \rangle$
 ovvero che $\langle \underline{r}_u | \underline{N}_v \rangle = \langle \underline{r}_v | \underline{N}_u \rangle$.

Ora, da $\langle \underline{N} | \underline{r}_u \rangle = \langle \underline{N} | \underline{r}_v \rangle = 0$ segue

$$\frac{\partial}{\partial v} \langle \underline{N} | \underline{r}_u \rangle = \langle \underline{N}_v | \underline{r}_u \rangle + \langle \underline{N} | \underline{r}_{uv} \rangle = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \langle \underline{N} | \underline{r}_v \rangle = \langle \underline{N}_u | \underline{r}_v \rangle + \langle \underline{N} | \underline{r}_{vu} \rangle = 0$$

$\Rightarrow$ l'asserto segue poiché $\underline{r}_{uv} = \underline{r}_{vu} \dots \quad \square$

★ Si ponga per $\underline{v} \in T_p \Sigma$, $\|\underline{v}\| = 1$

$$\boxed{\Pi_p(\underline{v}) := \langle \underline{v} | S_p \underline{v} \rangle}$$

(2^a forma quadratica fondamentale)

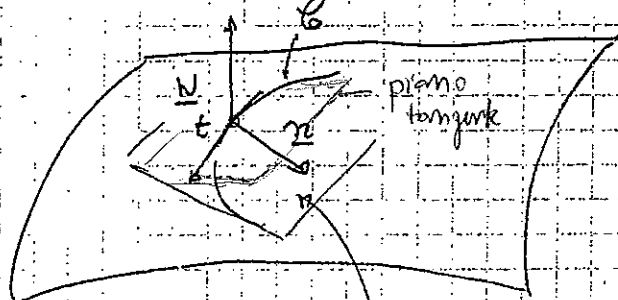
Per poter interpretare geometricamente tale forma ci occorre la nozione di

★ curvatura normale (di Σ) di una curva γ su Σ (i.e. biregolare) passante per P

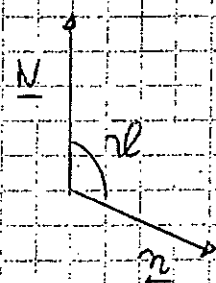
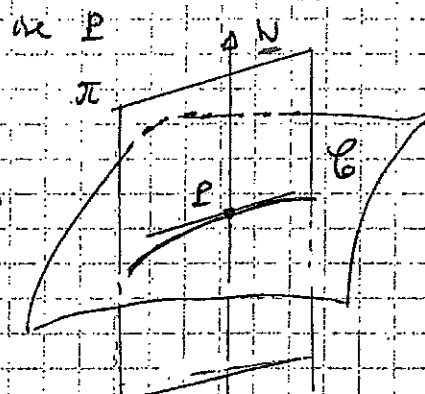
$$K_n(P) = K(P) \cdot \cos \vartheta = K(P) \langle \underline{N} | \underline{n} \rangle$$

$$(\equiv \langle \underline{N}, \underline{\tau}'' \rangle(P))$$

↓
Curvatura di γ
in P



piano osculatore di γ



in particolare

$$\gamma \cap \pi = P \rightarrow$$

$$\underline{n} = \pm \underline{N}$$

e K_n misura

la curvatura di γ (con segno: γ è più o meno curva!)

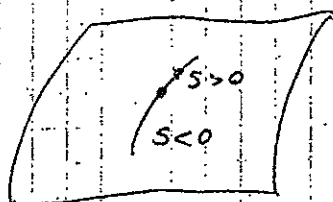
π : piano e
fascio di piani
per la retta indi-
cizzata da $\underline{N}$
contenente una
retta di $T_p \Sigma$ passante
per P prefissata.

★ Teorema (Ménier)

Tutte le curve per $P \in \Sigma$ aventi la stessa retta tangente hanno la stessa curvatura normale. Precisamente:

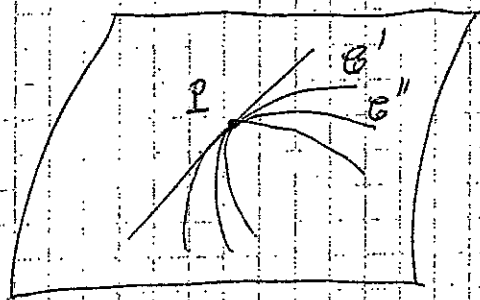
$$\star \quad \boxed{\Pi_P(\alpha'(0)) = K_n(P)}$$

$\alpha = \alpha(s)$ s : ascissa curvilinea



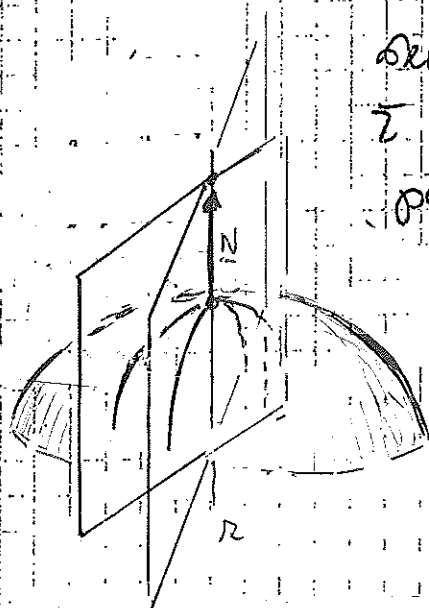
$$(\|\alpha'\| = 1)$$

★ non c'è dipendenza dall'orientamento di $\alpha', \alpha'' \dots$



★ I valori di Π_P

si ottengono considerando le curvature (con segno) delle curve ottenute intersecando Σ con i piani del fascio per r



Dimostrazione

$\alpha(s) = \underline{r}(x(s), y(s)) \quad s \in I \quad (I \neq \emptyset)$

s'ha

$$\langle \underline{N}(s) | \underline{\alpha}'(s) \rangle = 0 \quad s \in I \quad (\text{p. giace su } \Sigma)$$

$$\Rightarrow \langle \underline{N}'(s) | \underline{\alpha}'(s) \rangle + \langle \underline{N}(s) | \underline{\alpha}''(s) \rangle = 0$$

$(1 = \frac{d}{ds})$

s'ha:

$$\Pi_P(\underline{\alpha}'(0)) = - \langle dX_P \underline{\alpha}'(0) | \underline{\alpha}'(0) \rangle =$$

$$= - \langle \underline{N}'(0) | \underline{\alpha}'(0) \rangle = \langle \underline{N}(0) | \underline{\alpha}''(0) \rangle =$$

$$= \kappa_m(0)$$

$$\stackrel{\parallel}{=} \kappa(0) \underline{n}(0)$$

□

★ Poiché S è simmetrico, S è diagonalizzabile, i suoi autovalori sono reali e, se distinti, danno luogo ad autospazi ortogonali.

Siano tali autovalori λ_1 e λ_2 , con $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Per ovvie ragioni, vengono chiamati curvature principali.

Inoltre è:

$$\lambda_1 = \min_{\|\underline{x}\|=1} \Pi_P(\underline{x}) \quad \underline{x} \in T_P \Sigma$$

★

$$\lambda_2 = \max_{\|\underline{x}\|=1} \Pi_P(\underline{x})$$

(Principio di Rayleigh)

★ Sul principio di Rayleigh

INCLISO

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ (matr. simmetrica 2×2)

Poniamo $f(x, y) = X^t A X$ con $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
 $= ax^2 + 2bxy + dy^2$

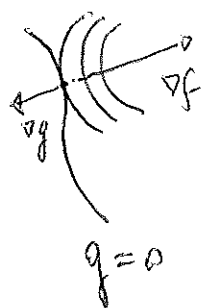
Sia poi $g(x, y) = X^t X - 1 = 0$
 $x^2 + y^2 - 1 = 0$

trattazione
elementari
alternative:
V.
M. Spina
Elementi di geometria

la circonferenza unitaria.

Troviamo i phi critici di f vincolata a $g = 0$

★ Lagrange:



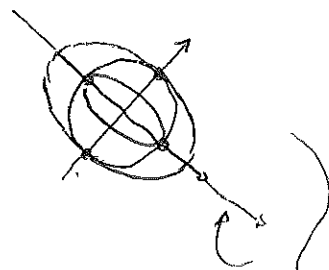
$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2ax + 2by = \lambda \cdot 2x \\ 2bx + 2dy = \lambda \cdot 2y \end{array} \right.$$

ovvero $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

e $\|X\| = 1 \quad (x^2 + y^2 = 1)$

A simmetrica, def.
positiva $\lambda_i > 0$,
oppure $v^t A v > 0 \quad \forall v \neq 0$



autospazi
ortogonali

$\Rightarrow$ phi critici $\equiv$ autovettori di norma 1

corrisp. valori critici $\equiv$ autovalori di A
 (reali)

[il discorso è generale...]

Nel caso specifico (ma il discorso è generale)
possiamo effettuare il seguente calcolo elementare

$$R_n = R_1 \cos^2 \varphi + R_2 \sin^2 \varphi \quad R_1 \leq R_2$$

||

da $f(\varphi) = R_1 \cos^2 \varphi + R_2 \sin^2 \varphi$

$$f'(\varphi) = -2R_1 \cos \varphi \sin \varphi + 2R_2 \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

$$\underbrace{(R_2 - R_1)}_0 \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

$\Rightarrow$

$$\sin \varphi \cos \varphi = 0$$

$$(\sin^2 \varphi = 0)$$

massimi val.

$$f = R_2$$

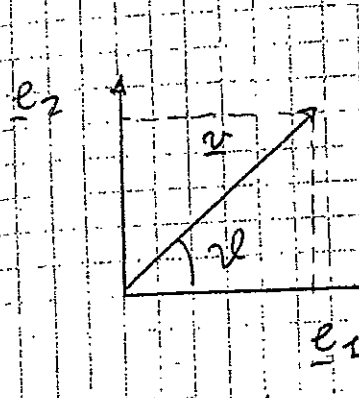
$$\Rightarrow, \text{ in } [0, 2\pi)$$

$$\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$$

minimi val
($f = R_1$)

Considerata una base ortonormale $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ formata da autovettori di β : $S \underline{e}_i = \kappa_i \underline{e}_i$ $i=1,2$.

e posto $\underline{v} = \cos \vartheta \underline{e}_1 + \sin \vartheta \underline{e}_2$ si ha

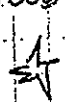


$$\kappa := \Pi_P(\underline{v}) =$$

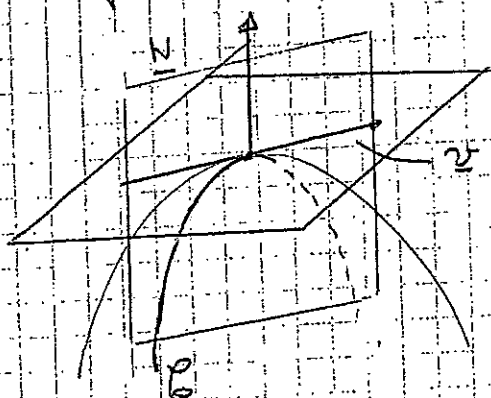
$$= (\cos \vartheta \quad \sin \vartheta) \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

$$= \kappa_1 \cos^2 \vartheta + \kappa_2 \sin^2 \vartheta$$

ovvero si ha la



formula di Eulero



κ è la curvatura (con segno) di C

[Si verifica che i pt. critici della funzione $f(\vartheta) = \kappa_1 \cos^2 \vartheta + \kappa_2 \sin^2 \vartheta$ corrispondono agli autovettori (di norma 1) ... (principio di Rayleigh)]

★ Sia $K = \det S = \kappa_1 \kappa_2$ ($K = K(P)$)

K : curvatura gaussiana di Σ in P

Vogliamo determinare K : per fare questo,

abbiamo esprimere Π_P in termini di una forma quadratica sullo spazio dei parametri, $\mathbb{R}^2$

che chiamiamo ancora 2^a forma quadratica fondamentale

Ripartiamo da

$$\langle \underline{N} | \underline{r}_u \rangle = 0 ; \langle \underline{N} | \underline{r}_v \rangle = 0$$

Derivando

$$\langle \underbrace{\underline{r}_{uu}}_e | \underline{N} \rangle + \langle \underline{r}_u | \underline{N}_u \rangle = 0$$

$$\langle \underbrace{\underline{r}_{vv}}_g | \underline{N} \rangle + \langle \underline{r}_v | \underline{N}_v \rangle = 0$$

$$\langle \underbrace{\underline{r}_{uv}}_f | \underline{N} \rangle + \langle \underline{r}_u | \underline{N}_v \rangle = 0$$

$$\langle \underbrace{\underline{r}_{vu}}_f | \underline{N} \rangle + \langle \underline{r}_v | \underline{N}_u \rangle = 0$$

si trova la
simmetria
dell'operatore
di forma

La 2° forma fondamentale ci dice come
 $\underline{r}$ è immersa in $\mathbb{R}^3$... entra in gioco $\underline{N}$

La 1° forma f. (metrica) descrive la geometria
intrinseca di $\underline{r}$... "

Con le solite notazioni, si ha, dalle formule
precedenti

$$\boxed{\Pi_p(\dot{\underline{a}}(0)) = -\langle \dot{\underline{a}}(0) | dN_p \dot{\underline{a}}(0) \rangle = \dots}$$

$$(e \text{ pur arbitraria}) \quad \dots = e \dot{u}^2 + 2f \dot{u} \dot{v} + g \dot{v}^2$$

$$= (\dot{u} \ \dot{v}) \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} +$$

si possono moltiplicare
con $(du, dv) \dots$

Dettagli:

$$\dot{\underline{\alpha}} = \underline{r}_u \dot{u} + \underline{r}_v \dot{v}$$

$$-\dot{\underline{N}} = \underline{S} \cdot \dot{\underline{\alpha}} = -(\underline{N}_u \dot{u} + \underline{N}_v \dot{v})$$

$$\Pi(\dot{\underline{\alpha}}) =$$

$$\langle \dot{\underline{\alpha}}, \underline{S} \dot{\underline{\alpha}} \rangle = \left[\underbrace{\langle \underline{r}_u, \underline{N}_u \rangle}_{-e} \dot{u}^2 + 2 \underbrace{\langle \underline{r}_u, \underline{N}_v \rangle}_{-f} \dot{u} \dot{v} + \underbrace{\langle \underline{r}_v, \underline{N}_v \rangle}_{-g} \dot{v}^2 \right]$$

$$= e \dot{u}^2 + 2f \dot{u} \dot{v} + g \dot{v}^2$$

Si noti, successivamente, che

$$R_n = \Pi(\dot{\underline{\alpha}}') = \Pi\left(\dot{\underline{\alpha}} \cdot \frac{dt}{ds}\right) = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \Pi(\dot{\underline{\alpha}})$$

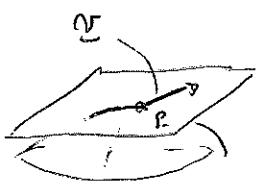
$$\text{ma } \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = E \dot{u}^2 + 2F \dot{u} \dot{v} + G \dot{v}^2,$$

pertanto

$$R_n = \frac{e \dot{u}^2 + 2f \dot{u} \dot{v} + g \dot{v}^2}{E \dot{u}^2 + 2F \dot{u} \dot{v} + G \dot{v}^2}$$

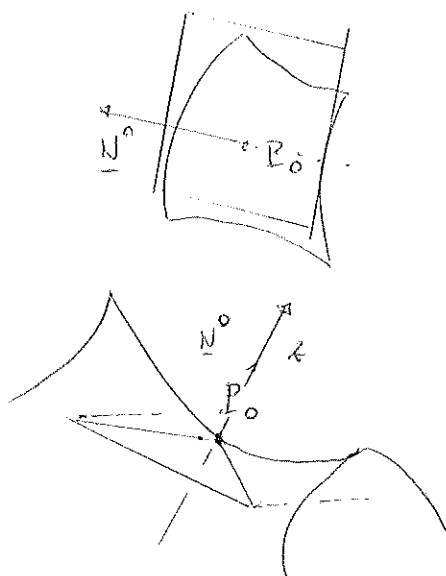
In generale, se si vuole la curvatura normale di una curva avente tangente individuata da $\underline{v} \in T_P \Sigma$

$$\text{si ha } R_n(L) = \frac{\Pi(\underline{v})}{\|\underline{v}\|^2}$$



♦ Ulteriore interpretazione geometrica della II^a forma fondamentale

Nelle ipotesi e notazioni usuali, consideriamo
lo sviluppo di Taylor



$$\begin{aligned} \underline{r}(u, v) = & \underline{r}_0 + \underline{r}_u^0 \Delta u + \underline{r}_v^0 \Delta v + \\ & \frac{1}{2} (\underline{r}_{uu}^0 \Delta u^2 + 2 \underline{r}_{uv}^0 \Delta u \Delta v + \\ & + \underline{r}_{vv}^0 \Delta v^2) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \Delta u \\ v &= v_0 + \Delta v \end{aligned}$$

Fissiamo il sistema di riferimento

prendendo come origine P_0 , come "piano (x, y) " il
piano tangente; come "asse z " la retta a questo
perpendicolare passante per P_0 , e diretta come $\underline{N}^0$.

Lo sostantamento verticale di T dal piano tangente sarà
dato, in un intorno di P_0 , da

$$\begin{aligned} z := \langle \underline{r}(u, v), \underline{N}^0 \rangle &= \frac{1}{2} \left[\langle \underline{r}_{uu}^0, \underline{N}^0 \rangle \Delta u^2 + 2 \langle \underline{r}_{uv}^0, \underline{N}^0 \rangle \Delta u \Delta v \right. \\ &\quad \left. + \langle \underline{r}_{vv}^0, \underline{N}^0 \rangle \Delta v^2 \right] + \dots \end{aligned}$$

si ricordi: $\underline{r}_0 = \underline{e}$

$$\langle \underline{r}_u, \underline{N} \rangle = 0 \quad \text{+ in generale}$$

$$\langle \underline{r}_v, \underline{N} \rangle = 0$$

$$= \frac{1}{2} \left[e \Delta u^2 + 2f \Delta u \Delta v + g \Delta v^2 \right] + \dots$$

II^a forma fonda-
mentale

$$= \frac{1}{2} (\Delta u \ \Delta v) \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} + \dots$$

ossia, il governato, al 2° ordine, della II^a forma fondamentale. Si osserva che, posto

$$z = f(u, v) = \langle \mathbf{r}(u, v), \underline{N}^0 \rangle, \text{ la}$$

funzione f ha un pto critico in (u^0, v^0) , e l'Hessiana coincide con la II^a f. fond. (v. anche oss. pag. successive)

Se ora fissiamo gli assi u e v lungo le direzioni principali (*) (osserviamo, nel caso generale, di non

trovarci in un pto ombelicale ($R_1 = R_2$) (né, a

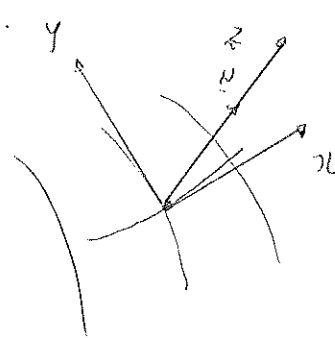
maggior ragione, planare ($R_1 = R_2 = 0$), troviamo

(*) velocità agli autosp.
di $\mathbf{S}$. velocità on the other

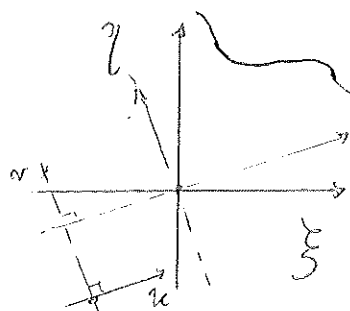
$$z = \frac{1}{2} (R_1 \Delta u^2 + R_2 \Delta v^2) + \dots$$

$$R_1 < R_2$$

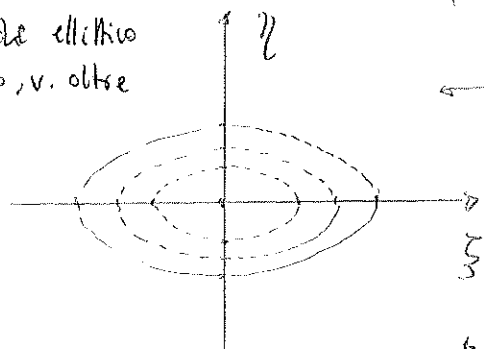
pu fissare
le ides



$$\text{III} \quad \frac{1}{2} (R_1 \xi^2 + R_2 \eta^2) + \dots$$



paraboloidi ellittici
o iperbolici, v. oltre

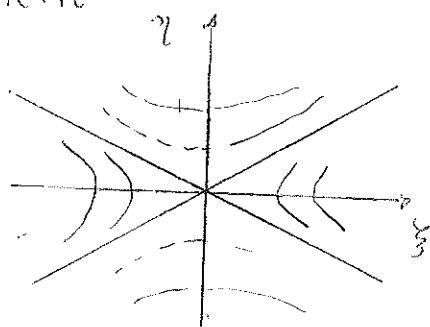


curve di
livello

approssimate

di $z = f(u, v)$

nel piano dei
parametri



$$R_1 < 0 < R_2$$

$$0 < R_1 < R_2$$

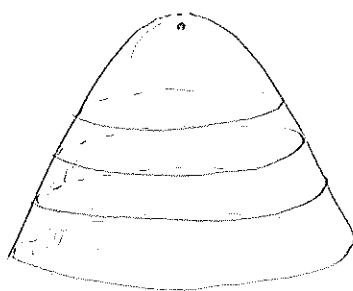
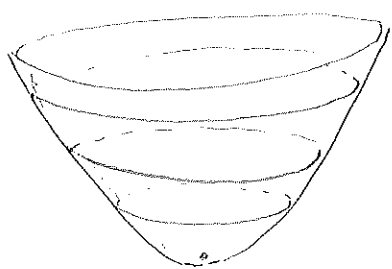
$$R_1 < R_2 < 0$$

$$R_1 \xi^2 + R_2 \eta^2 = \pm 1$$

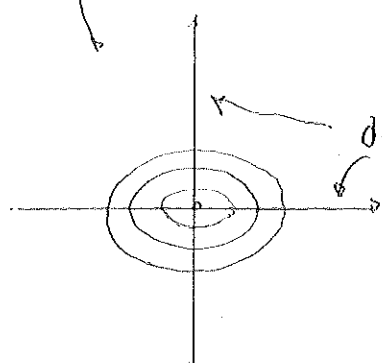
Indicatrice di Dupin

ellisse, se R_i concorde
iperbole, se R_i discorde

$$R_i \neq 0$$



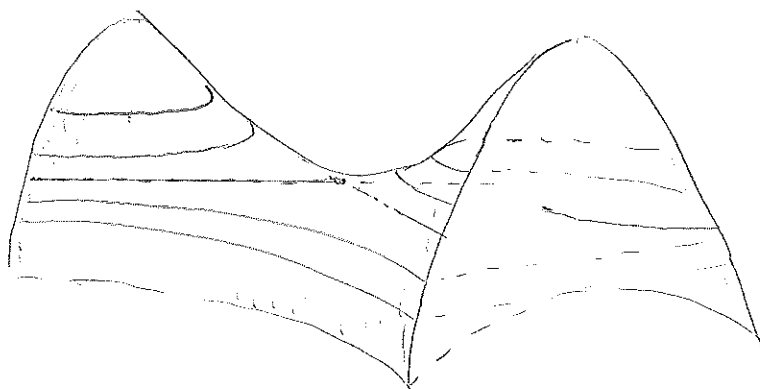
paraboloide ellittico



direzioni principali

in un punto ombelicale $R_1 = R_2 \neq 0$
si ottengono circonfereze..

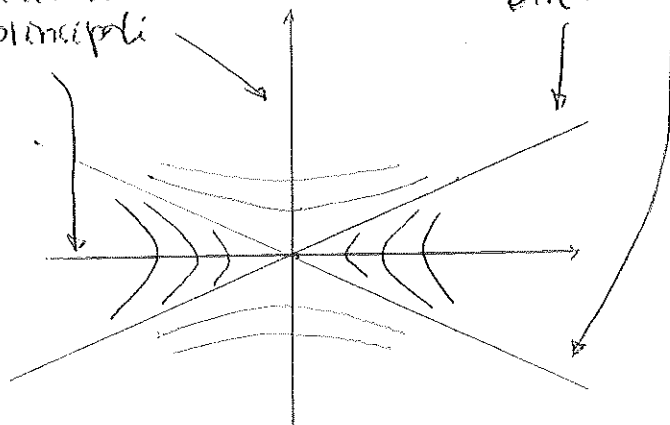
P_0 : punto
di flesso di Σ



paraboloide
iperbolico
o a sella

direzioni
principali

direzioni asintotiche



P_0 : punto iperbolico
di Σ

se una delle due curv. principali è nulla si
parla di punto parabolico

◇ Curvatura Gaussiana e curvatura media

★ Poniamo $H := \frac{1}{2} (R_1 + R_2)$
(curvatura media)

TEOREMA

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

è rapporto di
determinanti di
f. quadratiche
sul piano (u, v)

$$H = \frac{1}{2} \frac{4e - 2Ff + Eg}{EG - F^2}$$

Dimostrazione Sia $\underline{v} \in T_p \Sigma$ un autovettore

di S . Si ha $S \underline{v} = R \underline{v}$
autovettore

Da cui, posto $\underline{v} = \alpha \underline{r}_u + \beta \underline{r}_v$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

$$★ - \alpha \underline{N}_u - \beta \underline{N}_v = R (\alpha \underline{r}_u + \beta \underline{r}_v)$$

Moltiplicando scalaramente entrambi i membri per
 $\alpha \underline{r}_u$ e poi per $\underline{r}_v$, si ottiene il sistema
omogeneo

$$\begin{cases} \alpha (e - RE) + \beta (f - RF) = 0 \\ \alpha (f - RF) + \beta (g - RG) = 0 \end{cases}$$

Altrimenti esso avrebbe una sol. non banale $((\alpha, \beta) \neq (0, 0))$
che è come

$$(e - RE)(g - RG) - (f - RF)^2 = 0$$

(eq. di 2° grado in R)

Ricordiamo che

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = a(\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2)$$

$a \neq 0$ α_1, α_2 radici

con $\alpha_1 \alpha_2 = \frac{c}{a}$ $\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a}$

e che nel nostro caso $\alpha_i = R_i \dots$ si ottiene l'atteso... $\square$

★ Corollario Le curvature principali si ottengono risolvendo l'equazione

$$R^2 - 2H R + K = 0$$

$\square$

Osservazione

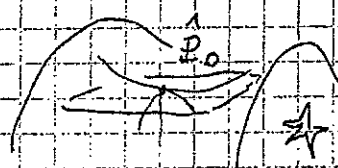
Sia data una superficie in forma cartesiana: $z = f(x, y)$ $(0, y) \in \mathcal{K} \subset \mathbb{R}^2$
(f liscia...)

Sia $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto critico di f

$$\nabla f(P_0) \equiv \nabla f(x_0, y_0) = 0 \quad (\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right))$$

Sia $\hat{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$
" $f(x_0, y_0)$

[v. anche indietro...]



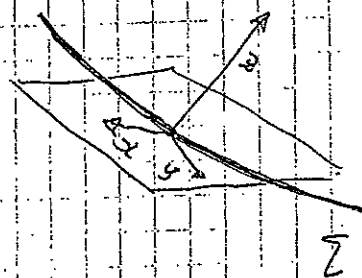
In tal caso

★ matrice di $\mathbb{I}|_{P_0}$ $= \mathcal{H}_{P_0} \equiv$ matrice hessiana



e $K = \det \mathcal{K}$ e curv. principali
" III autovalori di $\mathcal{K}$
... verificarlo ...

... Questa osservazione può risultare utile
in sede di esercizi... ogni punto di Σ risulta
critico rispetto ad un opportuno sistema di
riferimento, e si può impiegare il teorema del
Dirichlet...



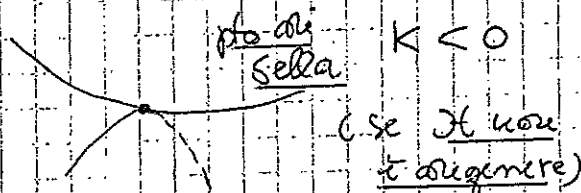
[Osservazione: sia $y = y(x)$ $x \in I$...

$$K(x) = \frac{|y''(x)|}{(1 + y'(x)^2)^{3/2}} \quad \text{curvatura}$$

(se con segno il minimo!),

in un pto critico $y'(x) = 0 \Rightarrow K(x) = |y''(x)|$

... la derivata seconda misura la curvatura...]



minimo (rel.)
 $K > 0$



massimo (rel.)
 $K < 0$

◇ Linee di curvatura

Le direzioni in $T_p \Sigma$ relative agli autospaзи di S (mutuamente ortogonali) vengono dette direzioni principali, e le curve su Σ aventi in ogni punto tangente lungo una direzione principale vengono chiamate linee di curvatura. Per queste, posto, al solito $\underline{N}(t) = (N_\alpha)(t)$ vale

$$\underline{\dot{N}}(t) \parallel \underline{\dot{\alpha}}(t) \quad (o, \text{eq. } \underline{\dot{N}} \times \underline{\dot{\alpha}} = \underline{0} \quad \underline{\dot{N}} = \chi(t) \underline{\dot{\alpha}})$$

(e viceversa...) (teorema di Rodrigues)

|(c) segue subito da $dN(\underline{\dot{\alpha}}) = \underline{\dot{N}} = \chi \underline{\dot{\alpha}}$,
|(se $\underline{\dot{\alpha}}$ è un autovettore di $S = -dN$.

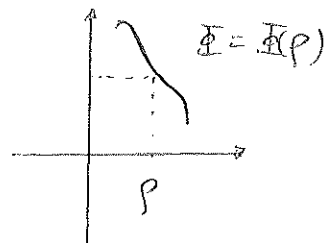
|(È possibile fare più espliciti utilizzando le
|(formule di Weingarten (v. oltre), e giungere ad
|(un sistema di equazioni differenziali (del prim'ordine)
|(per le linee di curvatura.

◇ Π^a forma fondamentale per le superficie
di rivoluzione

Si ricordi (cap. VII)

$$\begin{cases} E = 1 + \Phi'^2 \\ F = 0 \\ G = \rho^2 \end{cases}$$

Π^a f. fondamentale
(metr.)



$$1 = \frac{d}{d\rho}$$

$$\underline{r} = \underline{r}(\rho, \varphi) =$$

$$(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \Phi(\rho))$$

$$\underline{r}_\rho = (\cos \varphi, \sin \varphi, \Phi'(\rho))$$

$$\underline{r}_\varphi = (-\rho \sin \varphi, +\rho \cos \varphi, 0)$$

$$\underline{N} = \left(-\frac{\Phi'}{\sqrt{1+\Phi'^2}} \cos \varphi, -\frac{\Phi'}{\sqrt{1+\Phi'^2}} \sin \varphi, \frac{1}{\sqrt{1+\Phi'^2}} \right)$$

Calcoliamo la Π^a
forma fondamentale

$$\underline{r}_{\rho\rho} = (0, 0, \Phi''(\rho))$$

$$\underline{r}_{\rho\varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) = \underline{r}_{\varphi\rho}$$

$$\underline{r}_{\varphi\varphi} = (-\rho \cos \varphi, -\rho \sin \varphi, 0)$$

$$\Rightarrow e = \langle \underline{r}_{\rho\rho}, \underline{N} \rangle = \Phi''(\rho) (1+\Phi'^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f = \langle \underline{r}_{\rho\varphi}, \underline{N} \rangle = \dots = 0 \rightarrow$$

$$g = \langle \underline{r}_{\varphi\varphi}, \underline{N} \rangle =$$

$$= \frac{\rho \Phi'}{\sqrt{1+\Phi'^2}} (\overbrace{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}^1) = \frac{\rho \Phi'}{\sqrt{1+\Phi'^2}}$$

ciò implica che i meridiani
e i paralleli costituiscono
le linee di curvatura ★
della superficie in questione
(assieme al fatto che $F=0$)

; dunque:

Π^a forma fondamentale

$$\downarrow$$

$$e = \frac{\Phi''}{\sqrt{1+\Phi'^2}}, \quad f = 0, \quad g = \frac{\rho \Phi'}{\sqrt{1+\Phi'^2}}$$

ζ ha allora

$$K = \frac{eg - f^2}{Eg - F^2} = \frac{eg}{Eg} \quad \left(= \frac{e}{E} \cdot \frac{g}{g} \right)$$

$$= \frac{\Phi'' \cdot \rho \cdot \Phi'}{(1 + \Phi'^2)^2 \rho^2} = \frac{\Phi' \cdot \Phi''}{(1 + \Phi'^2)^2 \cdot \rho}$$

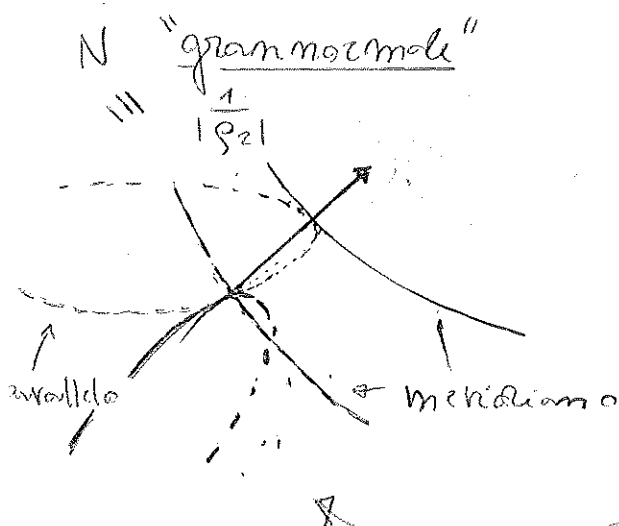
Da $H = \frac{1}{2} \frac{ge - 2Ff + Eg}{Eg - F^2}$

ζ ha: $H = \frac{1}{2} \frac{ge + Eg}{Eg} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{e}{E} \right) + \left(\frac{g}{g} \right) \right]$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{e}{E}, \quad R_2 = \frac{g}{g}$$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{e}{E} = \frac{\Phi''}{(1 + \Phi'^2)^{3/2}} \quad \& \quad \text{Chiamo } \frac{1}{R_1} \text{ la curvatura del generico meridiano}$$

$$\frac{1}{R_2} \equiv R_2 = \frac{g}{g} = \frac{\Phi'}{\rho \sqrt{1 + \Phi'^2}}$$



curvatura della
sezione normale
tangente ad un
parallelo

(NON è la curvatura
del parallelo!!)

↓
questa è uguale a $\frac{1}{\rho}$!!

* Teorema i) Si ha: $\rho = N \cos \varphi$

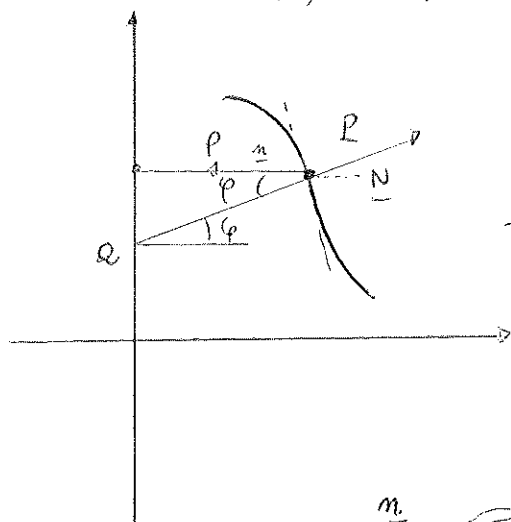
v. figura

↑
raggio del parallel
per P

↑
grannormale

"latitudine"

ii) $N = \overline{PQ}$



Dim: i) è immediata
dal teorema di Meusnier:

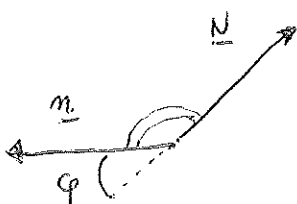
$$R_m = -R \cdot \cos \varphi$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{\rho} \cos \varphi$$

$$\Downarrow$$

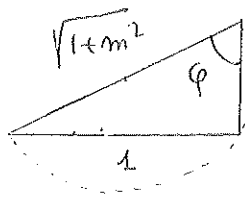
$$\rho = N \cos \varphi$$



$$\langle \underline{m}, \underline{N} \rangle = \cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi$$

ii) segue subito da i) e dalla figura.

osserviamo, in alternativa, che $\frac{1}{N} = \left(\frac{\Phi'}{\sqrt{1+\Phi'^2}} \right) \frac{1}{\rho}$

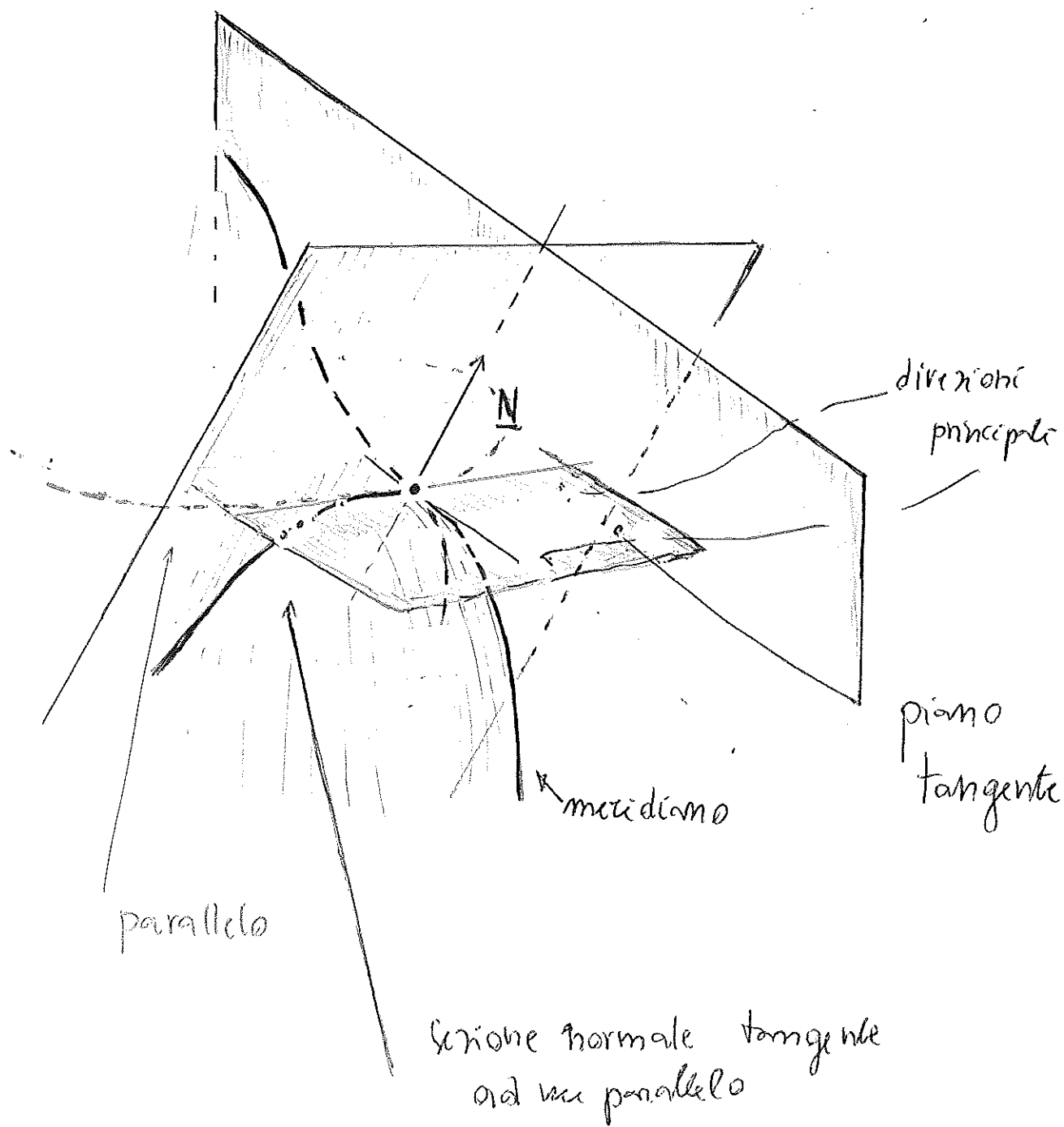


$$m = \cotan \varphi$$

$$\frac{m}{\sqrt{1+m^2}} = \cos \varphi$$

$$\frac{\cotan \varphi}{\sqrt{1+\cotan^2 \varphi}} = \cos \varphi$$

per via algebrica o
trigonometrica





Esempi ed esercizi

- ▣ Dato la superficie $\Sigma: z = xy$
(paraboloidi iperbolico), calcolare la curvatura
(con segno)
di $\gamma: \begin{cases} z = xy \\ y = \frac{1}{3}x \end{cases}$ in $P = (0, 0, 0)$

Sol: $(0, 0)$ è critico per $f(x, y) = xy = 0$

(Maxwell + $H = \text{II}$)
non proprio

$$R = \frac{\text{II}_P(v)}{\|v\|^2} = \text{con } v = (3, 1) \text{ (pu. cr.)}$$

$$= \frac{(3 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}{\underbrace{\quad}_{\substack{\nearrow \\ H_f(0,0) \quad 10}}} = \dots = \frac{3}{5}$$



L'elicoide

$$\underline{r} = \underline{r}(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ v \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} u > 0 \\ v \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

Fissato u ho un'elica elicoidale...

★ $\underline{r} \in \mathbb{R}^\infty$

★ $\underline{r}$ è iniettiva: $\underline{r}_1 = \underline{r}_2 \Rightarrow \dots v_1 = v_2$
 $\Rightarrow \dots u_1 = u_2 \quad \square$

$$\underline{r}_u = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{r}_v = \begin{pmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{r}_{uv} = \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{r}_{vu}$$

$$\underline{r}_{vv} = \begin{pmatrix} -u \cos v \\ -u \sin v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{r}_u \times \underline{r}_v = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \sin v \underline{i} - \cos v \underline{j} + u \underline{k} \neq 0$$

$$\|\underline{r}_u \times \underline{r}_v\|^2 = 1 + u^2 \quad (= EG - F^2)$$

$$E = 1$$

$$F = 0$$

$$G = 1 + u^2$$

$$\underline{N} = \frac{\underline{r}_u \times \underline{r}_v}{\|\underline{r}_u \times \underline{r}_v\|} =$$

$$= \frac{\sin v}{\sqrt{1+u^2}} \underline{i} - \frac{\cos v}{\sqrt{1+u^2}} \underline{j} + \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \underline{k}$$

$$e = \langle \underline{r}_{uv} | \underline{W} \rangle = 0$$

$$f = \langle \underline{r}_{uv} | \underline{N} \rangle = \dots = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$g = \langle \underline{r}_{uv} | \underline{V} \rangle = \dots = 0$$

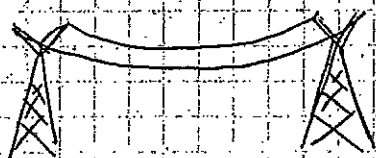
$$K = \frac{eg - f^2}{Eg - F^2} = -\frac{\frac{1}{1+u^2}}{1+u^2} = -\frac{1}{(1+u^2)^2} < 0$$

$$H = \dots = 0$$

[È un esempio di "superficie minima" (minimal surface) una lamina saponata che si adagia su una contornatura chiusa attaccata lo fa in modo da minimizzare la sua area, e questa condizione conduce (.. Equazioni di Eulero-Lagrange) ad $H=0$ (.. Problema di Plateau)]

III La catenaria

Partendo da $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ "catenaria"



".. un filo teso tra due
punti fissi si dispone
in modo da minimizzare
l'energia potenziale .. si dispone lungo

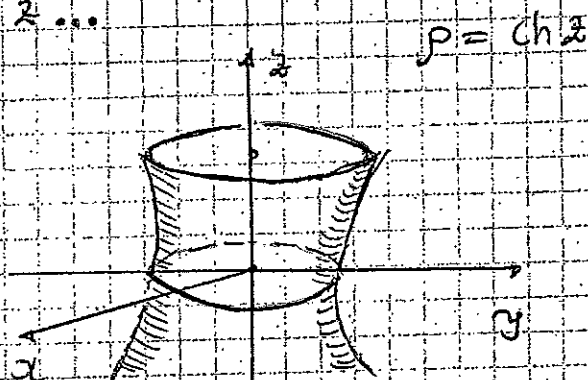
un arco di Catena.

(in un intorno di $x=0$ $\text{Ch } x = 1 + \frac{x^2}{2} \dots$
parabola

risultato già introito da Udilei).

★ la Catenoide si ottiene ruotando un arco di Catena attorno all'asse $z \dots$

$$\begin{cases} x = \text{Ch } z \cos \varphi \\ y = \text{Ch } z \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$



★ localmente, la Catenoide è isoterma
all' elicoidale struttura la mappa $\varphi \mapsto \varphi$
 $u = \text{Sh } z$

★ ha la stessa curvatura gaussiana (< 0)

Anche la Catenoide è una sup. minima...

◆ la pseudosfera di Beltrami ($K \equiv -1$)

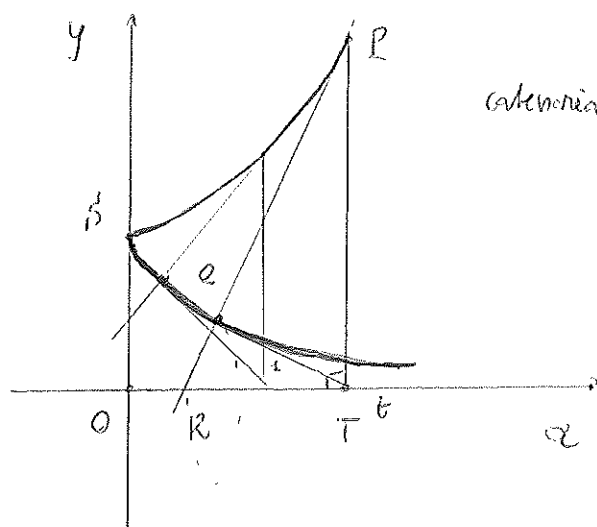
È la superficie di rivoluzione generata
da una brachicista (V. cap VII)

Calcoliamo la curvatura gaussiana

ciò si può ottenere con le formule generali; procediamo
nel modo seguente, sfruttando le considerazioni
geometriche dei capitoli precedenti.

★ Curvatura della pseudosfera

riprendiamo la discussione di V-23...



catenaria

$$P: \begin{cases} x = t \\ y = \cosh t \end{cases} \quad P: (t, \cosh t)$$

$$P = t \underline{i} + \cosh t \underline{j}$$

$$\text{tralline: } Q: \begin{cases} x = t - \tanh t \\ y = \frac{1}{\cosh t} \end{cases}$$

$$T: (t, 0)$$

$$Q: (t - \tanh t) \underline{i} + \frac{1}{\cosh t} \underline{j}$$

★ Mostriamo che la tangente alla tralline in Q passa per T:

$$\vec{Q} = \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 t}\right) \underline{i} + \frac{-\sinh t}{\cosh^2 t} \underline{j}$$

$$= \frac{\cosh^2 t - 1}{\cosh^2 t} \underline{i} - \frac{\sinh t}{\cosh^2 t} \underline{j} = \frac{\sinh^2 t}{\cosh^2 t} \underline{i} - \frac{\sinh t}{\cosh^2 t} \underline{j}$$

$$\text{coeff. angolare } m = - \frac{1}{\sinh t}$$

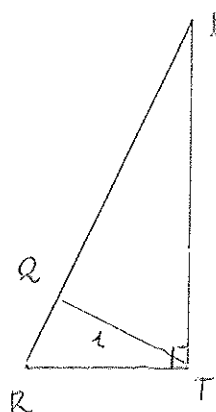
retta tangente:

$$\left(y - \frac{1}{\cosh t}\right) = - \frac{1}{\sinh t} (x - t + \tanh t)$$

$$\text{se } y = 0 \quad x - t + \tanh t = \tanh t$$

$$\Rightarrow x = t$$

In virtù del 2° teorema di Euclide applicato
al triangolo rettangolo PTR è subito



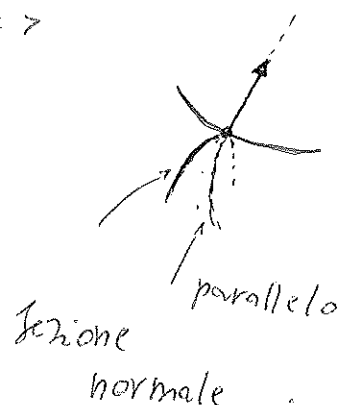
$$\overline{QR} \cdot \overline{PQ} = 1$$

ma $\overline{QR} = |\beta_1|$ $\overline{PQ} = |\beta_2|$,
"grannormale" minimo

vaggi di curvatura principali (di segno opposto!)

sicché $\beta_1 \beta_2 = -1 \Rightarrow$

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = -1$$



Puntando (con qualche anticipazione...) possiamo
concludere che il piano iperbolico ha curvatura
costante $= -1$. La pseudosfera ne costituisce
un modello locale ; in base ad un teorema di
Hilbert non si può fare di più: non si può
immaginare una superficie completa con curvatura costante
negativa in $\mathbb{R}^3$ senza singolarità.

Discussione : la metrica di Fisher - Rao ***
 importantissima in statistica, economia ecc.

Prologo

Si porta da

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

integrale gaussiano

$$I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = 2\pi \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho \cdot d\rho$$

(coord. polari)

$$= 2\pi \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-\xi} d\xi}_1 = \pi \Rightarrow I = \sqrt{\pi} \quad \square$$

Più in generale ($\lambda > 0$)

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-[\sqrt{\lambda} \cdot x]^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{\lambda} \cdot x)^2} d(\sqrt{\lambda} x)}_{\sqrt{\pi}}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} = \pi^{\frac{1}{2}} \cdot \lambda^{-\frac{1}{2}}$$

E' chiaro che

$$(\star) \left[I = \pi^{+\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}} \right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{-\lambda x^2} dx = 0 \quad \text{se } k=1,3,5..$$

Se $k = 2h$ si procede così (integrazione dipendente da un parametro)

$$\frac{dI}{d\lambda} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \lambda} (e^{-\lambda x^2}) dx =$$

[i kato...]

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (-x^2) e^{-\lambda x^2} dx \quad \text{e, m}$$

virtù di $(\star)$

$$- \frac{1}{2} \cdot \pi^{\frac{1}{2}} \cdot \lambda^{-\frac{3}{2}} = - \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x^2} dx$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x^2} dx}_{I_2(\lambda)} = \frac{1}{2} \pi^{\frac{1}{2}} \cdot \lambda^{-\frac{3}{2}}$$

È chiaro come ottenere un'espressione generale.

Calcoliamo ancora:

[farlo per induzione...]

$$\frac{dI_2}{d\lambda} = \int_{-\infty}^{+\infty} -x^4 e^{-\lambda x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \pi^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \lambda^{-\frac{5}{2}}$$

$$= -\frac{3}{4} \pi^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\lambda x^2} dx}_{I_4(\lambda)} = \frac{3}{4} \pi^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{5}{2}}$$

Piccolo richiamo

Nota; di fatto
abbiamo calcolato
alcuni momenti
di una mistura
gaussiana, cf.
corso di Probabilità
....

$$I_0(\lambda) = I(\lambda) = \pi^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{1}{2}}$$

$$I_2(\lambda) = \frac{1}{2} \pi^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{3}{2}}$$

$$I_4(\lambda) = \frac{3}{4} \pi^{\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{5}{2}}$$

*** Distribuzione normale (o gaussiana)

$$p(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μ : media
 σ : deviazione standard
 σ^2 : varianza

$p = p(x, \theta)$
 statistica
 parametri

$\theta = (\theta_1, \theta_2)$
 parametro

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, \mu, \sigma) dx = 1$$

* funzione di log-verosimiglianza

$$\log p = -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} - \underbrace{\log \sqrt{2\pi} + \log \sigma}_{\log(\sqrt{2\pi} \cdot \sigma)}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} (\log p) = \frac{-2(x-\mu) \cdot (-1)}{2\sigma^2} = \frac{x-\mu}{\sigma^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} (\log p) &= -\frac{(x-\mu)^2}{2} (-2) \sigma^{-3} - \frac{1}{\cancel{2\pi} \sigma} \\ &= \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^3} - \frac{1}{\sigma} \end{aligned}$$

$$\log p \equiv l(\cdot, \theta)$$

$\nabla l = (\partial_i l)$ funzione punteggio
 $\partial_i = \partial_{\theta_i}$ (score function)

$$\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} (\log p) = -\frac{1}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \sigma} () = \frac{\partial^2}{\partial \sigma \partial \mu} = -2(x - \mu) \sigma^{-2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} () &= (x - \mu)^2 (-3) \sigma^{-4} + \sigma^{-1} \\ &= -3(x - \mu)^2 \sigma^{-4} + \sigma^{-1} \end{aligned}$$

*** Informazione di Fisher (matrice di Fisher-Rao)

$$g_{ij}(\theta) = \langle \partial_i l, \partial_j l \rangle \equiv \int \partial_i l \partial_j l d\mu$$

(μ, σ)
1, 2

$l = \log p$ ★ Score function
(J. punteggio)

È effettivamente una matrice

"Calcolamus!"

$g_{ij} = g_{ji}$ (chiuso) ed è def. positiva

È subito visto che

$$g_{12} = g_{21} = 0$$

v. R. Marroott - M. Salmon : Applications of
Differential geometry to econometrics

$$g_{11} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{x - \mu}{\sigma^2} \right]^2 e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \frac{1}{\sigma^2} \int_{\mathbb{R}} \xi^2 e^{-\frac{1}{2} \xi^2} d(\sigma \cdot \xi)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \xi^2 e^{-\frac{1}{2} \xi^2} d\xi$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} =$$

$$\frac{x - \mu}{\sigma} = \xi$$

$$x - \mu = \sigma \cdot \xi$$

$$x = \mu + \sigma \xi$$

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

$$\lambda^{-\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sigma^2}$$

$$\boxed{g_{11} = \sigma^{-2}}$$

$$g_{22} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{(x - \mu)^2}{\sigma^3} - \frac{1}{\sigma} \right)^2 e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{(x - \mu)^4}{\sigma^6} - 2 \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^4} + \frac{1}{\sigma^2} \right] e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = \xi$$

$$x = \sigma \cdot \xi + \mu$$

$$dx = \sigma \cdot d\xi$$

$$\frac{1}{\sigma^2} \int_{\mathbb{R}} (\xi^4 - 2\xi^2 + 1) e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi \cdot \sigma$$

$$g_{22} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma^2} \cdot \left[\frac{3}{4} \sqrt{\pi} \cdot 2^{\frac{5}{2}} - 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot 2^{\frac{3}{2}} + \sqrt{\pi} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \right]$$

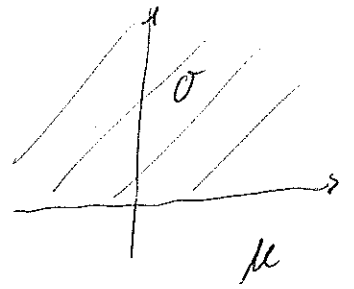
$$= \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{4} \cdot \sqrt{2} - 2 \sqrt{2} + \sqrt{2} \right)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(0 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \right) = \frac{2}{\sigma^2}$$

$$= 2\sigma^{-2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} E = g_{11} &= \sigma^{-2} & F = g_{12} = g_{21} &= 0 \\ G = g_{22} &= 2 \cdot \sigma^{-2} \end{aligned}}$$

$$g = \frac{1}{\sigma^2} (d\mu^2 + 2 d\sigma^2)$$



★ È essenzialmente la metrica del piano iperbolico!

Sia $\tilde{\sigma} = \sqrt{2} \sigma$ Si ha:
 $\sigma = \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{2}}$ $\sigma^2 = \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}$

$$g = \frac{2}{\tilde{\sigma}^2} (d\mu^2 + d\tilde{\sigma}^2)$$

$$E = \frac{2}{\tilde{\sigma}^2}$$

$$\ell = \frac{2}{\tilde{\sigma}^2}$$

$$= 2 \frac{d\mu^2 + d\tilde{\sigma}^2}{\tilde{\sigma}^2}$$

$$E_{\tilde{\sigma}} = 2 \cdot (-2) \tilde{\sigma}^{-3}$$

Curvatura gaussiana (v. oltre, IX)

$$K = - \frac{1}{2\sqrt{E\ell}} \left[\left(\frac{E_\nu}{\sqrt{E\ell}} \right)_\nu + \left(\frac{\ell_u}{\sqrt{E\ell}} \right)_u \right]$$

$$u = \mu$$

$$v = \tilde{\sigma}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \frac{1}{2 \cdot \frac{2}{\tilde{\sigma}^2}} \left(\frac{-4 \tilde{\sigma}^{-3}}{2 \cdot \tilde{\sigma}^{-2}} \right)_{\tilde{\sigma}} = - \frac{\tilde{\sigma}^2}{4} \cdot (-2) \cdot (\tilde{\sigma}^{-1})_{\tilde{\sigma}} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \tilde{\sigma}^2 \cdot - \frac{1}{\tilde{\sigma}^2} = - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

★ Anche più rapidamente !!

$$g \mapsto \alpha g$$

$$\text{se } E \mapsto \alpha E = E^* \quad \alpha \text{ costante}$$

$$(0 = F \mapsto \alpha F = 0)$$

$$G \mapsto \alpha G \equiv G^*$$

$$\text{e } K^* = - \frac{1}{2\alpha \sqrt{EG}} \left[\left(\frac{\alpha E_r}{\alpha \sqrt{EG}} \right)_r + \left(\frac{\alpha G_r}{\alpha \sqrt{EG}} \right)_r \right]$$

$$= \frac{1}{\alpha} K$$

però, se la conv. della metrica standard

sul somigliano di Poincaré vale $K = -1$,

quella in questione vale $K^* = -\frac{1}{2} \quad (d=2)$

Nota:

★ Possiamo anche usare la formula per le metriche conf. piane
v. oltre, IX.

$$E = G = -\frac{1}{2\lambda} \Delta \log \lambda$$

$$\lambda = 2\tilde{\sigma}^{-2}$$

$$\log \lambda = \log 2 - 2 \log \tilde{\sigma}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\sigma}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mu^2}$$

$$-\Delta \log \lambda = -2 (-1) \tilde{\sigma}^{-2} = 2\tilde{\sigma}^{-2}$$

$$\Rightarrow K^* = -\frac{1}{2}$$