UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI VERONA

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

ANALISI MATEMATICA I - Modulo Avanzato

Pamphlet su Completezza e Compattezza in $\mathbb{R}$

Marco Squassina

Anno Accademico 2006/2007

Indice

Capitolo 1

Completezza e compattezza in $\mathbb{R}$

In questo primo capitolo[1] ci occupiamo, nell'ambito dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, di due nozioni molto importanti dell'analisi matematica: la completezza e la compattezza. A questo scopo, il concetto di massimo e minimo limite che vedremo ora, costituisce un'utile strumento.

1 Massimo e minimo limite

(1.1) Definizione *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione e $x \in \overline{E}$. Diciamo che $M \in \overline{\mathbb{R}}$ è* un maggiorante definitivo *per f in x, se esiste un intorno U di x tale che M è un maggiorante per $f(U \cap E)$. Diciamo che $m \in \overline{\mathbb{R}}$ è* un minorante definitivo *per f in x, se esiste un intorno U di x tale che m è un minorante per $f(U \cap E)$.*

$+\infty$ (resp. $-\infty$) è sempre un maggiorante definitivo (resp. un minorante definitivo).

(1.2) Definizione *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{E}$. Poniamo*

$$\limsup_{\xi \to x} f(\xi) := \inf \left\{ M \in \overline{\mathbb{R}} : \ M \text{ è un maggiorante definitivo per } f \text{ in } x \right\} ,$$

$$\liminf_{\xi \to x} f(\xi) := \sup \left\{ m \in \overline{\mathbb{R}} : \ m \text{ è un minorante definitivo per } f \text{ in } x \right\} .$$

La prima quantità si chiama massimo limite *di f in x e si denota anche con i simboli*

$$\max\lim_{\xi \to x} f(\xi) , \qquad \overline{\lim_{\xi \to x}} f(\xi) .$$

La seconda quantità si chiama minimo limite *di f in x e si denota anche con i simboli*

$$\min\lim_{\xi \to x} f(\xi) , \qquad \underline{\lim_{\xi \to x}} f(\xi) .$$

(1.3) Teorema *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{E}$. Allora si ha*

$$\liminf_{\xi \to x} f(\xi) \le \limsup_{\xi \to x} f(\xi) .$$

[1] Questo pamphlet è una rielaborazione di parte delle dispense di Analisi I del Prof. Marco Degiovanni.

Inoltre l'uguaglianza sussiste se e solo se f ammette limite in x, nel qual caso

$$\liminf_{\xi\to x} f(\xi) = \limsup_{\xi\to x} f(\xi) = \lim_{\xi\to x} f(\xi)\,.$$

Dimostrazione. Siano m un minorante definitivo e M un maggiorante definitivo per f in x. Siano U' ed U'' due intorni di x tali che m è un minorante per $f(U'\cap E)$ e M è un maggiorante per $f(U''\cap E)$. Dal momento che $U'\cap U''$ è un intorno di x, esiste $\xi\in(U'\cap U'')\cap E$. Ne segue $m\le f(\xi)\le M$, in particolare $m\le M$. Per il Principio di Dedekind esteso, esiste $z\in\overline{\mathbb{R}}$ tale che $m\le z\le M$ per ogni minorante definitivo m e per ogni maggiorante definitivo M. Ne segue

$$\liminf_{\xi\to x} f(\xi) \le z \le \limsup_{\xi\to x} f(\xi)\,.$$

Supponiamo ora che

$$\lim_{\xi\to x} f(\xi) = \ell\,.$$

Dimostriamo anzitutto che

$$\ell \ge \limsup_{\xi\to x} f(\xi)\,.$$

Se $\ell=+\infty$, l'affermazione è vera. Altrimenti sia $M>\ell$. Dal momento che $[-\infty, M[$ è un intorno di ℓ, esiste un intorno U di x tale che $f(U\cap E)\subseteq[-\infty, M[$. Ne segue che M è un maggiorante definitivo per f in x, per cui $M\ge\limsup\limits_{\xi\to x} f(\xi)$. Per l'arbitrarietà di M si deduce che

$$\ell \ge \limsup_{\xi\to x} f(\xi)\,.$$

In modo simile si prova che $\ell\le\liminf\limits_{\xi\to x} f(\xi)$. Ne segue

$$\liminf_{\xi\to x} f(\xi) \le \limsup_{\xi\to x} f(\xi) \le \lim_{\xi\to x} f(\xi) \le \liminf_{\xi\to x} f(\xi)\,,$$

il che è possibile solo se tutte le disuguaglianze sono uguaglianze.
Viceversa supponiamo che

$$\liminf_{\xi\to x} f(\xi) = \limsup_{\xi\to x} f(\xi)\,.$$

Denotiamo con ℓ il comune valore di massimo e minimo limite. Consideriamo prima il caso $\ell\in\mathbb{R}$. Per ogni intorno V di ℓ esiste $\varepsilon>0$ tale che $]\ell-2\varepsilon,\ell+2\varepsilon[\subseteq V$. Dal momento che $\ell+\varepsilon>\limsup\limits_{\xi\to x} f(\xi)$, risulta che $\ell+\varepsilon$ è un maggiorante definitivo per f in x. Sia U' un intorno di x tale che $f(U'\cap E)\subseteq[-\infty,\ell+\varepsilon]$. In modo simile si trova un intorno U'' di x tale che $f(U''\cap E)\subseteq[\ell-\varepsilon,+\infty]$. Allora $U=U'\cap U''$ è un intorno di x e

$$f(U\cap E)\subseteq[\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon]\subseteq]\ell-2\varepsilon,\ell+2\varepsilon[\subseteq V\,.$$

Consideriamo ora il caso $\ell = -\infty$. Per ogni intorno V di $-\infty$ esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $[-\infty, M+1[\subseteq V$. Poiché $M > \limsup\limits_{\xi\to x} f(\xi)$, si trova come prima un intorno U di x tale che $f(U \cap E) \subseteq [-\infty, M]$. In conclusione, si ha

$$f(U \cap E) \subseteq [-\infty, M] \subseteq [-\infty, M+1[\subseteq V\,.$$

Il caso $\ell = +\infty$ è simile e può essere trattato per esercizio. ■

(1.4) Teorema *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{E}$. Supponiamo che $f(\xi) \leq g(\xi)$ per ogni $\xi \in E$. Allora si ha*

$$\limsup_{\xi\to x} f(\xi) \leq \limsup_{\xi\to x} g(\xi)\,,$$

$$\liminf_{\xi\to x} f(\xi) \leq \liminf_{\xi\to x} g(\xi)\,.$$

Dimostrazione. Evidentemente ogni maggiorante definitivo per g in x è anche un maggiorante definitivo per f in x, ossia si ha

$$\left\{M \in \overline{\mathbb{R}} :\ M \text{ è un maggiorante definitivo per } f \text{ in } x\right\} \supseteq$$

$$\supseteq \left\{M \in \overline{\mathbb{R}} :\ M \text{ è un maggiorante definitivo per } g \text{ in } x\right\}\,.$$

Passando all'estremo inferiore membro a membro, si deduce la prima disuguaglianza. La seconda disuguaglianza può essere dimostrata per esercizio in maniera simile. ■

(1.5) Corollario *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{E}$. Supponiamo che $f(\xi) \leq g(\xi)$ per ogni $\xi \in E$ e che f e g ammettano limite in x. Allora si ha*

$$\lim_{\xi\to x} f(\xi) \leq \lim_{\xi\to x} g(\xi)\,.$$

Dimostrazione. Si tratta di una conseguenza dei due teoremi precedenti. ■

2 Successioni e sottosuccessioni

(2.1) Definizione *Siano (x_n) e (y_n) due successioni in un insieme X. Diciamo che (y_n) è* una sottosuccessione *di (x_n), se esiste una funzione strettamente crescente $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $y_n = x_{\nu(n)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

(2.2) Proposizione *Sia (x_n) una successione in $\overline{\mathbb{R}}$, sia $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ e sia (y_n) una sottosuccessione di (x_n). Supponiamo che*

$$\lim_n x_n = \ell\,.$$

Allora

$$\lim_n y_n = \ell\,.$$

Dimostrazione. Sia $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione strettamente crescente tale che $y_n = x_{\nu(n)}$. Si verifica facilmente per induzione su n che $\nu(n) \geq n$, per cui

$$\lim_{n\to+\infty} \nu(n) = +\infty\,.$$

La tesi discende allora dal Teorema di composizione dei limiti. ■

(2.3) Teorema *Sia (x_n) una successione in $\overline{\mathbb{R}}$. Allora esistono due sottosuccessioni $\left(x_{\nu(n)}\right)$ e $\left(x_{\lambda(n)}\right)$ di (x_n) tali che*

$$\lim_n x_{\nu(n)} = \limsup_n x_n\,,$$
$$\lim_n x_{\lambda(n)} = \liminf_n x_n\,.$$

Dimostrazione. Poniamo

$$\ell = \limsup_n x_n$$

e consideriamo anzitutto il caso $\ell \in \mathbb{R}$. Costruiamo ricorsivamente una funzione $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ponendo

$$\nu(0) = \min\left\{n \in \mathbb{N} :\ \ell - 1 \leq x_n \leq \ell + 1\right\}\,,$$
$$\forall h \in \mathbb{N}: \quad \nu(h+1) = \min\left\{n \in \mathbb{N} :\ n > \nu(h),\ \ell - \frac{1}{h+2} \leq x_n \leq \ell + \frac{1}{h+2}\right\}\,.$$

In effetti, poiché $\ell + 1$ è un maggiorante definitivo per (x_n), esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \leq \ell + 1$ per ogni $n \geq k_0$. Poiché $\ell - 1$ non è un maggiorante definitivo per (x_n), esiste $n_0 \geq k_0$ tale che $x_{n_0} > \ell - 1$. La definizione di $\nu(0)$ è quindi ben posta. Supponiamo ora di aver costruito $\nu(h)$. Poiché $\ell + \frac{1}{h+2}$ è un maggiorante definitivo per (x_n), esiste $k_{h+1} \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \leq \ell + \frac{1}{h+2}$ per ogni $n \geq k_{h+1}$. Poiché $\ell - \frac{1}{h+2}$ non è un maggiorante definitivo per (x_n), esiste

$$n_{h+1} > \max\left\{k_{h+1}, \nu(h)\right\}$$

tale che $x_{n_{h+1}} > \ell - \frac{1}{h+2}$. Pertanto anche la definizione di $\nu(h+1)$ è ben posta. Evidentemente risulta

$$\forall h \in \mathbb{N}:\ \nu(h) < \nu(h+1)\,, \qquad \ell - \frac{1}{h+1} \leq x_{\nu(h)} \leq \ell + \frac{1}{h+1}\,.$$

In particolare ν è strettamente crescente, per cui $\left(x_{\nu(h)}\right)$ è una sottosuccessione di (x_n). Dal Teorema del confronto si deduce che

$$\lim_h x_{\nu(h)} = \ell\,.$$

Consideriamo ora il caso $\ell = +\infty$. Costruiamo ricorsivamente una funzione $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ponendo

$$\nu(0) = \min\{n \in \mathbb{N} : \, x_n \geq 0\} \, ,$$

$$\forall h \in \mathbb{N} : \quad \nu(h+1) = \min\{n \in \mathbb{N} : \, n > \nu(h), \, x_n \geq h+1\} \, .$$

In effetti, poiché 0 non è un maggiorante definitivo per (x_n), esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x_{n_0} \geq 0$. La definizione di $\nu(0)$ è quindi ben posta. Supponiamo ora di aver costruito $\nu(h)$. Poiché $h+1$ non è un maggiorante definitivo per (x_n), esiste $n_{h+1} > \nu(h)$ tale che $x_{n_{h+1}} \geq h+1$. Pertanto anche la definizione di $\nu(h+1)$ è ben posta. Evidentemente risulta

$$\forall h \in \mathbb{N} : \, \nu(h) < \nu(h+1) \, , \qquad x_{\nu(h)} \geq h \, .$$

In particolare ν è strettamente crescente, per cui $\left(x_{\nu(h)}\right)$ è una sottosuccessione di (x_n). Per il Teorema del confronto si ha

$$\lim_h x_{\nu(h)} = +\infty \, .$$

Nel caso $\ell = -\infty$, infine, si ha $x_n \to -\infty$ per $n \to +\infty$, per cui basta porre $\nu(h) = h$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. La dimostrazione riguardante il minimo limite è simile e può essere svolta per esercizio. ■

Il teorema appena dimostrato ha alcune conseguenze di fondamentale importanza.

(2.4) Corollario *Sia (x_n) una successione in $\overline{\mathbb{R}}$. Allora esistono $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ ed una sottosuccessione $\left(x_{\nu(n)}\right)$ tali che*

$$\lim_n x_{\nu(n)} = \ell \, .$$

Dimostrazione. Si tratta di un'ovvia conseguenza del teorema precedente. ■

(2.5) Corollario (Teorema di Bolzano-Weierstrass) *Ogni successione limitata in $\mathbb{R}$ ammette una sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione. Sia (x_n) una successione limitata in $\mathbb{R}$. Per il Corollario (2.4) esiste $\left(x_{\nu(n)}\right)$ con $\lim_n x_{\nu(n)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Poiché

$$-\infty < \inf\{x_n : \, n \in \mathbb{N}\} \leq x_{\nu(n)} \leq \sup\{x_n : \, n \in \mathbb{N}\} < +\infty \, ,$$

risulta $-\infty < \ell < +\infty$. ■

(2.6) Definizione *Sia $K \subset \mathbb{R}$. Diciamo che K è compatto se ogni successione in K ammette una sottosuccessione convergente in K*

(2.7) Teorema *Sia $K \subset \mathbb{R}$. Allora K è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Supponiamo anzitutto che K sia compatto. Sia (x_j) una successione in K che converge ad x_0. A meno di sottosuccessioni (x_j) converge in K, per cui per l'unicità del limite, deve essere $x_0 \in K$. Inoltre K non può essere illimitato, altrimenti si potrebbe costruire una successione

$(y_j) \subset K$ tale che $|y_j| \to +\infty$ per $j \to +\infty$, che non sarebbe quindi convergente. Viceversa, supponiamo che K sia chiuso e limitato e prendiamo una successione $(x_j) \subset K$. Essendo K limitato, (x_j) è limitata. Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione di (x_j) convergente a $x_0 \in \mathbb{R}$. Essendo poi K chiuso, si ha $x_0 \in K$. Pertanto K risulta compatto.■

(2.8) Definizione *Sia (x_n) una successione in $\mathbb{R}$. Diciamo che (x_n) è* di Cauchy*, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che*

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : \ m, n \geq \overline{n} \implies |x_m - x_n| < \varepsilon \,.$$

Sia $X \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che X è completo se ogni successione di Cauchy in X è convergente in X

(2.9) Teorema *$\mathbb{R}$ è completo.*

Dimostrazione. Si deve provare che una successione (x_n) in $\mathbb{R}$ è convergente se e solo se è di Cauchy. Supponiamo che (x_n) sia convergente a $\ell \in \mathbb{R}$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ n \geq \overline{n} \implies |x_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \,.$$

Allora per ogni $m, n \geq \overline{n}$ risulta

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - \ell| + |\ell - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \,.$$

Supponiamo ora che (x_n) sia di Cauchy. Sia $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : \ m, n \geq \tilde{n} \implies |x_m - x_n| < 1 \,.$$

Ne segue

$$\forall n \geq \tilde{n} : \ |x_n| \leq |x_n - x_{\tilde{n}}| + |x_{\tilde{n}}| < 1 + |x_{\tilde{n}}| \,,$$

per cui la successione (x_n) è limitata. Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione $\left(x_{\nu(n)}\right)$ convergente a $\ell \in \mathbb{R}$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : \ m, n \geq \overline{n} \implies |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} \,.$$

Sia $k \in \mathbb{N}$ tale che $\nu(k) \geq \overline{n}$ e $\left|x_{\nu(k)} - \ell\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Allora per ogni $n \geq \overline{n}$ risulta

$$|x_n - \ell| \leq \left|x_n - x_{\nu(k)}\right| + \left|x_{\nu(k)} - \ell\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \,.$$

Pertanto (x_n) è convergente a ℓ.■