ESERCIZI di ALGEBRA LINEARE

Esercizio 1
Al variare di $a \in \mathbb{C}$, si consideri la matrice

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per quali a A_a è diagonalizzabile? Per $a = 0$ si trovi una matrice S invertibile e una matrice D diagonale tale che $SAS^{-1} = D$

Esercizio 2
Dire se le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sono simili.

Esercizio 3
Si consideri la seguente applicazione lineare: $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x + 3y - 2z \\ 2x + 6y - 4z \end{pmatrix}$$

Determinare la matrice A associata a f rispetto alla base canonica su dominio e codominio.

Verificare che l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, dove $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, è una base di $\mathbb{C}^3$.

Dire se A è diagonalizzabile

Esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{C}^3$ tale che la matrice A' di f rispetto a $\mathcal{B}$ su dominio e codominio sia diagonale? Se si, trovare $\mathcal{B}$ e A'.

Esercizio 4
Sia U il sottospazio di $\mathbb{C}^3$ generato dai vettori $\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2i+1 \\ 1 \\ 2i+2 \end{pmatrix}$.

Trovare la matrice della proiezione ortogonale P_U di $\mathbb{C}^4$ su U . Determinare $P_U(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix})$. Determinare $N(P_U)$ e ImP_U.

Esercizio 5
Si consideri il sottospazio $T = < \begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} >$ di $\mathbb{C}^3$. Si calcoli $T^{\perp}$.

Esercizio 6

Si consideri il sottospazio $N(A)$ di $\mathbb{C}^4$, dove $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Si trovi $N(A)^{\perp}$.

Esercizio 7

Si consideri il sottospazio S di $\mathbb{C}^3$ definito da $S = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} | 2x - y + z = 0\}$. Trovare una base ortogonale di S, e completarla a una base ortogonale di $\mathbb{C}^3$.

Esercizio 8

Trovare l'angolo formato dai vettori di $\mathbb{R}^3$ $v = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $u = \begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 9

Si provi che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, dove $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2i \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ è una base ortogonale di $\mathbb{C}^3$ e se ne ricavi una base ortonormale. Dato $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, trovare le coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Esercizio 9

Sia $B_\beta = \begin{pmatrix} 4-\beta & 2-\beta & -2+\beta & 0 \\ -2-\beta & \beta & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Si dica per quali valori di β la matrice B_β è diagonalizzabile.

Esercizio 10

Sia $B_\beta = \begin{pmatrix} 3+\beta & 2 & 0 & 2+2\beta \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\beta & 1 & 0 \\ -1-\beta & -1 & 0 & -2\beta \end{pmatrix}$. Si dica per quali valori di β la matrice B_β è diagonalizzabile.

Esercizio 11

Sia $B_\beta = \begin{pmatrix} 1-\beta & 0 & 1-\beta \\ 1+\beta & 2 & \beta+1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$. Si dica per quali valori di β la matrice B_β è diagonalizzabile. Per $\beta = -1$ trovare una base di $\mathbb{C}^3$ composta da autovettori e trovare una matrice diagonale simile a B_{-1}.

Esercizio 12

Sia $B_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\beta & -\beta \\ -3-\beta & 10-2\beta & 1 & 0\beta \end{pmatrix}$. Si dica per quali valori di β la matrice B_β è diagonalizzabile.