Algebra lineare con elementi di geometria - Modulo avanzato

Prof. M. Spera

Prova scritta del 9/7/2008

(1) Determinare la parabola P tangente in $O:(0,0)$ alla retta $r: x-2y=0$, passante per $P:(1,1)$ e tale che l'asse y sia un diametro. Successivamente si determinino l'asse e il vertice di P, nonché il parametro p, il fuoco e la direttrice.

(2) Nel piano euclideo, in cui sia istituito un riferimento cartesiano Oxy, determinare la trasformazione affine che muti il triangolo ABC in $A'B'C'$, dove $A:(0,0)$, $B:(1,-1)$, $C:(1,2)$, e

$A':(0,0)$, $B':(3,-1)$, $C':(3,2)$.

Scrivere l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ passante per ABC. In che tipo di curva viene trasformata? Si calcoli l'area racchiusa da quest'ultima.

(3) Nello spazio euclideo, in cui sia stabilito un riferimento cartesiano $Oxyz$, siano dati il piano $\pi: x-y+1=0$ e la retta

$r: \begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$. Verificare che $r \parallel \pi$.

Determinare i piani π_1, π_2 del fascio di piani di asse r passanti risp. per $P_1: \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $P_2: \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ (entrambi $\in \pi$). Dette $r_1 := \pi \cap \pi_1$, $r_2 := \pi \cap \pi_2$, verificare che sono parallele, e calcolarne la distanza

Tempo: 1h 45m

Algebra lineare — Prova scritta del 9/7/2008

(1') Sia data la famiglia di matrici

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

a) Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta diagonalizzabile?

b) Dopo aver verificato che per $\alpha = 2$, $A \equiv A_2$ è diagonalizzabile, si determini una base di autovettori di A.

(2') Risolvere il sistema lineare

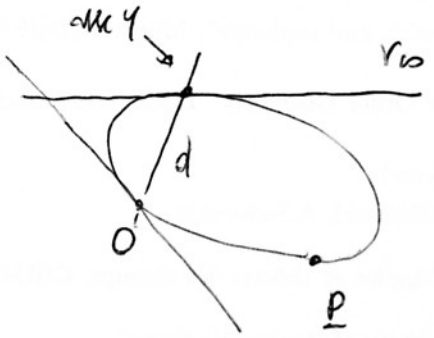
$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x - \alpha y + 1 = 0 \\ x + y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

Tempo totale a disposizione: 2h 30m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

(1) Parabola tangente a $\tau: x-2y=0$ in $O(0,0)$, passante per $P:(1,1)$ e tale che l'asse y sia un diametro.



La direzione dell'asse y $(x=0)$ è $[0,0,1]$

Consideriamo il fascio di coniche bitangenti (forma non omogenea)

$\tau: x_1 - 2x_2 = 0$ (in coord. omogenee)

$$r_\infty \cdot \tau + \lambda d^2 = 0$$

$d: x_1 = 0$ (passa per O)

$$x_0(x_1 - 2x_2) + \lambda x_1^2 = 0$$

passaggio per $P:[1,1,1]$:

$$\underbrace{1-2}_{-1} + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1$$

$$\Rightarrow \quad x_0(x_1 - 2x_2) + x_1^2 = 0$$

$$x_1^2 - 2x_0x_2 + x_0x_1 = 0$$

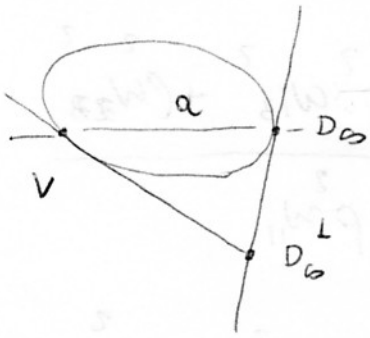
$$\boxed{\begin{array}{c} x^2 - 2y + x = 0 \\ y = \frac{1}{2}x(x+1) \end{array}}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

prendiamo A così:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Determiniamo l'asse e il vertice di $\mathcal{P}$



Sia $D_\infty^\perp$: $[0, 1, 0]$

la direzione $\perp$ D_∞: $[0, 0,$
(è quella dell'asse x...)

l'asse a è la polare di $D_\infty^\perp$

$$(x_0 \ x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_0 \ x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$x_0 + 2x_1 = 0$$

$$1 + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = -\frac{1}{2}}$$

[controllo: deve essere $\parallel$ asse y, ok!]

vertice: $V = a \cap P$

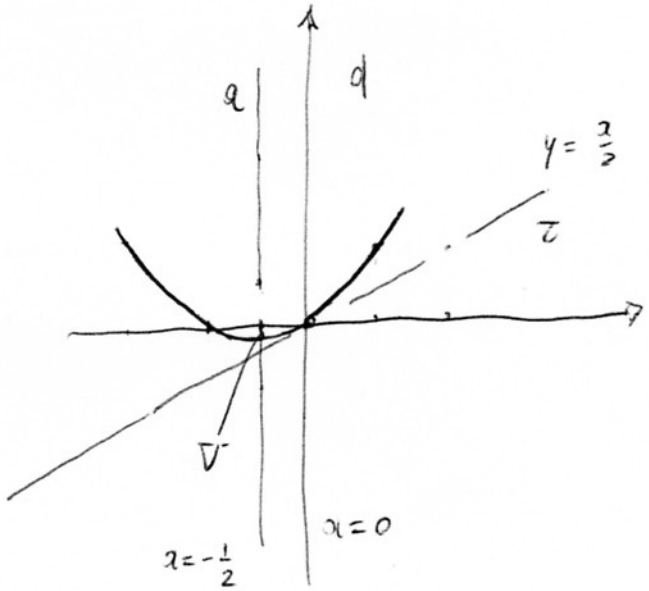
$$\begin{cases} x^2 - 2y + x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad (*)\ y = \frac{1}{2}x(x+1)$$

$$y = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+1\right) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{8}$$

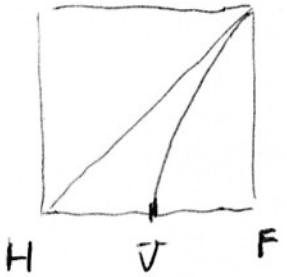
<u>Osservazione</u> il tutto si può accertare, in questo caso, anche per via elementare (utilizzando le tecniche apprese nella scuola secondaria)

$V: \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right)$

$$y = \frac{1}{2}x(x+1)$$



Determiniamo fuoco e direttrice



$$p = \sqrt{-\frac{\Omega}{\gamma^3}}$$

$$\Omega = +(-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 = -8$$

$$\gamma = 2 \qquad p = \sqrt{\frac{+8}{8}} = 1 \qquad \boxed{p = 1}$$

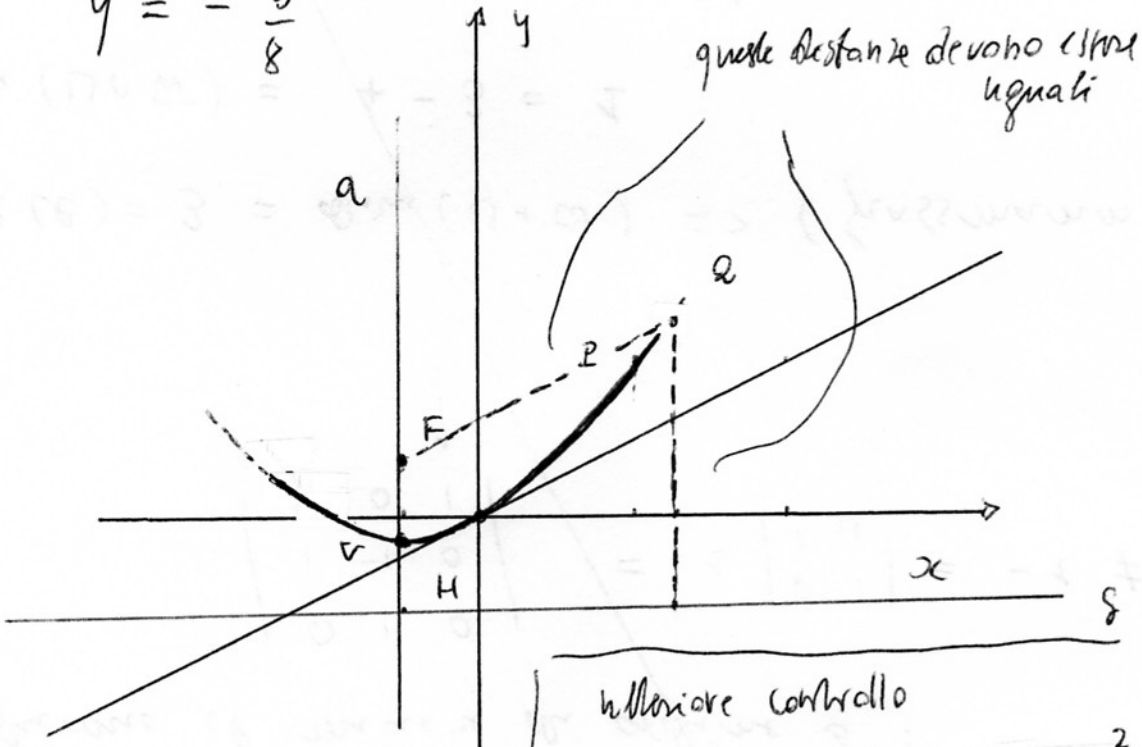
$$d(F,V) = d(V,\delta) = \frac{p}{2} = \frac{1}{2}$$

direttrice

$$\Rightarrow \quad F: \left(-\frac{1}{2}, \underbrace{-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}}_{\frac{-1+4}{8}}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right)$$

$$H: \left(-\frac{1}{2}, \underbrace{-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}}_{\frac{-1-4}{8}}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{8}\right)$$

$$\delta: \quad y = -\frac{5}{8}$$



$$x^2 + x + \frac{\cancel{16+9-25}}{\cancel{64}} = 2y$$

$$y = \frac{1}{2}x(x+1)$$

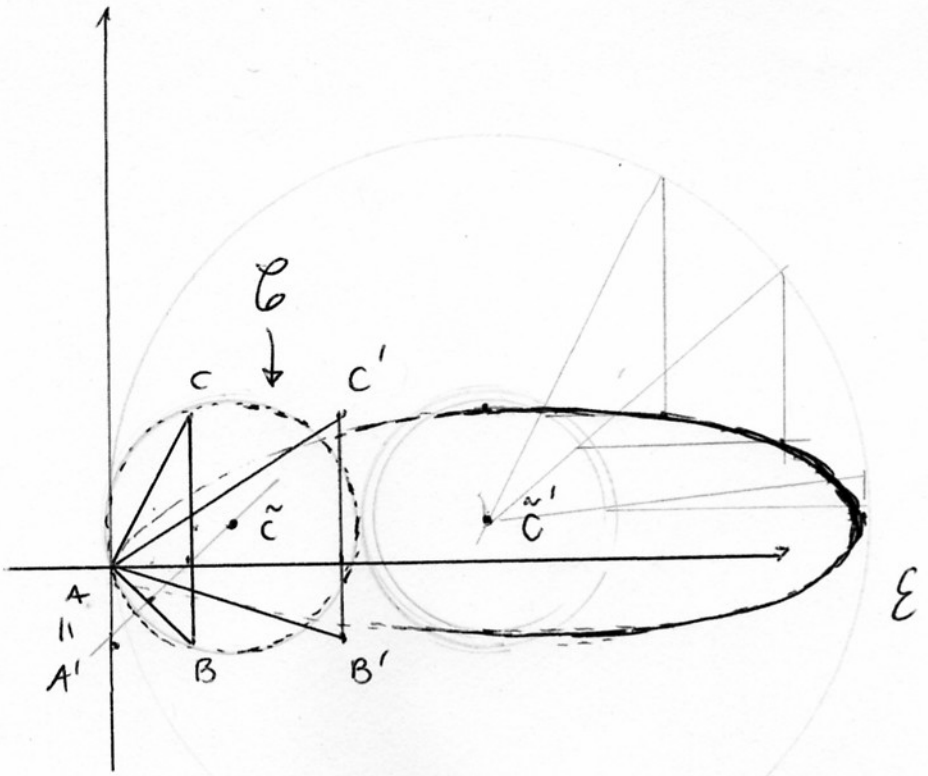
ulteriore controllo

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{8}\right)^2 = \left(y+\frac{5}{8}\right)^2$$

$$d(Q,F)^2 = d(Q,\delta)^2$$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} + \cancel{y^2} - \frac{3}{4}y + \frac{9}{64} = \cancel{y^2} + \frac{5}{4}y + \frac{25}{64}$$

(2)



$$A: \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \longmapsto A': \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$B: \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \longmapsto B': \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$$

$$C: \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \longmapsto C': \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

Lavoriamo in modo "standard"

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ b_1 & a_{11} & a_{12}\\ b_2 & a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ 0 = b_1 \\ 0 = b_2 \end{cases}$$

$$\boxed{b_1 = b_2 = 0}$$

[possiamo semplificare un po']

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$3 = a_{11} - a_{12}$$
$$-1 = a_{21} - a_{22}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$3 = a_{11} + 2a_{12} \longrightarrow \Rightarrow a_{12} = 0$$
$$a_{11} = 3$$
$$2 = a_{21} + 2a_{22}$$

$$-3 = -3a_{22} \Rightarrow a_{22} = 1 \qquad 2 = a_{21} + 2 \Rightarrow a_{21} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b_1 & \\ b_2 & A \end{array}\right),$$

★★★ Si poteva giungere al risultato direttamente: dato che $A \mapsto A' = A$, necessariamente non vi è parte di traslazione: $\underline{b} = 0$ $\underline{x}' = A\underline{x}$. Inoltre, l'asse x e l'asse y sono necessariamente autospazi di A, corrisp. a $\lambda = 3$ e $\lambda = 1$ rispettivamente, da cui l'asserto. □

Determiniamo il cerchio circoscritto ad ABC in modo diretto, dall'eq. generale di una circonferenza

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

imponiamo il passaggio per A, B, C

A: (0,0) $\quad c = 0$

B: (1,-1) $\quad 1 + 1 + a - b = 0 \qquad \boxed{a - b = -2}$

C: (1,2) $\quad 1 + 4 + a + 2b = 0 \qquad \boxed{a + 2b = -5}$

$$\Rightarrow \quad -b - 2b = -2 + 5$$

$$-3b = 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = -1}$$

$$\Rightarrow \quad a = -2 + b = -2 - 1 = -3$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{C}: \boxed{x^2 + y^2 - 3x - y = 0} \qquad a = -3$$

$\tilde{C}: \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad R = d(A, \tilde{C}) = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

(controllo $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$

$x^2 + y^2 - 3x - y + \cancel{\frac{10}{4}} = \frac{5}{2}$ ✓)

★ Altro modo: $\tilde{C}$ è sull'asse di BC $\Rightarrow y_{\tilde{C}} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$

L'asse di AB è la retta $y + \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2}$, e $\tilde{C}$ vi appartiene $\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = x_{\tilde{C}} - \frac{1}{2} \Rightarrow x_{\tilde{C}} = \frac{3}{2}$ ✓

L'area dell'ellisse, trasformata di $\mathcal{C}$, è

$$A_{\mathcal{E}} = \underbrace{\det A}_{3} \cdot \underbrace{A_{\mathcal{C}}}_{\pi R^2} = 3\pi \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{2}\pi$$

Determiniamo l'eq. esplicita:

Da $\begin{cases} x' = 3x \\ y' = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{x'}{3} \\ y = y' \end{cases}$

troviamo subito

$$\left(\frac{x'}{3} - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y' - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

$$\left(\frac{2x' - 9}{6}\right)^2 + \left(\frac{2y' - 1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

$$\frac{(2x' - 9)^2}{6^2} + \frac{(2y' - 1)^2}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{\cancel{4}\left(x' - \frac{9}{2}\right)^2}{\cancel{6^2}\ 9} + \frac{\cancel{4}\left(y' - \frac{1}{2}\right)^2}{\cancel{4}} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{\left(x' - \frac{9}{2}\right)^2}{9 \cdot \frac{5}{2}} + \frac{\left(y' - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{5}{2}} = 1$$

$a = 3\sqrt{\frac{5}{2}}$

$b = \sqrt{\frac{5}{2}}$

$\Rightarrow$ (controllo) $A_{\mathcal{E}} = \pi ab = 3\frac{5}{2} \cdot \pi = \frac{15}{2}\pi$

Dunque $\mathcal{E}$:

$$\frac{\left(x - \frac{9}{2}\right)^2}{\left(3\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2} + \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2} = 1$$

Si poteva arrivare subito notando che $\tilde{c} \to \tilde{c}'$, centro dell'ellisse e che le distanze nella direzione x sono alterate di un fattore 3, mentre quelle nella direzione y rimangono inalterate.

③

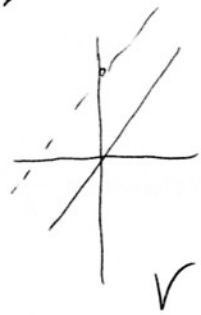
retta r: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 + t \\ z = 0 + t \end{cases}$ $\quad \underline{r} = \underline{r_0} + t\,\underline{a}$

$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$

piano π $\quad x - y + 1 = 0$

verifichiamo che $r \parallel \pi$

tramite la condizione $\boxed{al + bm + cn = 0}$



si ha

$1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 1 - 1 = 0$ ✓

fascio di piani di asse r:

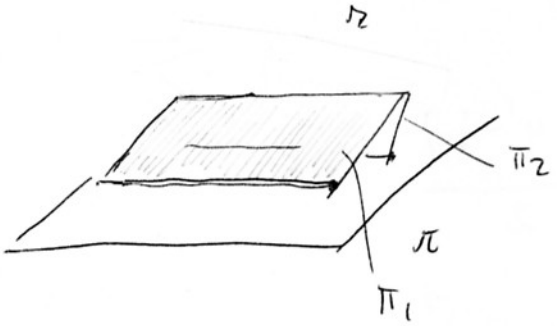
$t = x - 1$

$y = x - 1 = z$

ad esempio $r = \begin{cases} x - 1 = y \\ y = z \end{cases}$

$\Rightarrow \quad \lambda(x - y - 1) + \mu(y - z) = 0$ $\quad \mathcal{F}$

passo per $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \pi$



$\lambda(1 - 2 - 1) + \mu(2 - 0) = 0$

$-\cancel{2}\lambda + \cancel{2}\mu = 0$

poniamo $\lambda = 1 \Rightarrow \mu = 1$

$\pi_1: \; x - y - 1 + y - z = 0$

$\Rightarrow \boxed{\pi_1: \; x - z - 1 = 0}$

π_2 piano di $\mathcal{F}$ per P_2: $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \in \pi$

$$\lambda(1-2-1) + \mu(2-1) = 0$$

$$-2\lambda + \mu = 0$$

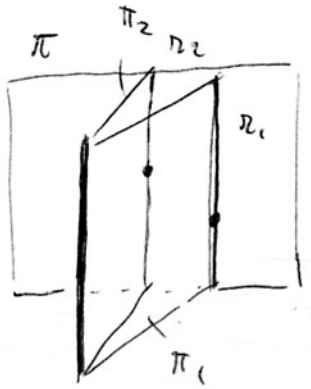
se $\lambda \equiv 1$, $\mu = 2$

$$\pi_2: \quad x - y - 1 + 2(y - z) = 0$$

$$x - y - 1 + 2y - 2z = 0$$

$$\boxed{\pi_2: \quad x + y - 2z - 1 = 0}$$

le rette $r_1 : \pi_1 \cap \pi$ e $r_2 : \pi_2 \cap \pi$ risultano parallele:



$$r_1: \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$r_2: \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

esse sono complanari e non hanno più un comune ciò è ovvio geometricamente ma controlliamo

controllo
$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \\ x + y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

$\det A = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ma $\left|\begin{matrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right| = 2 \cdot (-1) = -2 \neq 0$ $\Rightarrow$ incompatibile!

Calcoliamo la distanza tra r_1 e r_2

Prendiamo il piano per P_1 $\perp$ r_1 (1 all'asse del fascio):

$$\tilde{\pi}_1: \quad (x-1)+(y-2)+z=0$$

$$x+y+z-3=0$$

intersechiamo con r_2

$$\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ x-y+1=0 \\ x+y-2z-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z-3+2z+1=0 \\ x-y+1=0 \\ x+y-2z-1=0 \end{cases} \qquad 3z=2 \qquad z=\frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} x-y=-1 \\ x+y=+1+2z=+1+\frac{4}{3}=\frac{7}{3} \end{cases}$$

$$2x=-1+\frac{7}{3}=\frac{4}{3} \qquad x=\frac{2}{3}$$

$$y=x+1=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \tilde{P}_2: \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(controllo $\tilde{P}_2 \in \pi_2$?

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{3}-2\cdot\frac{2}{3}-1=\frac{7-4-3}{3}=0 \ \checkmark$$

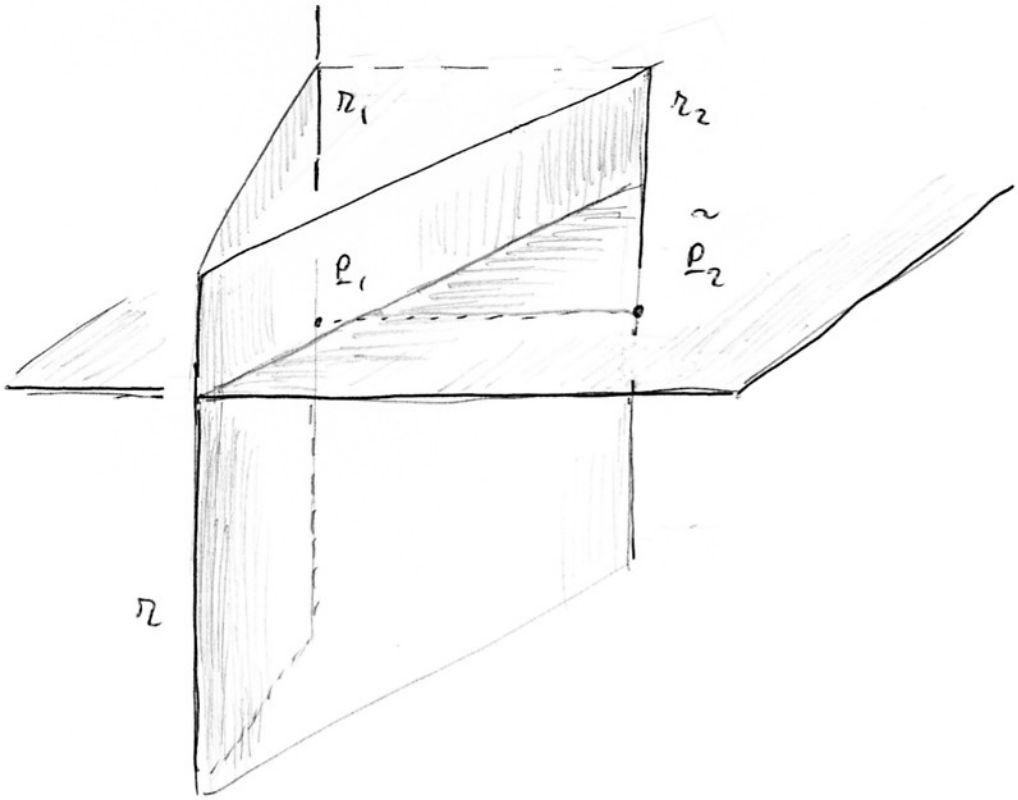
dunque

$$\tilde{P}_2 : \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

basta allora calcolare $P_1 \tilde{P}_2 =$

$$= \sqrt{\Big(\underbrace{1-\frac{2}{3}}_{\frac{1}{3}}\Big)^2 + \Big(\underbrace{2-\frac{5}{3}}_{\frac{1}{3}}\Big)^2 + \Big(-\frac{2}{3}\Big)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$



Algebra lineare 9/7/2008

(1')

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Per quali valori risulta diagonalizzabile?

gli autovalori sono $1, 2, \alpha$ [è triang. superiore..]

se $\alpha \neq 1$, $\alpha \neq 2$, è certamente diagonalizzabile.

se $\alpha = 1$ è $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

calcoliamo $r(A_1 - 1 \cdot I)$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$r(A_1) = 2$

$\Rightarrow r(A_1) = 3 - 2 = 1$

$\Rightarrow m_g(1) = 1 < 2 = m_a(1)$

$\Rightarrow$ non è diag.

sia $\alpha = 2$

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $A_2 - 2I$

$$r\left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = 1$$

$\Rightarrow m_g(A_2) = 2 = m_g(A_2) \Rightarrow A_2$ è diag..

In definitiva, A_α è diagonal. per $\alpha \neq 1$.

autospazi per $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$V_1^{A_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$ chiaro ..

$V_2^{A_2}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + z = 0 \\ 0 \neq 0 \\ 0 \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = z \\ y = y \end{matrix}$$

$\Rightarrow$

$$V_2^{2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

2'

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x - \alpha y + 1 = 0 \\ x + y - 2z - 1 = 0 \end{cases} \quad (-1)$$

per quali valori di α è risolubile?

$$z - 3 + 2z + 1 = 0 \Rightarrow 3z = 2$$

$$z = \frac{2}{3}$$

rimane da risolvere

$$\begin{cases} x + y + \overbrace{\frac{2}{3} - 3}^{-\frac{7}{2}} = 0 \\ x - \alpha y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = \frac{7}{2} \\ x - \alpha y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\alpha \end{vmatrix} = -\alpha - 1 = 0$$

se $\alpha = -1$

se $\alpha \neq -1$ il sistema è risolubile,

se $\alpha = -1$ la matrice è $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, di rango 1

ma $r((A|b)) =$

$$r\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{7}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

$\Rightarrow$ il sistema è incompatibile.

Dunque, se $\alpha \neq -1$, si ha (Cramer)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \frac{7}{2} & 1 \\ -1 & -\alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\alpha \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{7}{2}\alpha + 1}{-\alpha - 1} = \frac{7\alpha - 2}{2(\alpha+1)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{7}{2} \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{-(\alpha+1)} = \frac{-1 - \frac{7}{2}}{-(\alpha+1)} = \frac{\frac{9}{2}}{\alpha+1}$$

$$= \frac{9}{2(\alpha+1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7\alpha - 2}{2(\alpha+1)} \\ y = \dfrac{9}{2(\alpha+1)} \\ z = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$