Corso di MATEMATICA di BASE

DISEQUAZIONI E FUNZIONI

A. Disequazioni esponenziali

1. $3^{1-x^2} > \frac{1}{27}$ *Soluzione:* $(-2,2)$
2. $2^{x-1} \geq 5$ *Soluzione:* $[1+\log_2 5, +\infty)$
3. $3^x - 5^{x-1} > 0$ *Soluzione:* $(-\infty, \frac{\ln 5}{\ln 5 - \ln 3})$
4. $3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3 > 0$ *Soluzione:* $(1, +\infty)$
5. $\frac{1+2^{-x}}{1+2^x} \geq \frac{1}{2}$ *Soluzione:* $(-\infty, 1]$

B. Disequazioni logaritmiche

1. $\log_2(x-1) \leq 2$ *Soluzione:* $(1,5]$
2. $\log_3(x^2-1) \geq \log_3(x-2)$ *Soluzione:* $(2,+\infty)$
3. $\log_3(1+\log_2(1+x)) > 1$ *Soluzione:* $(3,+\infty)$
4. $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) > 1$ *Soluzione:* $(\sqrt{3}, +\infty)$
5. $\log_2^2 x + 3\log_2 x + 2 \geq 0$ *Soluzione:* $(0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$

C. Invertibilità

Attraverso la rappresentazione grafica, stabilire se le seguenti funzioni sono invertibili e, in caso affermativo, scrivere l'espressione della funzione inversa:

1. $f(x) = x - x^2$ *Risposta:* No
2. $f(x) = 1 - \log_2(x-1)$ *Risposta:* $f^{-1}(y) = 1 + 2^{1-y}$
3. $f(x) = \begin{cases} x-1 & , \quad x \leq 1 \\ \ln x & , \quad x > 1 \end{cases}$ *Risposta:* $f^{-1}(y) = \begin{cases} y+1 & , \quad y \leq 0 \\ e^y & , \quad y > 0 \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x \leq 0 \\ x^2 & , \quad x > 0 \end{cases}$ *Risposta:* $f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y} & , \quad y \leq 0 \\ \sqrt{y} & , \quad y > 0 \end{cases}$
5. $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & , \quad x \leq 0 \\ -x^2 & , \quad x > 0 \end{cases}$ *Risposta:* $f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{-y} & , \quad y < 0 \\ -\log_2 y & , \quad y \geq 1 \end{cases}$
6. $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & , \quad x \leq 1 \\ (x-1)^2 & , \quad x > 1 \end{cases}$ *Risposta:* No

D. Composizione di funzioni

Date f e g, costruire $f \circ g$ e $g \circ f$, indicandone l'insieme di definizione.

1. $f(x) = x^2 - x - 1$, $g(x) = \sqrt{x}$
Risposta: $f(g(x)) = x - \sqrt{x} - 1,\ x \geq 0;\ g(f(x)) = \sqrt{x^2 - x - 1},\ x \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee\ x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

2. $f(x) = \frac{x+1}{x}$, $g(x) = 2^x$
Risposta: $f(g(x)) = \frac{2^x+1}{2^x},\ x \in \mathbb{R};\ g(f(x)) = 2^{(x+1)/x},\ x \neq 0$

3. $f(x) = |x+1|$, $g(x) = \ln x$
Risposta: $f(g(x)) = |\ln x + 1|,\ x > 0;\ g(f(x)) = \ln|x+1|,\ x \neq -1$

4. $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = \begin{cases} \ln x & , & x > 0 \\ -x & , & x \leq 0 \end{cases}$
Risposta: $f(g(x)) = \begin{cases} \ln^2 x - \ln x & , & x > 0 \\ x^2 + x & , & x \leq 0 \end{cases}$, $g(f(x)) = \begin{cases} \ln(x^2 - x) & , & x < 0, x > 1 \\ x - x^2 & , & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} x & , & x \leq 0 \\ 1 - x & , & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = \ln x$
Risposta: $f(g(x)) = \begin{cases} \ln x & , & 0 < x \leq 1 \\ 1 - \ln x & , & x > 1 \end{cases}$, $g(f(x)) = \ln(1-x), 0 < x < 1$