Esercizi di geometria proiettiva: fasci di coniche e polarità

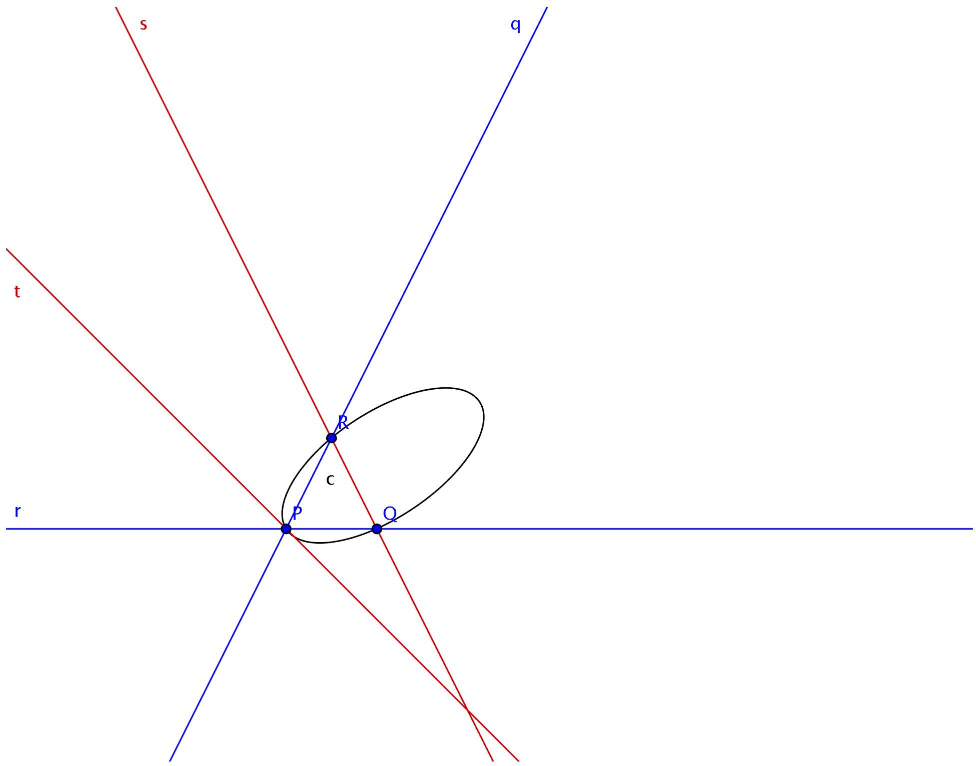
Nicola Sansonetto*

25 febbraio 2009

Esercizio 1. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si consideri il fascio $\mathcal{F}$ di coniche tangenti in $P:(1,-1,-1)$ alla retta $t:\ 2x_0+x_1+x_2=0$ e passante per i punti $R:(1,01)$ e $Q:(1,1,-1)$.

1. Determinare l'equazione generale del fascio $\mathcal{F}$ e determinare le coniche degenri di $\mathcal{F}$.
2. Sul piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ complementare di $x_0=0$ clasificare le coniche del fascio.

Sol. 1. Dobbiamo scrivere l'equazione di un fascio $\mathcal{F}$ di coniche passanti per tre punti e tangenti ad una retta data in uno di questi punti. Il fascio è quindi generato dalle sue coniche degeneri $\mathcal{C}_1=ts$ e $\mathcal{C}_2=rq$, in cui s è la retta per RQ, r la retta per PQ e q la retta per PR.



$$s:\ x_0-2x_1-x_2=0$$
$$r:\ x_0+2x_1-x_2$$
$$q:\ x_0+x_2=0$$

Quindi l'equazione generale del fascio è

$$\mathcal{F}:\ \lambda(2x_0+x_1+x_2)(x_0-2x_1-x_2)+\mu(x_2+2x_1-x_2)(x_0+x_2)=0$$

*Dipartimento di Informatica Università degli Studi di Verona, Ca' Vignal 2, Strada le Grazie 14, 37134 Verona. Tel. +390458027908; e-mail: nicola.sansonetto@univr.it

che si riscrive

$$\mathcal{F}:\ (2\lambda+\mu)x_0^2 - 2\lambda x_1^2 - (\lambda+\mu)x_2^2 + (2\mu-3\lambda)x_0x_1 - \lambda x_0x_2 + (2\mu-3\lambda)x_1x_2 = 0$$

Come già detto in precedenza le coniche degenri del fascio sono solo $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$.

2. Per classificare affinemente le coniche non–degeneri del fascio andiamo a studiare il segno del determinante del minore $A_{00}(\lambda,\mu)$ al variare di λ e μ, in cui $A(\lambda,\mu)$ è la matrice associata alla conica:

$$A(\lambda,\mu) = \begin{bmatrix} 2\lambda+\mu & \frac{2\mu-3\lambda}{2} & -\frac{\lambda}{2} \\ \frac{2\mu-3\lambda}{2} & -2\lambda & \frac{2\mu-3\lambda}{2} \\ -\frac{\lambda}{2} & \frac{2\mu-3\lambda}{2} & -\lambda-\mu \end{bmatrix}$$

Ora

$$A_{00}(\lambda,\mu) = \begin{bmatrix} -2\lambda & \frac{2\mu-3\lambda}{2} \\ \frac{2\mu-3\lambda}{2} & -\lambda-\mu \end{bmatrix}$$

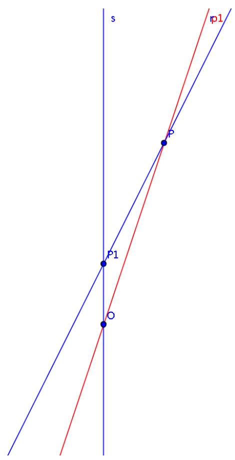
Sappiamo che se $\lambda = 0$ e $\mu \neq 0$ o viceversa si ottiene una delle coniche degeneri $\mathcal{C}_1$ o $\mathcal{C}_2$, rispettivamente, quindi possiamo assumere ad esempio $\lambda \neq 0$. Per semplicità assumiamo $\lambda = 2$ per cui $\det(A_{00}(\lambda,\mu)) = -(\mu^2 - 10\mu + 1)$. Quindi

$$\det A_{00}(\lambda,\mu) = \begin{cases} > 0 \text{ se } x \in \left]\frac{5-2\sqrt{6}}{2}, \frac{5+2\sqrt{6}}{2}\right[\to \textbf{ellisse} \\ = 0 \text{ se } x = \frac{5-2\sqrt{6}}{2} \text{ opp } x = \frac{5+2\sqrt{6}}{2}, \to \textbf{parabola} \\ < 0 \text{ se } x \in \left]-\infty, \frac{5-2\sqrt{6}}{2}\right[\text{ opp } x \in \left]\frac{5+2\sqrt{6}}{2}, +\infty\right[\to \textbf{iperbole} \end{cases}$$

Esercizio 2. 1. Nel piano euclideo $\mathbb{E}^2$ determinare la conica $\mathcal{C}$ che:

- passi per $O : (0,0)$ e $P : (1,3)$;
- la polare di $P_1 : (0,1)$ sia $p_1 : y - 3x = 0$;
- $\mathcal{C}$ sia una parabola.

Sol. 1. Si osservi che O e P sono punti della retta p_1, per cui possiamo scrivere un fascio di coniche bitangenti in O e P[1] e poi imporremo la condizione che la conica sia una parabola. Il fascio è quindi generato dalle coniche degeneri $\mathcal{C}_1 = (P_1P)(OP)$ e $\mathcal{C}_2 = p_1^2$. L'equazione generale del fascio è quindi $\mathcal{F} :\ (y - 2x - 1)x + \lambda(y - 3x)^2 = 0$, in cui $P_1P :\ y - 2x - 1 = 0$ e $OP_1 :\ x = 0$. Imponiamo ora che la conica sia una parabola, cioè che il minore A_{00} della matrice associata alla conica abbia determinante nullo, ossia $\det A_{00} = (9\lambda - 2)\lambda - \frac{(1-6\lambda)^2}{4}$ e $detA_{00} = 0$ se e solo se $\lambda = \frac{1}{4}$. Da cui l'equazione della parabola è $\mathcal{P} :\ x^2 + y^2 - 3xy - 4x = 0$.



Esercizio 3. Si consideri il piano affine reale $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ ampliato proiettivamente.

1. Determinare la conica $\mathcal{C}$ tale che $P : (2,1)$ sia polo di $p :\ x + y = 0$ e passi per $P_1 : (-2,2)$, $P_2 : (1,-1)$ e $Q : (1,1)$.
2. Determinare il tipo affine di conica.
3. Determinare il polo R' di $r' = PQ$.
4. Determinare il polo R'' di $r'' = R'P$.
5. Cosa si può dire del triangolo $PR'R''$?

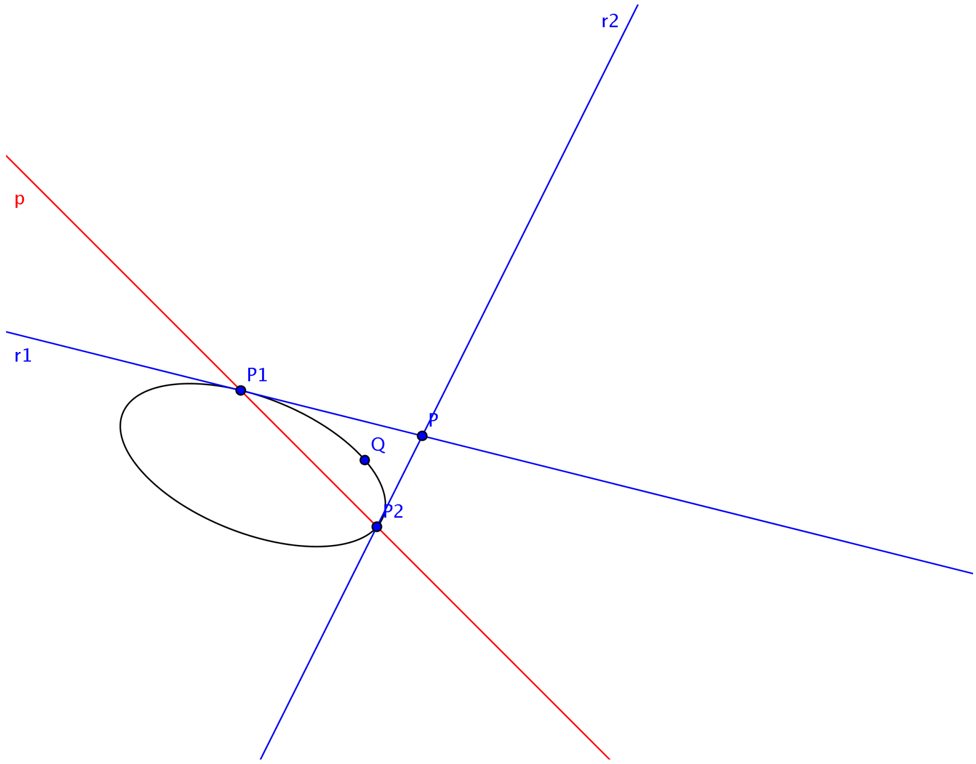
Sol. 1. Osserviamo che i punti P_1 e P_2 appartengono alla retta p, polare del punto P, quindi scriviamo l'equazione del fascio di coniche bitangenti $\mathcal{F} :\ r_1r_2 + \kappa p^2$ in cui $r_1 = PP_1 :$ $4y + x - 6 = 0$ e $r_2 = PP_2 :\ 2x - y - 3 = 0$, quindi

$$\mathcal{F} :\ (4y + x - 6)(2x - y - 3) + \kappa(x + y)^2 = 0$$

Imponiamo ora il passaggio per Q ottenendo $\lambda = -\frac{1}{2}$ da cui la conica cercata ha equazione

$$\mathcal{C} :\ x^2 - 3y^2 + 4xy - 10x - 4y + 12 = 0$$

[1]Si ricordi che la polare di un punto ad una coniche interseca la conica in due punti che sono i punti in cui le rette condotte dal polo sono tangenti la conica.



La matrice associata alla conica è

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -32 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

La conica $\mathcal{C}$ è quindi un'iperole dal mometo che $\det A_{00} < 0$.

2. Per determinare di che tipo di conica si tratta scriviamo la matrice associata alla conica

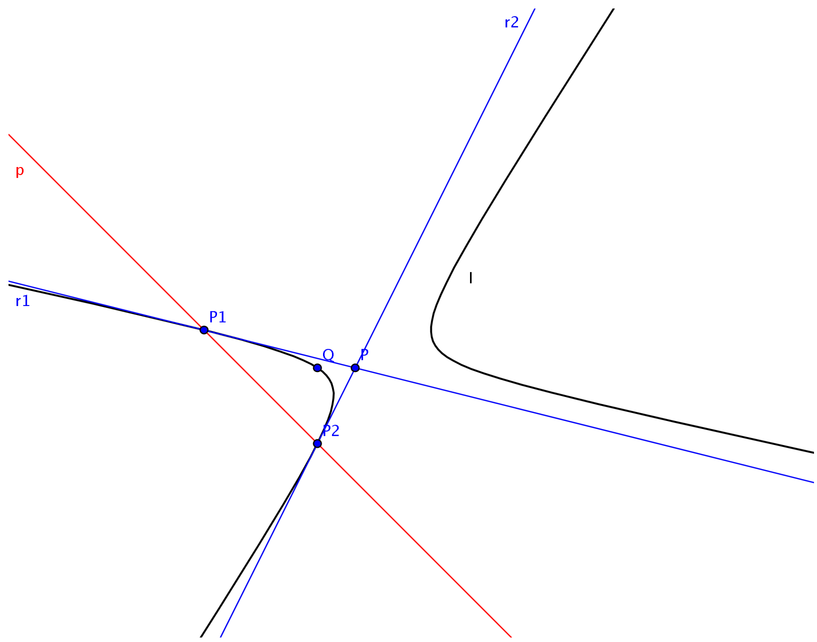
$$A = \begin{bmatrix} 12 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -32 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Quindi $\mathcal{C}$ è un'iperbole dal mometo che $\det A_{00} < 0$.

3. Per determinare R' applichiamo il principio di reciprocità. Se τ_Q è la tangente a $\mathcal{C}$ in Q il punto R' sarà data dall'intersezione $\tau_Q \cap p$. Ora passando per lo spazio ampliato proiettivamente si ottiene $\tau_Q : X_Q^T AX = 2x_1 + 3x_2 - 5x_0 = 0$ o in coordinate affini $2x + 3y - 5 = 0$ e quindi $R' : (-5, 5)$.

4. Analogamente al punto precedente $R'' = r' \cap p$. Ora $r' : y = 1$ e quindi $R'' : (-1, 1)$.

5. Il triangolo $PR'R''$ è *autopolare*.



Esercizio 4. Nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si consideri il fascio ddi coniche $\mathcal{F}$

$$4\lambda x_0^2 + (3\lambda + \mu)x_1^2 - (\lambda + \mu)x_2^2 - 2(5\lambda + 2\mu)x_0 x_1 + 4(\lambda + \mu)x_0 x_2 = 0$$

1. Determinare le coniche degeneri, i punti e le tangenti comuni alle coniche del fascio $\mathcal{F}$.
2. Nell'usuale piano affine reale $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ associato a $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ determinare i cerchi e le parabole del fascio $\mathcal{F}$.
3. Classificare affinemente le coniche di $\mathcal{F}$ e descrivere il luogo dei centri delle coniche a centro del fascio.
4. Determinare, se esistono, i punti di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ che hanno la stessa polare per tutte le coniche non degeneri di $\mathcal{F}$.
5. Fissati un punto P e una retta r di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, è vero che esiste sempre una conica di $\mathcal{F}$ che ha r come polare di P? Giustificare la riposta.