

# ESERCIZI

ELEMENTI DI  
TEOMETRIA  
a.a. 2003/04  
Prof. M. Spina

## III

Geometria  
Ingegneria Gestionale  
Prova scritta del 10 luglio 2001



Geometria 10 luglio 2001

bisX (A)

$$\text{E1} \quad \text{Def. } T \in \text{End}(\mathbb{R}^3) \quad (e = (e_1, e_2, e_3))$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tale che:

$$L \in \sigma(T) \quad \Rightarrow \quad v_L^T = \langle v_L, \cdot \rangle$$

e infine  $T v_3 = (v_1)$ .  
(Suggerito: Si lavori con un'opportuna base  $b = \{ \dots, \dots, \dots \}$ ). Con  $V_X^T$  si denota l'autospazio corrispondente all'autovettore  $\lambda$  di  $T$ .

ii) Dimostrare che tali  $T$  hanno tutti lo stesso polinomio caratteristico  $p_T^*(\lambda) = \lambda^2(1-\lambda)$ .

iii) Determinare i  $T$  diagonalizzabili e le relative matrici  $mat(T)$ .

iv) Dimostrare che tra questi ultimi ve ne è solo uno simmetrico, di cui si chiede inoltre di determinare una base ortonormale diagonalizzante.

E2. Nella piana euclidea reale  $\mathbb{E}^2$  in cui sia fissato un riferimento cartesiano (e ampliato proietivamente) determinare la conica  $C$  tale che:

i)  $C$  abbia centro in  $O : [1, 0, 0]$

ii)  $C$  passi per  $P_1 : [0, 1, 2]$  e  $P_2 : [0, 1, 1]$  e sia tangente alla retta  $r : x + y + 1 = 0$ .

iii) Si determini la forma canonica metrica o gli assi di  $C$ .

Tr. i) Sia dato  $T \in Hom(V, W)$ . Date la definizione di nucleo e Immagine di  $T$ , verificando che essi sono subspazi vettoriali di  $V$  e  $W$ .

ii) Dimostrare che  $T \in End(V)$  è iniettivo se e solo se è suriettivo.

iii) Cosa si intende col dire che  $T \in Hom(V, W)$  è un isomorfismo?

iv) Date la definizione di isomorfismo di spazi vettoriali.

v) Dimostrare che la dimensione è un invarianti completo per isomorfismi (si lavori in dimensione finita).

T2. i) Date la definizione di forma bilineare simmetrica su uno spazio vettoriale (di dimensione finita) e definire la notione di ortogonalità rispetto a tale forma.

ii) Date la definizione di vettore isotropo.

iii) Date la definizione di congruenza per matrici simmetriche, e collegarla alle forme bilineari simmetriche.

iv) Enunciare e dimostrare il teorema di diagonalizzazione per forme bilineari simmetriche in genere e interpretarlo in termini di congruenza.

v) Quali invarianti complessi per congruenza si hanno nel caso reale o nel caso complesso, rispettivamente?

vi) Si giustifichi la risposta nel primo caso.

F. (Facoltativo): se no tiene conto solo nel caso in cui l'esaminando abbia risposto interamente ai quesiti precedenti).

Determinare l'immagine prospettica della circonferenza sul geodetrale rappresentata in figura (v. rifer.).

Il centro della circonferenza è invitato nel centro dell'ellisse? Spiegare.  
N.B. Sono stati tracciate linea e figura ausiliarie per facilitare la costruzione e la risposta alla domanda precedente.

Tempo a disposizione 2h:30m.  
Lo risposto vorrei adognitivamente giustificato

$$M \in \mathbb{C}^{(T, -\lambda I)} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & a & c \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & b & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$det(M) = P_C^T(\lambda) = \lambda^2(1-\lambda) \quad (169)$$

(159)

$$\Rightarrow 0 \in \sigma(T) \quad m_g(0) = ?$$

$$m_n(0) = 2$$

per la diag. bisogna imporre  $m_g(0) = 2$

$$\text{dunque } p(T) = p(T - 0 \cdot I) = 1$$

$$\boxed{b=0}$$

$$m_{g'}(T) = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1 \mapsto v_1$$

$$\begin{aligned} T &\cdot e_2 \mapsto a v_1 \\ e_3 &\mapsto c v_1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & a \\ c & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & a \\ c & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & a \\ c & 0 & c \end{pmatrix}$$

-2-

Siamo dunque:

$$a = 0 \quad 1 - c = c \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$m_{g'}(T) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

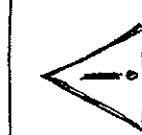
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

base orto diag.

Q.s. Ker T

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x + z = 0$$



$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = -x \end{cases}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2$$

Più ovvio nel testo  
Sia scritto  $\text{Im } T = \langle v_1, e_3 \rangle$  (\*)

In questo caso, la combinazione di diag. portava a  
 $\text{Im } T = \langle v_1 \rangle$ , incompatibile con (\*) .

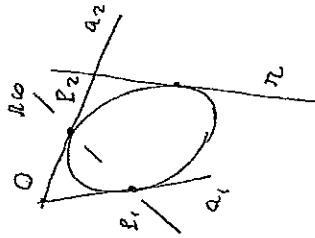
D' ex. è OK se  $\text{Im } T \subseteq \langle v_1, e_3 \rangle$  .

$\text{Im } T$  così non si è tenuto conto di ciò  
ne scade la validità anche qui, si è dunque il cotesto -2-

(162)

E2) Determinare le due clse

- i) Le altre classi in  $O = \{0, 0\}$
- ii) passi per  $P_1 = [0, 1, 2]$ ,  $P_2 = [0, 1, 1]$
- iii) Sia tangente a  $\pi$ :  $x + y + 1 = 0$
- iv) Si determina la seconda condizione testifica e gli altri due G



Sol.

Si è un'ipotetica - si cerca di evitare

$$\begin{aligned} a_1: y &= 2x \quad \text{dunque } P_1 = [0, 1, 2] \\ a_2: y &= x \quad \Rightarrow \quad P_2 = [0, 1, 1] \end{aligned}$$

una soluzione al fascio (in forma con congrua)

$$\begin{aligned} (x_2 - 2x_1)(x_2 - x_1) + \lambda x_0^2 &= 0 \\ \text{e.t.} \quad (y - 2x)(y - x) + \lambda &= 0 \end{aligned}$$

Per determinare  $\lambda$  imponiamo che  
 $\theta_1 \cap \pi$  sia doppia:

$$\begin{aligned} \pi: \quad x + y + 1 &= 0 \quad y = -x - 1 \\ (-x - 1 - 2x)(-x - x - 1) + \lambda &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-3x - 1)(-2x - 1) + \lambda &= 0 \\ (3x + 1)(2x + 1) + \lambda &= 0 \end{aligned}$$

$$6x^2 + 5x + (\lambda + 1) = 0$$

$$\Delta = 0$$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 0 \\ 25 - 24(1 + \lambda) &= 0 \\ 25 - 24 - 24\lambda &= 0 \end{aligned}$$

disponibile:

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{12} \quad y = -x - 1 = \frac{5}{12} - 1 = -\frac{7}{12} \\ \text{d'equazione} \quad \lambda & \quad \left( -\frac{5}{12}, -\frac{7}{12} \right) \end{aligned}$$

$$(y - 2x)(cy - x) + \frac{1}{24} = 0$$

$$\begin{aligned} 24(cy - 2x)(y - x) + 1 &= 0 \\ 24(cy^2 + 2x^2 - 2xy - xy) + 1 &= 0 \quad 24(2x^2 + y^2 - 3xy) + 1 = 0 \\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 48 & -36 \\ 0 & -36 & 24 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Equazioni degli altri (ortogonali dei diametri conicsali)

$$(-m, \ell) \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell \\ m \end{pmatrix} = 0$$

$$(-m, \ell) \begin{pmatrix} 4\ell & -3m \\ -3\ell & 2m \end{pmatrix} = 0$$

Poniamo  $\ell = r \dots$

$$(-m, r) \begin{pmatrix} 4 - 3m \\ -3 + 2m \end{pmatrix} = 0$$

$$-mr(4 - 3m) - 3 + 2m = 0$$

$$-4mr + 3m^2 - 3 + 2m = 0$$

$$3m^2 - 2m - 3 = 0$$

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 9}}{3} = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}$$

soluz:  
 $m_+ = m_+ \times \text{mon. incognita I}$   
 $(m_+ - 3)(m_+ - 1) = 0$   
 $m_+ < 0$   
 $m_- = 3m_- + 2 \times \frac{1}{3} = 0$   
 $m_- > 0$   
 impossibile!

-6- (165)

forma canonica matrica

$$\begin{aligned} \Omega &= \det A = \frac{48 \cdot 24 - 36^2}{12^2} = \\ &= 12^2(8 - 9) = -144 \\ &\quad (= -12^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{00} &= -144 = 0 \\ \gamma &= 48 + 24 = 72 = 12 \cdot 6 \end{aligned}$$

$$t^2 + \frac{\Omega_{00} y}{a} t + \frac{\Omega_{00}^3}{a^2} = 0$$

$$t^2 + (12 \cdot 6)t + (-12^2) = 0$$

$$t = -12 \cdot \frac{3}{2} \pm \sqrt{12^2 \cdot 3^2 + 12^2}$$

$$= -12 \cdot 3 \pm 12 \sqrt{10}$$

$$\begin{aligned} &\approx -12 \left( 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \right)^2 = -\frac{1}{6} \\ \Rightarrow q &= \frac{1}{\sqrt{12 \left[ \frac{1}{10} \cdot 3 \right]}} = \frac{1}{2 \sqrt{3 \left[ \frac{1}{10} \cdot 3 \right]}} \end{aligned}$$

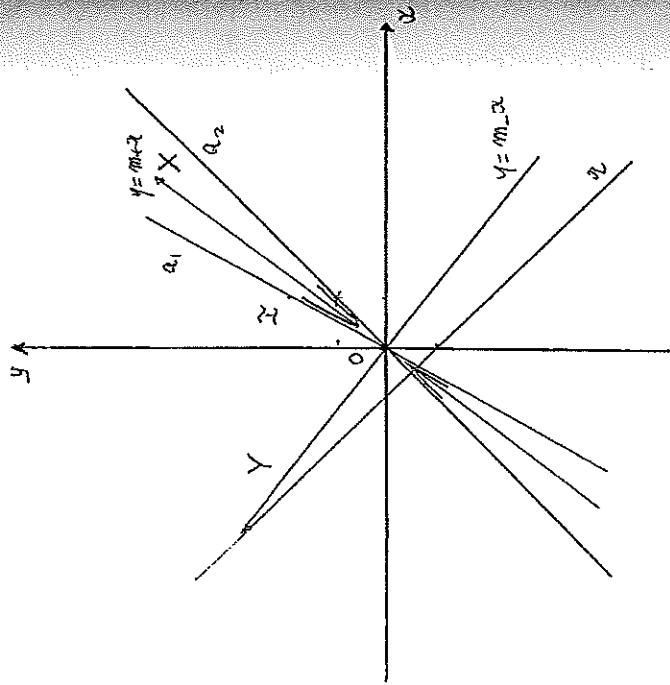
$$b = \frac{1}{\sqrt{3 \left[ \frac{1}{10} \cdot 3 \right]}}$$

-7- (166)

- calcoli approssimativi (non rigoristici)

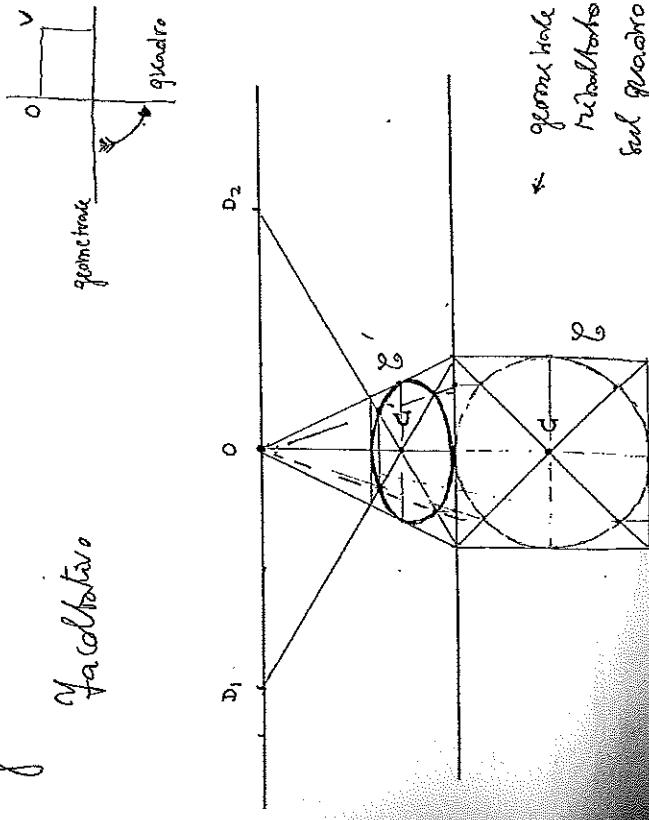
$$\begin{aligned}\sqrt{10} \pm 3 &= \sqrt{9+1} \pm 3 = \sqrt{9\left(1 + \frac{1}{9}\right)} \pm 3 \\&= 3\sqrt{1 + \frac{1}{9}} \pm 3 = 3\left(\sqrt{1 + \frac{1}{9}} \pm 1\right) = \\&\approx 3\left(1 + \frac{1}{18} \pm 1\right) \approx \sqrt{3}\left(2 + \frac{1}{18}\right) = 6 + \frac{1}{6} \\&\quad \frac{3}{18} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a &\approx \frac{1}{2\sqrt{3 \cdot \frac{1}{6}}} \approx \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \\b &\approx \frac{1}{2\sqrt{3\left(6 + \frac{1}{6}\right)}} = \frac{1}{2\sqrt{18 + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{37}{2}}} \\&\qquad\qquad\qquad = \frac{1}{\sqrt{74}} \\&\approx \frac{1}{\sqrt{6h + 10}} \\&= \frac{1}{8\sqrt{1 + \frac{10}{6h}}} = \frac{1}{8\left(1 + \frac{5}{3h}\right)} \\&\qquad\qquad\qquad \left( b \approx \frac{1}{8} \right) \\&\approx \frac{1}{8} \left(1 - \frac{5}{32}\right) \\&\approx \frac{1}{8} - \frac{5}{256}\end{aligned}$$



Geometria 10/7/2001

Facoltà:



geometra  
riflette  
sul quadro  
( piano della proiezione )  
 $16^2 - 1452$

$C'$  non è il centro di  $C$ , immagine di  $E$

Allargando la retta orizzontale passante per  $C'$ ,  
essendo come un disegno, caccia le celle  
tangibili più più che controlla sulle linee laterali parallele,  
ma non si incontrano in  $O$ .

Il concetto di centro è un concetto affine  
e non è invarianti per prosp. proiettive generali

Variare... ComputerGraph ->

-10- (169)

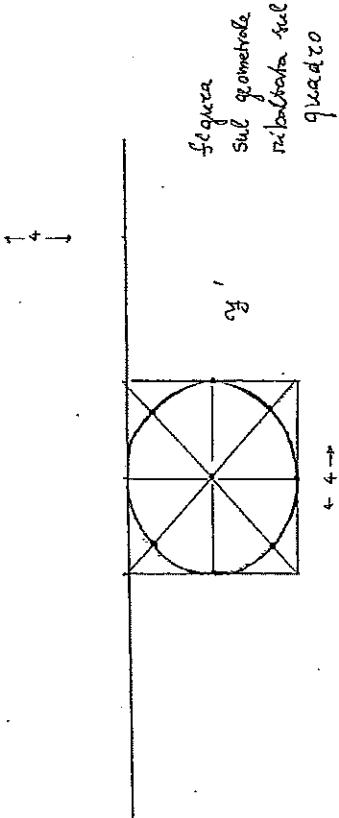
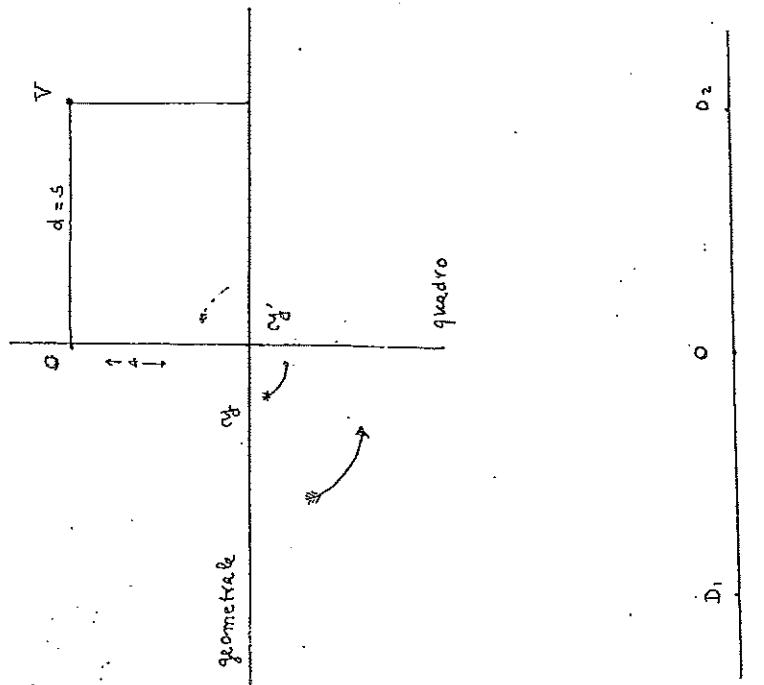
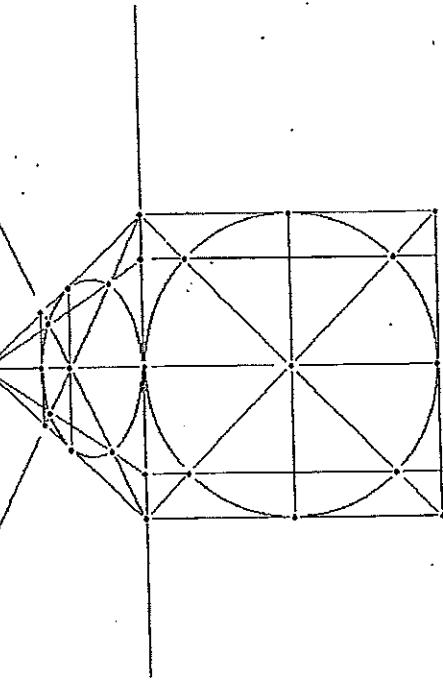


figura  
sul geometra  
riflette  
sul quadro

OT



E1. Nello spazio vettoriale euclideo  $\mathbb{R}^3$  (visto come spazio affine euclideo, rispetto al prodotto scalare standard) siano dati i sottospazi  $U : x - y = 0$  e  $W_\lambda = \mathbb{R}^3 \setminus \{V_\lambda\}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

i) Dimostrare che  $U \oplus W_\lambda = \mathbb{R}^3$ ,  $V_\lambda \in \mathbb{R}$ , e determinare la matrice  $M_{\text{can}}(W_\lambda)$ .

ii) Verificare che il triangolo  $ABC$ , con  $A : (0, 1, 1)^t$ ,  $B : (-1, 0, 1)^t$ ,  $C : (-1, 0, 0)^t$  (cioè situato parallelo ad  $U$  e, si determinino i simmetrici  $A_s, B_s, C_s$  di  $A, B, C$  rispetto a  $U$ , lungo  $W_\lambda$  (si ricordi la relazione tra proiezioni o simmetrie (relativa agli stessi sottospazi)...))

iii) Calcolare, al vertice di  $\lambda \in \mathbb{R}$ , il volume del prisma  $ABC A_s B_s C_s$ .

E2. i) Si determini, nel piano euclideo  $\mathbb{E}^2$ , (ampliato proietivamente), in cui sia fissato un riferimento cartesiano la conica  $C$  tale che :

[1] la direzione di un diametro sia  $W = \langle (1, 2)^t \rangle$ ;

[2] sia tangente in  $P : (0, 3)^t$  a  $r : y - 2x - 3 = 0$ ;

[3] sia tangente in  $O : (0, 0)^t$  a  $s : y = 0$ ;

[4] la direzione di una congiuga a  $W = \langle (1, 7)^t \rangle$ ;

ii) Determinare il centro di  $C$  e dire se essa risulta affinamente o, rispettivamente, metricamente

equivalente alla conica  $C_1 : x^2 + 2y^2 = 1$ .

T1. Sia dato  $T \in End(V)/\langle (V, K) \rangle$  di dimensione finita). i) Che cosa si intende per spazio di  $T$ ?

ii) Cosa è un autospazio di  $T$ ? È un autovettore?

iii) Definire il polinomio caratteristico di  $T$ .

iv) Definire la molteplicità algebrica e geométrica di un autovettore; quale relazione intercorre tra le due?

Dimostrare.

v) Cosa si intende col dire che un endomorfismo è diagonalizzabile? Enunciare il relativo teorema. Esempi di endomorfismi diagonalizzabili e non.

vi) Cosa si intende per endomorfismo simmetrico (in uno spazio euclideo)?

vii) Enunciare il teorema spettrale e, attraverso questo, definire la forma canonica metrica di una forma quadratica reale.

T2. Sia dato un piano euclideo reale, ampliato proietivamente e complessificato.

i) Che cosa sono lo *rotto* *sestropo* del piano? E i punti ciclici?

ii) Quali conicoidi sono caratterizzate dal passaggio per i punti ciclici?

iii) Definire fuochi e direttrici di una conica.

iv) Ricavare, dall'approccio proiettivo, la proprietà delle coniche di essere luogo dei punti tali che il rapporto

della distanza rispettive da un punto fisso e una retta data è...

v) Dimostrare iv) per via elementare, partendo dalla costruzione di Dandelin (limitarsi al caso dell'ellisse).

F. (Facoltativo: se no tiene conto solo nel caso in cui l'esaminando abbia risposto interamente ai quesiti precedenti).

Sia dato  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $U := \langle A^0 = I_n, A, A^2, \dots \rangle$ . Dimostrare che  $U$  ha dimensione finita  $\leq n$ . Dare esempi in cui valgono  $=$  e  $<$ , rispettivamente. A cosa è uguale la dimensione di  $U$  in generale?

Tempo a disposizione 2h.30m  
Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

(17)

(17)

$$\text{Solv. } \begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow U + \overline{W}_\lambda = \mathbb{R}^3$$

$$\text{dim}(U + \overline{W}_\lambda) + \text{dim}(U \cap \overline{W}_\lambda) = \underbrace{\text{dim } U}_{2} + \underbrace{\text{dim } \overline{W}_\lambda}_{\lambda}$$

$$\Rightarrow U \cap \overline{W}_\lambda = \{0\}$$

oder Basisvektoren:  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\text{sonst: } P = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & b \\ c & b & c \end{pmatrix}$$

$$P_U = \begin{pmatrix} a+b & b & c \\ b & c & b \\ c & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b & c \\ b & c & b \\ c+(b-a) & b & c \end{pmatrix}$$

$$\text{impliziert } P_U: \underbrace{a+b}_{x} - b = 0 \quad b = b - a$$

$$\Rightarrow P_U = \begin{pmatrix} a+b-a & b & c \\ b & c & b \\ c+(b-a) & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \tilde{A}B &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \tilde{A}C &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right. \begin{array}{l} 2 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right. &= 0 \end{aligned}$$

2-

$$A = (0, 1, 1)$$

$$B = (-1, 0, 1)$$

$$C = (-1, 0, 0)$$

$$\begin{pmatrix} x+1 & -(-1)x & 1 \\ x & -y+1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & y & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x+1 & -(-1)x & 1 \\ x & -y+1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & y & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\overline{W} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow m_{ee}(S_U^{\overline{W}}) = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} S_U &= 2 P_U - I & \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

17.1

2-

17.1

Per det. il volume del parallela, calcoliamo

$$d(A, U) \text{ (per ax.)}$$

$$\text{Si ha } d = d(A, U) = \frac{1 - 1}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \text{vol} = 2 \cdot \overbrace{A}^{\text{area}} \cdot d$$

da KBC

$$d(E_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Calcoliamo  $\pi \cap L$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1 + 1 + 0}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \text{vol} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

$$(det. \quad \theta = \begin{cases} y - 2x - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} x = \frac{y}{2} \\ 2x + 3 = 0 \end{array} \right. \rightarrow$$

$$\text{Circolp: } 2x + 3 = 0 \quad t = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$(y - 2x - 3) y + \lambda x^2 = 0$$

$$xy^2 - 2xy + y^2 - 3y = 0$$

$$(x \neq 0) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

per Q1  
per Q3  
per Q2 (max)

Ufficio hore 5/9/2001

(E2)

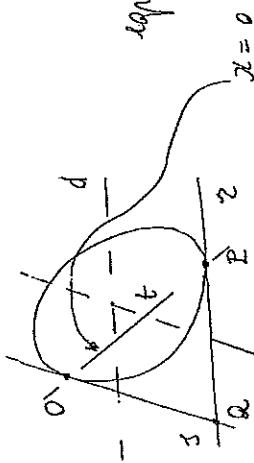
Determinare le due ore:

$$1) \quad \text{Sia l'orologio } \pi \quad P = (0, 3) \quad a$$

$$2) \quad \text{Sia l'orologio } \pi \quad O = (0, 0) \quad a$$

$$3) \quad \text{La dist. da S sin coincida a } \bar{w} = 1$$

Det. l'orologio  
e l'ora si le  
è minima



$$x = 0$$

$$(det. \quad \theta = \begin{cases} y - 2x - 3 = 0 \\ 2x + 3 = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} x = \frac{y}{2} \\ 2x + 3 = 0 \end{array} \right. \rightarrow$$

$$\text{Circolp: } 2x + 3 = 0 \quad t = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$(y - 2x - 3) y + \lambda x^2 = 0$$

$$xy^2 - 2xy + y^2 - 3y = 0$$

$$(x \neq 0) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

per Q1  
per Q3  
per Q2 (max)

-4-

(75)

-4-

(76)

$$(1 \quad \alpha \quad \gamma) \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\mu: \quad \lambda x - y = 0 \quad \text{One more var. } \mu = b$$

$$y = \lambda x \Rightarrow \lambda = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ax = 0 \quad \text{and} \quad A^T A x = 0$$

$$\begin{aligned} \text{rank } A &= 2 \\ \text{rank } A^T A &= 2 \end{aligned}$$

$$A^T A x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{3}{2}x_1 + x_3 = 0 \\ 0 &= 2x_2 - x_3 = 0 \\ 0 &= -\frac{3}{2}x_1 + x_3 = 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} +\frac{3}{2} & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \cdot (-2) \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(-3) = -\frac{9}{2}$$

$$D_{100} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \quad (\text{false})$$

$$D_{201} = 3$$

$$t^2 + \frac{D_{100} y}{D} t + \frac{D_{201}}{D} = 0$$

$$t^2 + \frac{1 \cdot 3}{(-\frac{9}{2})} t + \frac{4}{(-\frac{9}{2})^2} = 0$$

$$t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{4}{81} = 0$$

$$81t^2 - 54t + 4 = 0$$

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{3^6 - 2^2 \cdot 3^4}}{3^4} = \frac{3 \pm \sqrt{3^4(3^2 - 2^2)}}{3^4}$$

$$= \frac{3 \pm 3^2 \sqrt{5}}{3^4} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{3^2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{9} \quad (\text{positive} \Rightarrow 0)$$

$$a = \frac{3}{\sqrt{3 - \sqrt{5}}} ; b = \frac{3}{\sqrt{3 + \sqrt{5}}} \quad (148)$$

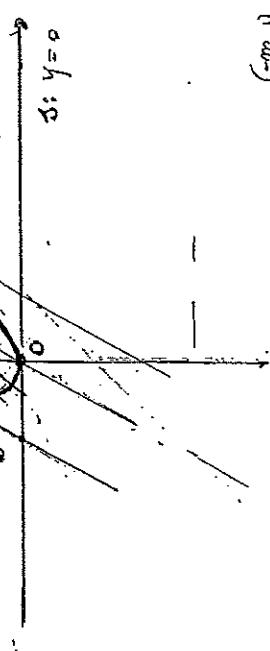
$$\text{C}_1: \alpha^2 + 2\gamma^2 = 1 \quad \begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{2} = 1 \\ \frac{y^2}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \end{cases}$$

C e C<sub>1</sub> sono off-equivalenti (sono ellissi)

ma non sono mtr. equivalenti.

$$a = \frac{3}{\sqrt{3+4\beta}} \approx \frac{3}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{\sqrt{\frac{9}{2}}} = 3\sqrt{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{1+\frac{1}{4}} \approx 3 + \frac{3}{8} \approx 3.375$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{3}{\sqrt{3+4\beta}} \approx \frac{3}{\sqrt{3+2\beta}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{3+\frac{3}{4}}} = \frac{3}{\sqrt{\frac{15}{4}}} = \frac{3}{\frac{\sqrt{15}}{2}} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{3}{32}\right) \\ &\approx \frac{3}{2} \cdot 0.96 \end{aligned}$$



geometria 5/9/2001

Dico che le matr. sono mtr.  $A, B \in M_n$

$n \geq 1$

$$\text{Sol: } AB - BA = I_m$$

Sol. Si risulta, si avrà:

$$0 = \text{Tr}( [A, B] ) = \text{Tr} I_m = n$$

A man compare nel testo

$$\begin{aligned} &\text{Dico che } A^m = \\ &\text{Comb. linea di } A^0, A^1, A^2, \dots, A^{n-1} \\ &\text{Dico che } \text{dim}(A^k) \leq n \quad \text{Dove un esempio è che} \\ &\text{Sol: Cayley-Hamilton} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &A^m = \text{comb. lin}(A^0, \dots, A^{m-1}) \\ &\Rightarrow A^R = \text{comb. lin}(A^0, \dots, A^{m-1}) \quad \forall R \geq m \\ &\Rightarrow A^0, A^1, \dots, A^{m-1} \text{ generano } \langle A^R \rangle_{R \in \mathbb{N}, R \geq m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Se } m \geq 2 \quad A = I_m, \text{ dim} \langle \rangle = 1 < m \\ &\text{Se } m = 1 \quad A = \text{const.} \quad \text{dim} \langle \rangle = 1 = \text{dim} \langle \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &A^m = \text{comb. lin}(A^0, \dots, A^{m-1}) \\ &\Rightarrow \text{dim} \langle \rangle = \text{dim} \langle A^0, A^1, \dots, A^{m-1} \rangle = \text{grado pol. minimo} \end{aligned}$$

(160)