

Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale
Prova scritta di Matematica di Base — 9 ottobre 2007

matricola nome cognome

Corso di Laurea in

Scrivere subito nome, cognome e numero di matricola, indicando la sezione di corso seguita. Le soluzioni vanno trascritte solo su questi fogli, negli spazi appositamente riservati. Si può comunque usare il retro, purché sia chiaro il riferimento.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Tot |
| | | | | | | | | | |

Compito A

1) Si consideri la seguente relazione sull'insieme \mathbf{Z} dei numeri interi

$$R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{Z}, (x - y)(x + y) \text{ è divisibile per } 3\}.$$

Dimostrare che R è una relazione d'equivalenza. Trovare le seguenti classi d'equivalenza: $[0]_R$ e $[1]_R$ e $[3]_R$.
Quante sono le classi d'equivalenza individuate da R ?

2) Mostrare che $R = \{(7, 5), (7, 4), (7, 3), (7, 2), (7, 1), (6, 5), (6, 4), (6, 3), (6, 2), (6, 1), (5, 3), (5, 2), (5, 1), (4, 2), (4, 1), (3, 2), (3, 1), (2, 1)\}$ è una relazione d'ordine stretto sull'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Determinare gli elementi massimali, minimali, eventuali massimo, minimo, maggioranti, minoranti, estremo superiore e estremo inferiore del sottoinsieme $\{3, 4, 5\}$.

3) Dimostrare per induzione che, per $n \geq 2$,
$$\sum_{i=2}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1} - \frac{1}{2}$$

4) Si risponda alle seguenti domande, motivando le risposte:

(1) Quando un insieme è numerabile?

(2) L'insieme $2\mathbf{N} \cup \{\pi, \sqrt{2}, -3\}$ è numerabile? Perché?

(3) L'insieme \mathbf{R} dei numeri reali è numerabile? Perché?

(4) Gli insiemi $\{x \mid x \in \mathbf{R}, 0 < x < 1\}$ e $\{x \mid x \in \mathbf{R}, 0 < x < 5\}$ hanno la stessa cardinalità? Perché?

5) Si consideri la struttura \mathfrak{N} dei numeri naturali, con le usuali relazioni e funzioni e l'usuale linguaggio \mathcal{L} . Nel linguaggio \mathcal{L} si scriva una formula $\varphi(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)$ con le sole variabili libere indicate tale che $\mathfrak{N} \models \varphi(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1)[a, b]$ se e solo se $ab > 4$, a è divisibile per 3 e b non è divisibile per 5.

6) Dire che cosa significa che una formula γ è valida. Dire cosa significa che la formula γ è conseguenza logica di un insieme di formule Φ . Dimostrare che, per ogni scelta delle formule α e β ,

$$\{\neg\alpha\} \models \rightarrow \forall \alpha \beta$$

7) Sia \mathfrak{N} la struttura dei numeri naturali e \mathfrak{R} quella dei numeri reali, con le usuali relazioni e funzioni e l'usuale linguaggio.

(1) Il seguente enunciato è vero o falso in \mathfrak{N} ? E in \mathfrak{R} ? (Motivare le risposte)

$$\forall \mathbf{v}_0 \rightarrow < 0 \mathbf{v}_0 \exists \mathbf{v}_1 \wedge < 0 \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 \times \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1$$

(2) Si consideri la formula $\varphi: \neg \exists \mathbf{v}_2 \wedge < \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_2 < \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_1$ e la realizzazione $\sigma = (\mathfrak{N}, \underline{a})$, dove $\underline{a}: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, $n \rightarrow n + 2$. Si trovi φ^σ

8) Sia $\lambda \in \mathbf{R}$ e $f_\lambda : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da:

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \ln x^2 & x \leq 0 \\ \lambda - \lambda x & x \geq 0 \end{cases}$$

Dire per quali valori di $\lambda \in \mathbf{R}$ f_λ è una funzione da \mathbf{R} in \mathbf{R} . Per tali valori dire se f_λ è totale, iniettiva, suriettiva.

Esiste l'inversa di f_λ ? In caso affermativo, trovare f_λ^{-1} .

9) Siano $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definite da

$$f(x) = \ln(x^2 - 4x + 3) \quad g(x) = \frac{1}{e^x}$$

- (1) Trovare l'insieme di definizione di f e l'insieme di definizione di g .
- (2) Determinare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$, specificandone gli insiemi di definizione.