Università degli studi di Verona
Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale
Prova scritta di Algebra lineare — 22 gennaio 2007

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3

Seconda prova Parziale

E1) Si consideri la conica di equazione $13x^2 - 10xy + 13y^2 - 36x + 2\alpha y - 36 = 0$. Si calcoli per quali valori di α essa è degenere e si trovino le rette in cui si spezza.

Posto $\alpha = 18$, si determini la natura della conica e se ne calcolino gli eventuali assi, centro, vertici e asintoti.

Sol) La matrice associata alla conica è

$$\mathbf{D}_\alpha = \begin{bmatrix} 13 & -5 & -18 \\ -5 & 13 & -\alpha \\ -18 & -\alpha & -36 \end{bmatrix}$$

La conica si spezza in due rette se il rango della matrice $\mathbf{D}_\alpha$ è 2. Il determinante di $\mathbf{D}_\alpha$ è $-13\alpha^2 - 180\alpha - 9396$ e, dal momento che il discriminante di tale trinomio di secondo grado in α è negativo, la conica non si spezza in due rette reali.

Sia ora $\alpha = 18$. Il rango di $\mathbf{D}_{18}$ è 3, quindi la conica associata è non-degenere e poiché $\mathbf{D}_{33}$[1] ha rango due la conica è a centro. Inoltre, poichè gli autovalori di $\mathbf{D}_{33}$ sono positivi (vedi oltre), la conica è un'ellisse. Il centro della conica è dato dalla soluzione del sistema $\mathbf{D}_{33}[x \quad y]^T = -[d_{13} \quad d_{23}]^T$. Cioè il centro della conica è dato dalla soluzione (che è unica poiché *rank* $\mathbf{D}_{33}$ è due) del sistema

$$\begin{cases} 13x - 5y = 18 \\ -5x + 13y = 18 \end{cases}$$

Quindi il centro è $C = \left(\frac{9}{4}, \frac{9}{4}\right)$. Gli autovalori della matrice $\mathbf{D}_{33}$ sono 18 e 8. I rispettivi autovettori $[-1,1]^T$ e $[1,1]^T$ sono le direzioni degli assi, ovvero i i punti $[-1,1,0]$ e $[1,1,0]$ della retta improria. Quindi gli assi dell'ellisse sono

$$h_1 : \; y = x$$
$$h_2 : \; y = -x + \frac{9}{2}$$

Le coordinate dei vertici, date dall'intersezione degli assi con l'ellisse, sono rispettivamente

$$\left(\frac{3}{4}(3-\sqrt{13}), \frac{3}{4}(3-\sqrt{13})\right), \quad \left(\frac{9}{4} + \frac{3\sqrt{13}}{4}), \frac{3}{4}(3+\sqrt{13})\right)$$

e

$$\left(\frac{1}{4}(9-2\sqrt{13}), \frac{1}{4}(9+2\sqrt{13})\right), \quad \left(\frac{1}{4}(9+2\sqrt{13}), \frac{1}{4}(9-\sqrt{13})\right)$$

[1] $\mathbf{D}_{33}$ è il minore relativo a d_{33}.

E2) Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se ne scriva la decomposizione spettrale, cioè la si scriva come $\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{P}_k$ dove λ_i sono scalari e $\mathbf{P}_i$ sono matrici di proiezione. È possibile trovare una matrice $\mathbf{B}$ tale che $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$? Se sì, calcolarla.

Sol) la matrice $\mathbf{A}$ è normale in quanto simmetrica, quindi ammette decompasizione spettrale. Gli autovalori sono

$$t_1 = 6,\ t_2 = 4,\ t_3 = 4,\ t_4 = 1$$

di autovettori, rispettivamente

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T \\ \mathbf{v}_2 &= [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T \\ \mathbf{v}_3 &= [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T \\ \mathbf{v}_4 &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \end{aligned}$$

Gli autovettori normalizzati sono

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T \\ \mathbf{u}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T \\ \mathbf{u}_3 &= [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T \\ \mathbf{u}_4 &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \end{aligned}$$

Le matrici di proiezione sono:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in cui $\mathbf{P}_i = [(\mathbf{u}_i|e_1)\,\mathbf{u}_i,\ (\mathbf{u}_i|e_2)\,\mathbf{u}_i,\ (\mathbf{u}_i|e_3)\,\mathbf{u}_i,\ (\mathbf{u}_i|e_4)\,\mathbf{u}_i]$, per ogni $i = 1, \ldots, 4$.