ESERCIZI DI ALGEBRA LINEARE
E
COMPLEMENTI DI GEOMETRIA

Foglio 1*

Esempio 1. Determinare i numeri complessi tali che

$$z^2 - 3z + 3 + i = 0$$

Sol. Gli zeri del polinomi a primo membro sono

$$z_1 = \frac{3 + \sqrt{-3-4i}}{2}, \qquad z_2 = \frac{3 - \sqrt{-3-4i}}{2}$$

Scriviamo meglio i due zeri. Il discriminante del polinomio $\sqrt{-3-4i}$ individua un qualsiasi numero complesso $w = x+iy$ il cui quadrato sia proprio $-3-4i$. Per cui deve essere $w^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = -3-4i$ cioè deve essere soddisfatto il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = -4 \end{cases}$$

Ponendo $xy \neq 0$[1] il sistema precedente è equivalente a

$$\begin{cases} x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \\ y = -\dfrac{2}{x} \end{cases}$$

Poniamo $t = x^2$ nella prima equazione, ottenendo $t^2 + 3t - 4 = (t-1)(t+4) = 0$. Per cui $x^2 = 1$ oppure $x^2 = -4$. Quest'ultima possibilità non è accettabile. Quindi si ottengono due espressioni per w, $w_1 = -1+2i$ oppure $w_2 = 1-2i$ (si osservi che necessariamente $w_1 = -w_2$). Perciò $z^2 - 3z + 3 + i = (z-1-i)(z-2+i) = 0$.

Esercizio 2. Determinare i numeri complessi tali che

1. $z^2 + (i+1)z + 3 + i = 0$.
2. $z^3 - (i+1)z^2 + (1+4i)z - 1 - 3i = 0$.
3. Sapendo che $1+i$ è zero di $z^4 - 3z^3 + 5z^2 - 4z + 2 = 0$ determinare gli altri.
4. $x^3 + 1 = 0$.
5. $x^2 - x - 2 = 0$.
6. $x^4 + 1 = 0$.
7. $x^3 - 4x^2 + 8x - 1$.

Esempio 3. Determinare parte reale, parte immaginaria e forma trigonometrica di

$$w = \frac{1+i}{3-i}$$

*Sono a grato a quanti mi indicheranno i molti errori presenti in questi fogli, al fine di fornire uno strumento migliore a quanti lo riterranno utile, e-mail: sansonetto@sci.univr.it

[1] Si ossevi che se x o y sono nulli allora il sistema non ammette soluzione.

Sol. Moltiplichiamo numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore, $3+i$:

$$\frac{1+i}{3-i}\frac{3+i}{3+i}=\frac{1+2i}{5}$$

Quindi $\mathfrak{Re}\,w=\frac{1}{5}$ e $\mathfrak{Im}\,w=\frac{2}{5}$. Per determinare la forma trigonometrica di w, calcoliamone prima il modulo: $|w|=\sqrt{w\bar{w}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$. La forma trigonometrica di w è

$$w=|w|\left(\frac{\mathfrak{Re}\,w}{|w|}+i\frac{\mathfrak{Im}\,w}{|w|}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+i\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

in cui $\frac{1}{\sqrt{5}}=\cos\alpha$ e $\frac{2}{\sqrt{5}}=\sin\alpha$.

Esercizio 4. Determinare parte reale, parte immaginaria e forma trigonometrica di

1. $w=(1+i)(\sqrt{3}+i)$ (in due modi differenti).
2. $v=\frac{3+3i}{2-i}$.
3. $z=(i)^{12}\frac{(1-i)^4}{(1+i)^5}$.
4. $z=\sqrt[3]{i}$.

Esempio 5. Determinare per quali numeri complessi

$$z^6=1$$

Sol. Sappiamo che se z è un numero complesso non nullo, $z=|z|\operatorname{cis}\alpha$,[2] e m è un intero, allora vale la formula di de Moivre

$$z^m=|z|^m\left(\cos(m\alpha)+i\sin(m\alpha)\right)$$

DEFINIZIONE. Dati $m\in\mathbb{Z}$ e $z\in\mathbb{C}$ si dice radice m-esima di z ogni numero complesso w tale che $w^m=z$.

Ora dimostriamo il seguente importante risultato

PROPOSIZIONE. Ogni numero complesso non nullo z ha esattamente m-radici m-esime distinte che sul piano di Argand-Gauss si dispongono sui vertici di un poligono regolare a m lati inscritto nella circonferenze di centro l'origine e raggio $\sqrt[m]{|z|}$.

Dimostrazione. Limitiamoci a ripercorrere la dimostrazione della prima parte. Dobbiamo determinare i numeri complessi w tali che $w^m=z$. Siano $z=|z|\text{cis}\,\alpha$ e $w=|w|\text{cis}\,\beta$ le forme trigonometriche di z e w, rispettivamente, allora $w^m=z$ se e solo se

$$\begin{cases}|z|=|w|^m\\ m\beta=\alpha+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

nelle incognite $|w|$ e β. Per cui $|w|=\sqrt[m]{|z|}$ e $\beta_k=\frac{\alpha+2k\pi}{m}$. $\square$

Ora applichiamo il precedente risultato al nostro problema. Nel nostro caso $|z|=1$ e quindi $|w|=1$. Invece $\beta_k=\frac{\alpha+2k\pi}{6}$ e $\alpha=0$, quindi $\beta_k=\frac{k\pi}{3},\ k=0,1,2,3,4,5$ cioè (a meno di multipli interi di 2π) $w_k=\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3},\ k=0,1,2,3,4,5$.

Esercizio 6. Determinare le radici settime dell'unità. Dimostrare che la somma delle radici m-esime dell'unità è zero.

Esercizio 7. Date le matrici

$$A=\begin{bmatrix}2+3i & 1+i\\ 0 & i\\ 1-i & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2 & 1+i\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}3+5i\\ 6\\ 2-2i\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}7+1 & 2+3i\\ 3-2i & 0\end{bmatrix}$$

verificare che ha senso la seguente espressione

$$(A^H\bar{C}+iB^T)\bar{B}+(1+3i)D^H$$

In caso affermativo determinarla.

[2] Denotiamo, per brevità, con cis α il termine $\cos\alpha+i\,\sin\alpha$.

Esempio 8. Dimostrare che ogni matrice quadrata complessa A si scrive in un unico modo nella forma

$$A = B + C$$

in cui B è hermitiana e C è anti-hermitiana.

Sol. In primo luogo dimostraimo che A si può scrivere come somma di una parte B che chiameremo hermitiana e di una parte C che chiameremo anti-hermitiana. Poniamo $B = \frac{A+A^H}{2}$ e $C = \frac{A_A^H}{2}$ e osserviamo che $B = B^H$ e $C = -C^H$. A questo punto è semplice osservare che $B + C = \frac{A+A^H}{2} + \frac{A-A^H}{2} = A$.

Dimostriamo ora l'unicità della scrittura. Supponiamo che esistano altre due matrici $B' \neq B$ hermitiana e $C' \neq C$ anti-hermitiana tali che $A = B' + C'$. Allora

$$B + C = B' + C'$$

cioè

$$B - B' = C' - C$$

ma $B - B'$ è hermitiana mentre $C' - C$ è anti-hermitiana, ma l'unica matrice sia hermitiana che anti-hermitiana è la matrice nulla e quindi $B = B'$ e $C = C'$.

Esercizio 9. Scrivere la matrice

$$\begin{bmatrix} 1-2i & 2i \\ -2 & 1-i \end{bmatrix}$$

come somma della sua parte hermitiana e anti-hermitiana.

Esempio 10. Dimostrare che il prodotto di due matrici triangolari superiori di ordine n è una matrice triangolare superiore di ordine n.

Sol. Effettuiamo la dimostrazione per induzione sull'ordine della matrice.

Passo Base, per $n = 2$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + b_{22}a_{12} \\ 0 & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

Passo induttivo, assumiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ il prodotto di due matrici triangolari superiori di ordine n sia una matrice triangolare superiore di ordine n e mostriamo che allora il prodotto di due matrici triangolari superiori di ordine $n+1$ è una matrice triangolare superiore di ordine $n+1$. La generica matrice triangolare superiore di ordine $n+1$ è del tipo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & & a_{1n+1} \\ 0 & a_{22} & \dots & & a_{2n+1} \\ 0 & 0 & a_{33} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & & 0 & a_{n+1n+1} \end{bmatrix}$$

È conveniente scrivere la matrice A a blocchi:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & u^T \\ 0 & A' \end{bmatrix}$$

in cui $u^T = (a_{12} \quad a_{13} \quad a_{1n+1})$, 0 è il vettore nullo di ordine n e A' è la matrice triangolare superiore di ordine n che si ottiene da A cancellando la prima riga e la prima colonna. A questo punto

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & u^T \\ 0 & A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & v^T \\ 0 & B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}v^T + u^T B' \\ 0 & A'B' \end{bmatrix}$$

Il prodotto di A per B è una matrice triangolare superiore di ordine $n+1$, infatti, per ipotesi induttiva $A'B'$ è una matrice triangolare superiore di ordine n.

Esercizio 11. Determinare tutte le matrici reali e simmetriche 2×2, A, tali che $A^2 = Id_2$.

Esercizio 12. Dimostrare che non esistono matrici complesse A tali che

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 13. Esistono matrici reali e anti-simmetriche 2×2, A tali che $A^2 = Id_2$? Perché?

Esercizio 14. Trovare tutte le matrici 2×2 che commutano con le matrici tringolari superiori.