◇ Compattezza

Sia (X, τ) uno spazio topologico. Una famiglia

$\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$, $U_\alpha \in \tau$, tale che

$X = \bigcup_{\alpha \in \Omega} U_\alpha$, è detta ricoprimento (aperto) di X

se $B \subset \Omega$ e $X = \bigcup_{\beta \in B} U_\beta$, $\mathcal{U}' = \{U_\beta\}_{\beta \in B}$

è detto sottoricoprimento (aperto) di X

Più in generale, se $S \subset X$, un ricoprimento di S è una collezione $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$, $U_\alpha \in \tau$ tale che

$S \subset \bigcup_{\alpha \in \Omega} U_\alpha$. Analoga è la definizione di sottoricoprimento di S.

Se Ω è un insieme finito si parla di ricoprimento finito.

Def. 1. Uno spazio topologico (X, τ) è detto compatto (secondo Heine-Pincherle-Borel) se, un qualsiasi ricoprimento di X ammette un sottoricoprimento finito.

2. Un sottoinsieme $S \subset X$ è detto compatto se, parimenti, un suo qualsiasi ricoprimento ammette un sottoricoprimento finito.

Notiamo che, da $S \subset \bigcup_{\alpha\in\Omega} \mathcal{U}_\alpha$ segue

$$S = S \cap \bigcup_{\alpha\in\Omega} \mathcal{U}_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\Omega} \underbrace{(S\cap \mathcal{U}_\alpha)}_{\in\, \tau_S} \quad \text{(topologia relativa)}$$

e <u>viceversa</u>,

sicché $S \subset X$ è <u>compatto</u> se e solo se il sottospazio (S, τ_S) è <u>compatto</u> come spazio topologico (munito della topologia relativa)

* Notiamo subito che, ad esempio $\mathbb{R}$, con la sua topologia naturale, <u>non</u> è <u>compatto</u>: $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (-n, n)$, $\mathbb{N}^* = \{1,2,\dots\}$

e dal ricoprimento dato non è possibile estrarre alcun sottoricoprimento finito.

Similmente, un intervallo aperto, ex $(-1,1)$ <u>non</u> è compatto: $(-1,1) = \bigcup_{n=2}^{\infty} \left(-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right)$ ....

<u>In $\mathbb{R}^n$</u> si dà la seguente definizione ("classica") di <u>compattezza</u>: $K \subset \mathbb{R}^n$ è <u>compatto</u> se è <u>chiuso</u> e <u>limitato</u> (i.e. è contenuto in una palla)

es: $[0,1]$ è compatto; $\mathbb{R}$, $(0,1)$, $[0,1)$ non lo sono.

Le due nozioni di compattezza coincidono, in $\mathbb{R}^n$: precisamente, vale il seguente <u>teorema</u>

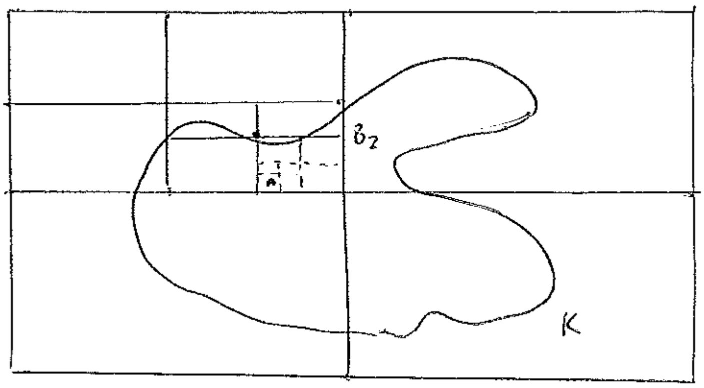
★ **Teorema** Sia $K \subset \mathbb{R}^n$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. K è compatto (i.e. chiuso e limitato)
2. K è compatto (secondo HEB)
3. [Proprietà di Bolzano-Weierstraß] Ogni sottoinsieme infinito di K possiede un punto di accumulazione in K

(in particolare, una successione in K ammette una sottosuccessione convergente in K).

Dim. Dimostriamo che $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$

$1 \Rightarrow 2$ K è contenuto in un plurirettangolo chiuso B_0 (per fissare le idee $n=2\ldots$) [K è limitato].



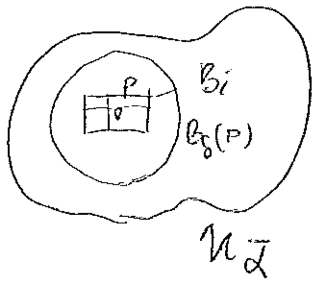
B_0 Neghiamo 2: esiste un ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ di K da cui non è possibile estrarre un sottoricoprimento finito. Dividiamo B in quattro parti; una di queste non sarà ricoperta con un numero finito di aperti del ricoprimento. Iterando il procedimento (v. figura) troviamo $B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \ldots B_i \supset \ldots$ tali che $B_i \cap K$ non è ricoperta da un numero finito di aperti. Si osservi che $\operatorname{diam}(B_i) \to 0$ se $i \to \infty$. Proiettando sugli "assi coordinati", e utilizzando le proprietà di $\mathbb{R}$, troviamo

diametro di B_i

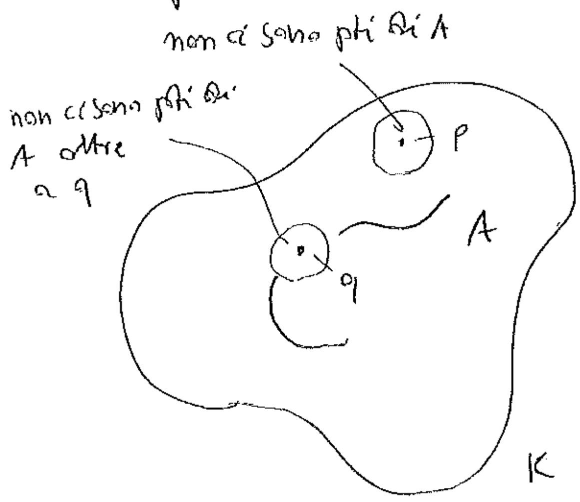
che $p \in \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$, e che p è punto di accumulazione di K. Essendo K chiuso, $p \in K$. Sia $\mathcal{U}_{\bar\alpha}$, $\bar\alpha \in \Omega$ tale che $p \in \mathcal{U}_{\bar\alpha}$ (ne esiste almeno uno).

Ma allora, per un opportuno $\delta > 0$, $\mathcal{U}_{\bar\alpha} \supset B_\delta(p) \supset B_i$, $i > \bar{i}$ opportuno. Ciò contraddice l'ipotesi iniziale.

Dunque $1 \Rightarrow 2$.



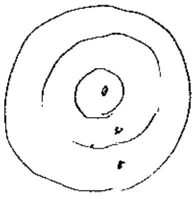
$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ Sia $A \subset K$, infinito, tale che nessun pto limite di A sia in K. Allora $\forall\, p \in K \setminus A$, $\exists\, V_p$, intorno di p, tale che $V \cap A = \emptyset$ e $\forall\, q \in A$, $\exists\, W_q$, intorno di q tale che $W_q \cap A = \{q\}$ [nessun pto di A può essere pto di accumulazione]. Pertanto $\{V_p, W_q\}_{\substack{p \in K \setminus A \\ q \in A}}$



è un ricoprimento aperto di K, infinito (poichè A è infinito) e, togliendo uno dei W_q, $q \in K$ non viene più ricoperto: il ricoprimento (infinito) $\{V_p, W_q\}_{\substack{p \in K \setminus A \\ q \in A}}$ di K non ammette alcun sottoricoprimento finito. Ciò nega 2.

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ K è chiuso: sia p pto di accumulazione di K; considerando sfere concentriche

$B_{\frac{1}{i}}(P)$, $i = 1, 2 ..$ (per fissare le idee), otteniamo facilmente una successione $p_i \to P$, $(p_i \in K)$

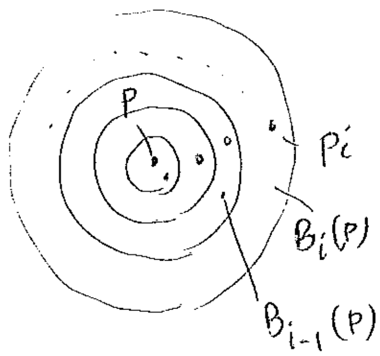


(con $p_i \in B_{\frac{1}{i}}(P) \setminus B_{\frac{1}{i+1}}(P)$).

$A := \{p_i\}$ è infinito , $A \subset K$ è ammette un (unico) pto di accumulazione , cioè P.
Ma allora $P \in K$. Dunque <u>K è chiuso.</u>

K è anche <u>limitato</u> poiché , in caso contrario, considerando sfere concentriche $B_i(P)$, si troverebbe una successione $\{p_i\}$, $p_1 \in B_1(P)$, $p_i \in B_i(P) \setminus B_{i-1}(P)$, $i \geq 2$

<u>senza pti limite</u> , violando 3. $\square$



★ <u>Teorema</u> Siano (X, τ_X), (Y, τ_Y) spazi <u>topologici</u>
e sia $f : X \to Y$ <u>continua</u>.
Se $K \subset X$ è <u>compatto</u>, allora $f(K)$ è <u>compatto</u>
[l'immagine di un compatto tramite una funzione continua è un compatto]

Di conseguenza, la nozione di compattezza è invariante per <u>omeomorfismi</u>, ovvero, è <u>topologica</u>:

★ spazi <u>omeomorfi</u> sono <u>entrambi</u> <u>compatti</u> o <u>non lo sono</u>

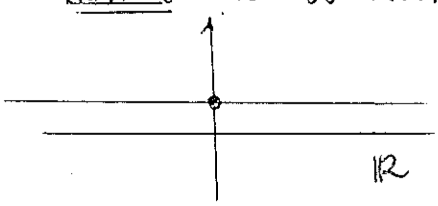
Dim. Sia $\mathcal{U} = \{ U_\alpha \}_{\alpha \in \Omega}$ un ricoprimento aperto di $f(K)$: $f(K) \subset \bigcup_{\alpha \in \Omega} U_\alpha$. In virtù della continuità di f, $f^{-1}(U_\alpha) \in \tau_X \quad \forall \alpha \in \Omega$,

e $K \subset \bigcup_{\alpha \in \Omega} f^{-1}(U_\alpha)$, cioè $\tilde{\mathcal{U}} = \{ f^{-1}(U_\alpha) \}_{\alpha \in \Omega}$

è un ricoprimento (aperto) di K; dalla compattezza di K si ha che $K \subset \bigcup_{\beta \in \mathcal{Y} \subset \Omega} f^{-1}(U_\beta)$, $\mathcal{Y}$ finito.

Ma allora $\{ U_\beta \}_{\beta \in \mathcal{Y}}$ ricopre $f(K)$, e concludiamo. □

⚠ <u>Attenzione</u>! La <u>controimmagine</u> di un compatto <u>non è</u> necessariamente <u>compatta</u>, basti pensare a



$f^{-1}(0) = \mathbb{R}$

un'applicazione <u>continua</u> che goda di tale proprietà si dice <u>propria</u>.

Diamo una dimostrazione del teorema per

$f: K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (f continua, K compatto),

meno generale ma istruttiva.

Se $f(K)$ è finito, è banalmente compatto. Altrimenti si consideri un insieme infinito $\{f(p_\alpha)\}$, $\alpha \in \Omega$

$p_\alpha \in K$, $f(p_\alpha) \in f(K)$. L'insieme $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ è certamente infinito e, in base alla compattezza di K, ammette un pto di accumulazione $p \in K$.

Sia allora $\{p_i\}_{i=1,2..}$, $p_i \to p$, una successione (estratta da $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$). La continuità di f implica $f(p_i) \to f(p)$, sicché $\{f(p_\alpha)\}_{\alpha\in\Omega}$ ha un pto limite ($f(p)$) in $f(K)$. Pertanto $f(K)$ è compatto. □

☆ **Teorema** (Weierstraß) Sia $f: K \subset X \to \mathbb{R}$, continua, K compatto. Allora f ammette massimo e minimo assoluti in K.

Dim. $f(K)$ è compatto, dunque chiuso e limitato in $\mathbb{R}$. Siano $x_1 = \inf f(K)$, $x_2 = \sup f(K)$. Esistono allora $p_1, p_2 \in K$ tali che $f(p_i) = x_i$, $i=1,2$ e pertanto si ha, necessariamente,

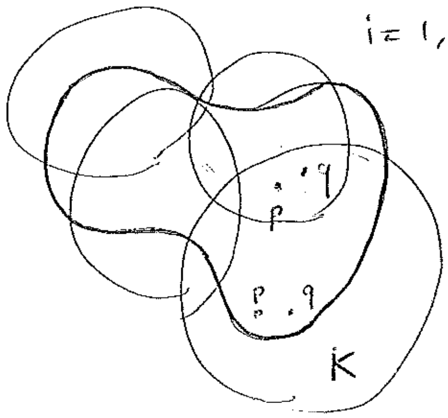
$$f(p_1) = x_1 \le f(p) \le x_2 = f(p_2) \quad \forall p \in K$$

□

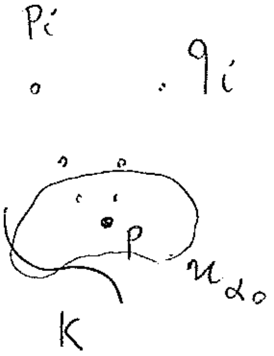
✩ Numero di Lebesgue di un ricoprimento.

Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto, e sia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ricoprimento di A (che può essere scelto finito per Heine-Pincherle-Borel). Allora esiste $\delta > 0$ tale che, se $d_E(p,q) < \delta$, allora p e q appartengono ad un qualche U_α.

<u>Dim.</u> Per assurdo, supponiamo che esistano $\{p_i\}$, $\{q_i\}$ $i = 1, 2 ..$, $p_i, q_i \in K$, in aperti diversi, tali che $d_E(p_i, q_i) \to 0$.



Dalla compattezza di K, le due successioni hanno un pto di accumulazione comune in K, sia p. Detto U_{α_0} l'aperto del ricoprimento contenente p, questo conterrà certamente almeno un p_i e un q_i (di fatto, infiniti...).



Tale $\delta > 0$ (o, meglio, il sup dei $\delta > 0$ con tale proprietà) è detto numero di Lebesgue del ricoprimento.

Tale nozione torna utile nel seguito.

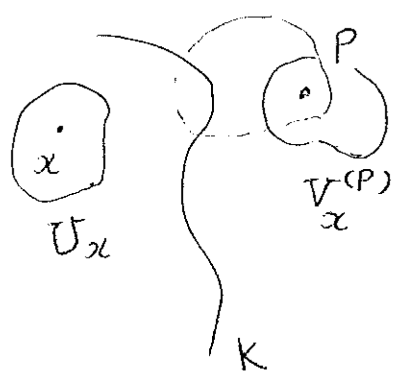
Proposizione 1. Sia $K \subset X$, K chiuso, X compatto. Allora K è compatto.

2. Sia X di Hausdorff, $K \subset X$, K compatto. Allora K è chiuso

⚠ Notiamo che 2 non vale in generale se si rimuove la condizione "X di Hausdorff": sia $X = \{a, b\}$ τ: topologia banale. Si ha: X non è di Hausdorff, $\{a\}$ è compatto, ma non è chiuso.

Dim. 1. Sia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ un ricoprimento aperto di K. Essendo K chiuso, $X \setminus K$ è aperto e $\bigcup_{\alpha \in \Omega} U_\alpha \cup (X \setminus K) = X$. Dalla compattezza di X si trae che $X = U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \dots \cup U_{\alpha_n} \cup (X \setminus K)$ per un numero finito di aperti di $\mathcal{U}$, opportuni. Ma ciò implica che $K \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}$ e, pertanto, K è compatto.

2. Mostriamo che $X \setminus K$ è aperto. Sia $p \in X \setminus K$ fissato. $\forall x \in K$, $\exists$ intorni $U_x \ni x$, $V_x^{(p)} \ni p$, disgiunti (X è Hausdorff)



(⚠ non è detto che $V_x^{(p)} \cap K = \emptyset$)

Ora $K \subset \bigcup_{x \in K} U_x$ e, pertanto, in virtù della sua compattezza, è $K \subset U_{x_1} \cup U_{x_2} \dots U_{x_n}$ per certi $x_i \in K$, $i = 1, 2.., n$. Sia

$$V^{(p)} := V_{x_1}^{(p)} \cap V_{x_2}^{(p)} \cap \dots \cap V_{x_n}^{(p)} \quad : \quad V^{(p)} \text{ è}$$

aperto (intersezione finita di aperti), e necessariamente $V^{(p)} \subset X \setminus K$. Dunque $\forall p \in X \setminus K$, $\exists V^{(p)} \ni p$, aperto, $V^{(p)} \subset X \setminus K$; pertanto

$$X \setminus K = \bigcup_{p \in X \setminus K} V^{(p)}$$

, epperò è aperto. $\square$

$\star$ Teorema Siano X, Y spazi topologici, X compatto, Y di Hausdorff, $f : X \to Y$ continua e iniettiva.
Allora $f : X \to f(X)$ è un omeomorfismo

Dim. f^{-1} esiste. Dimostriamo che è continua.

Sia $C \subset X$ un insieme chiuso. Poichè X è compatto, C è pure compatto.

$$(f^{-1})^{-1}(C) = f(C)$$

, che è compatto (continuità di f), e chiuso (Y è di Hausdorff), sicchè la controimmagine (tramite f^{-1}) di un chiuso è un chiuso (e la controimmagine di un aperto è un aperto), da qui la continuità di f^{-1}.

Più rapidamente: $(f^{-1})^{-1}(C_i) = f(C_i)$ mostra che f è un applicazione chiusa (manda cioè chiusi in chiusi) e dunque aperta (aperti in aperti) ed è pertanto un omeomorfismo (v. Lezione I)

Esempi ◆ In $\mathbb{R}^n$, si consideri $B_\delta(x_0)$, $\delta > 0$:

$B_\delta(x_0)$ non è compatta (infatti non è chiusa, anche se è limitata).

Si osservi che

$$\mathcal{U} = \{ \underbrace{B_{\delta'}(x_0)}_{\mathcal{U}_{\delta'}} \}_{0<\delta'<\delta}$$

fornisce un ricoprimento aperto di $B_\delta(x_0)$ da cui non è possibile estrarre alcun sottoricoprimento finito.

◆ S^n, $n \geq 0$ $\left(S^n = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \,/\, \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \} \right)$

è compatta   Sfera unitaria in $\mathbb{R}^{n+1}$

◆ $\mathbb{RP}^n$ $(n \geq 0)$ (Spazio proiettivo reale n-dimensionale)

è compatto (la mappa antipodale naturale $f : S^n \to \mathbb{RP}^n$ è continua e suriettiva)

◆ $\mathbb{T}^n := S^1 \times S^1 \times \ldots S^1$ è compatto

toro n-dimensionale (per il teorema di Tychonoff: un prodotto(†) di spazi topologici compatti (munito della topologia prodotto) è compatto.

(†) arbitrario

$$O(n) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t A = A A^t = I_n \}$$

gruppo ortogonale è compatto

Infatti se $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots n \\ j=1,\dots n}} \in O(n)$, è

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, a_{kj} = \delta_{ij} \qquad i,j = 1 \dots n \qquad (AA^t = A^tA = I_n)$$

che è una condizione "chiusa" in $\mathbb{R}^{n^2}$

(il complementare di $O(n)$ in $M_n(\mathbb{R})$ è chiaramente aperto).

Inoltre, da $A^tA = I_n$ si trae $\mathrm{tr}(A^tA) = n$,

ossia $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 = n$, che ne mostra la limitatezza

$\|A\|^2_{HS} = 1$

* Digressione Siano $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

Definiamo $\langle A, B \rangle_{HS} := \mathrm{Tr}(A^t B)$

* prod. scalare di Hilbert-Schmidt [mostrare che è effettivamente un prodotto scalare!]

Esplicitamente: $(A^tB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a^t_{ik}\, b_{kj} =$ $\qquad A^t = (a^t)_{ij}$

$= \sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{kj}$. Da $\mathrm{Tr}\, C = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$ si ha

$$\mathrm{Tr}(A^tB) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ki} b_{ki}$$

(è eff. il prod scalare standard in $\mathbb{R}^{n^2}$)

★ Sia $\mathcal{H} = \ell^2 = \{x = \{x_i\} \,/\, x_i \in \mathbb{C},\ \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$
spazio di Hilbert

$$\langle x | y \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} \bar{x}_i y_i \qquad \text{prodotto scalare}$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \bar{x}_i x_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2} \qquad \text{norma}$$

$$d(x, y) := \|x - y\| \qquad \text{distanza}$$

$\mathcal{H}$ è uno sp. metrico completo.

$$\mathcal{H}_1 \equiv \text{sfera unitaria} = \{x \in \ell^2 \,/\, \|x\| = 1\}$$

★ $\mathcal{H}_1$ è chiuso e limitato ma non è compatto !

Sia infatti $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow i$ la base ortonormale canonica. $\{e_i\}$ è una successione limitata da cui non si può estrarre alcuna sottosuccessione convergente, in quanto

$$\| e_i - e_j \|^2 = \ldots = \|e_i\|^2 + \|e_j\|^2 = 2$$

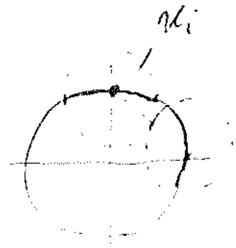
(equivalentemente, è un insieme infinito di $\mathcal{H}_1$ che non possiede pti di accumulazione)

Vediamolo anche così:

Sia $B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(e_i)$ la palla di centro e_i e raggio $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(o inferiore...)

ovviamente $B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(e_i) \cap B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(e_j) = \emptyset$ se $i \neq j$

poniamo $\mathcal{U}_i = \mathcal{H}_1 \cap B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(e_i)$



Sia $A = \mathcal{H} \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(e_i)$

(è aperto in $\mathcal{H}$, come è facile verificare)

Poniamo $U_A = A \cap \mathcal{H}_1$

$\mathcal{U} = \{ U_A, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \dots \}$ è pertanto un ricoprimento (aperto) di $\mathcal{H}_1$ (munita della <u>topologia</u> <u>relativa</u>), <u>infinito</u>.

È chiaro che da $\mathcal{U}$ non può essere estratto alcun ricoprimento <u>finito</u>: i centri e_j degli $\mathcal{U}_j$ esclusi non apparterrebbero a nessuno degli aperti rimasti.

☆ Curva di Peano (cenno)

$$p = p(t) \qquad t \in [0,1] = I$$

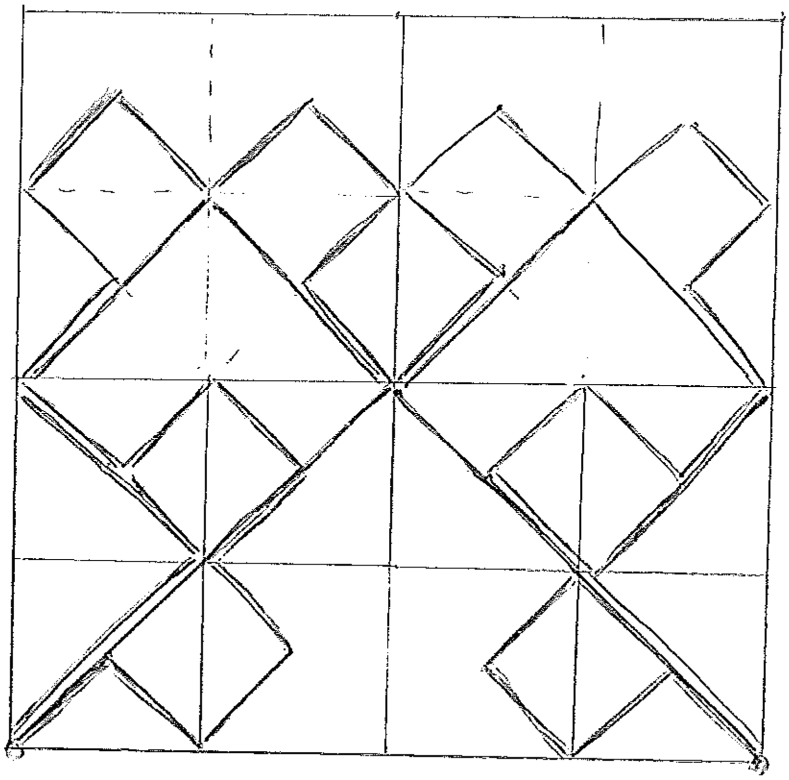
$$= \lim p_n(t)$$

si dimostra che

☆ p è continua, pertanto

$p(I)$ è compatto in $I \times I$, dunque chiuso, e chiaramente

$p(I)$ è densa in $I \times I$.



Pertanto

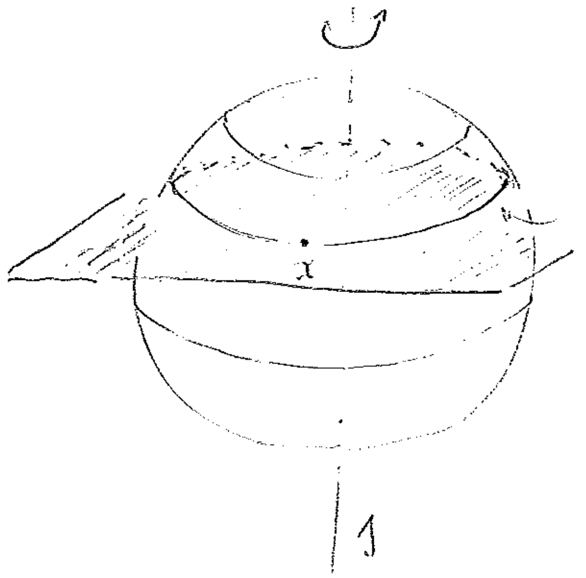
$$p(I) = \overline{p(I)}$$

$$= I \times I$$

vale a dire:

"la curva di Peano riempie un quadrato"

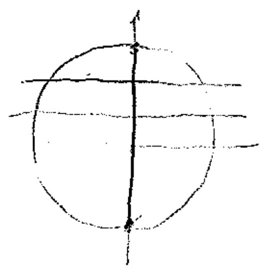
Applicazione (esempio di spazio di orbite)



$[x] \equiv$ orbita di x

(rotazioni attorno ad s)

$x^2+y^2+z^2=1$



$$f: S^2/\sim \;\longrightarrow\; [-1,1]$$

(definizione ovvia)

è una biezione continua, $S^2/\sim$ è compatto (lo è S^2) e $[-1,1]$ è di Hausdorff, sicché f è un <u>omeomorfismo</u>.

$$S^2/\sim \;\approx\; [-1,1]$$