

GEOMETRIA

a.a. 2011/12 (Prof. M. Spina)

Prova scritta del 6 febbraio 2013

- ① Sia data la superficie conica Σ
$$z = \sin(x^2) - 1 + \cos y$$

se ne determini il piano tangente in $P_0: (0, 0, 0)$,
le direzioni principali e le direzioni asintotiche e
si abbozzi il profilo dell'indicatrice di Dupin.

- ② Sia dato il paraboloida di rotazione $\Sigma: z = y^2$
Si consideri la geodetica uscente da $P_0: (1, 0, 1)$
di azimuth $\frac{\pi}{4}$. Qual è il suo azimuth nell'interse-
zione la "quota" $z = 2$?

- ③ Sia $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Sia $\mathcal{G} = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}, \{2, 4, 6\}, X\}$

Dire se $\mathcal{G}$ è una topologia, e' di Hausdorff?

È possibile indurlo da una metrica su X ?

Sia poi $\sim$ la relazione di equivalenza $x \sim y$

$$\Leftrightarrow x - y \equiv 0 \pmod{2} \quad (x - y = 2k)$$

e si consideri $X/\sim$ con la sua topologia quoziente $\mathcal{G}_\sim$
Descriverla e dire se è di Hausdorff.

Tempo a disposizione: 2h

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

① $Z: z = \ln(x^2) - 1 + \cos y$

piano tangente in $P_0: (0,0,0)$

$$z = 0$$

$$z = x^2 - \frac{y^2}{2} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} (2x^2 - y^2) + \dots$$

$$z(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$E^0 = G^0 = 1, F^0 = 0$$

$$e^0 = 2, f^0 = 0, g^0 = -1$$

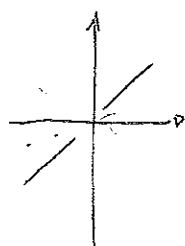
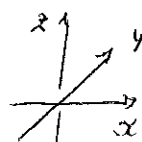
direzioni principali :

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

asse x

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

asse y

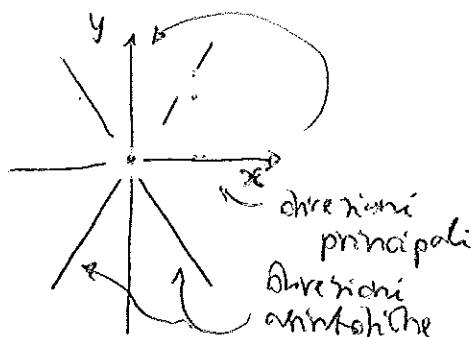


direzioni antitangente

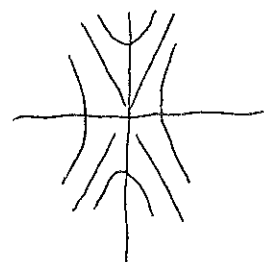
$$2x^2 - y^2 = 0 \quad (\sqrt{2}x - y)(\sqrt{2}x + y) = 0$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{2}x \\ z = 0 \end{cases}$$

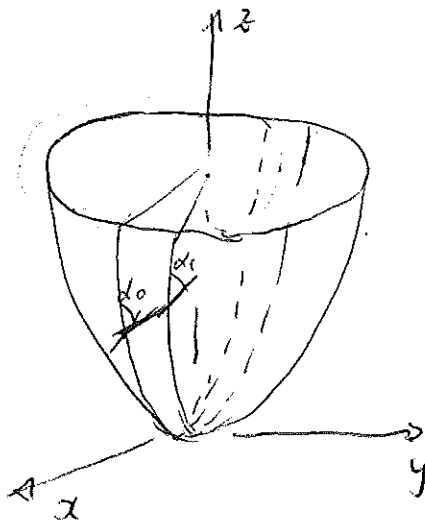
$$\begin{cases} y = -\sqrt{2}x \\ z = 0 \end{cases}$$



$$2\xi^2 - \eta^2 = \pm 1$$



②



geometria
6 febbraio 2013

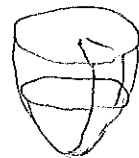
$$z = \rho^2 \\ = x^2 + y^2$$

geodetica per $P_0: (1, 0, 1)$ di azimuth $\frac{\pi}{4}$

azimuth nell'intersecare la "quota" $z=2$

in P_0 $\rho_0 =$ raggio parallelo $= 1$
quota: $z=1$

$$\overset{1}{\rho_0} \sin \underset{\parallel \frac{\pi}{4}}{\alpha_0} = \sqrt{2} \sin \alpha_1$$



$$\rho_L = \sqrt{z_1} = \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \sin \alpha_1$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{1}{2} \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{6}$$

$$(3) \quad X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}, \{2, 4, 6\}, X\}$$

è una topologia

non è di Hausdorff: ad es. $\{2\}$ e $\{3\}$ non hanno
intorni disgiunti.

Però X non può diventare uno sp. metrico (con la stessa topologia)
(uno spazio metrico è Hausdorff)

$$N \quad x - y \equiv 0 \pmod{2}$$

$$X/N = \underbrace{\{1, 3, 5\}}_1, \underbrace{\{2, 4, 6\}}_2$$

aperti di $\mathcal{T}_N$

$$\pi^{-1}\{1\} = \{1, 3, 5\} \in \mathcal{T}$$

$$\pi^{-1}\{2\} = \{2, 4, 6\} \in \mathcal{T}$$

$$\pi^{-1}\{1, 2\} = X \in \mathcal{T}$$

$$\Rightarrow \mathcal{T}_N = \{\emptyset, \{2\}, \underbrace{\{1, 2\}}_{X/N}\}$$

tale topologia non è
di Hausdorff.