a.a. 2006/07
a.a 2007/08
a.a 2008/09 +

Note del corso di GEOMETRIA

V3

Corso di Laurea Interfacoltà
Matematica applicata
2° anno

Prof. Mauro SPERA
Dipartimento di Informatica - Università di Verona

1. Elementi di topologia generale
   Lezioni I – III

2. Geometria differenziale delle curve nel piano e nello spazio
   Lezioni IV – VI

3. Geometria differenziale delle superficie
   Lezioni VII – XII

"I vari rami della Matematica pura e
applicata si annodano e si collegano fra loro
per vie inaspettate; e le idee, che traggono
origine da elementari problemi della pratica,
sembra debbano maturarsi per una lunga
elaborazione di pensiero, nelle regioni più alte
della teoria, prima che possano discendere feconde
nel campo di attività della vita."

Federigo Enriques

Appunti del corso di
GEOMETRIA

(Prof. M. Spera) Lezione **I**

Riferimenti bibliografici principali
(Biblioteca "B. Forte" - Ca' Vignal 2)

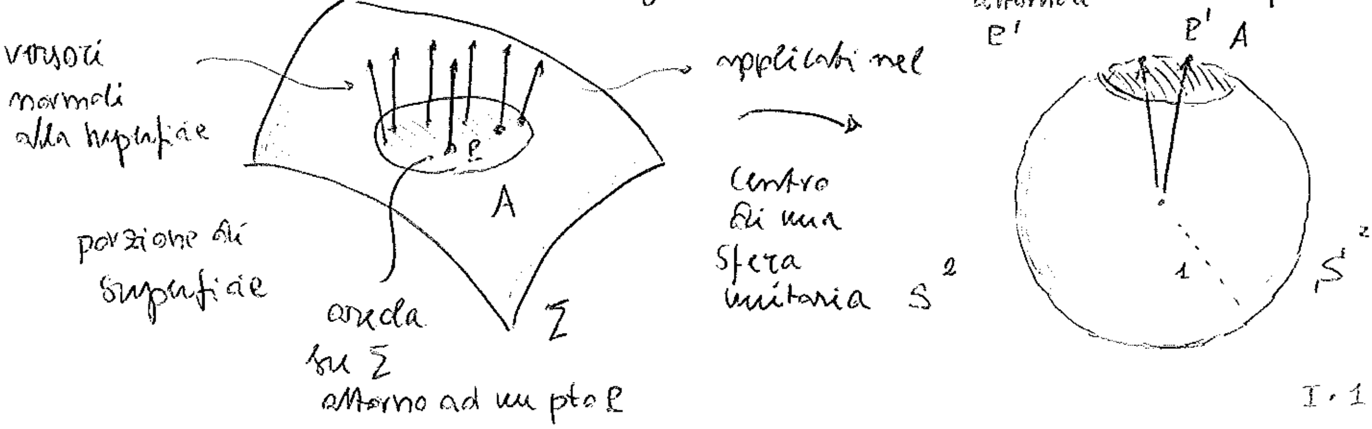
- M. Abate, F. Tovena "Curve e superfici" Springer, Milano, 2006
- A. Pressley "Elementary differential geometry" Springer, New York, 2000
- A. Gray, E. Abbena, S. Salamon "Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica®" 3rd Edition, CRC Press, Boca Raton, FL, 2006
- M. Do Carmo "Differential geometry of curves and surfaces" Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1976
- M. Lipschutz "Geometria differenziale" SCHAUM
- S. Lipschutz "Topologia"

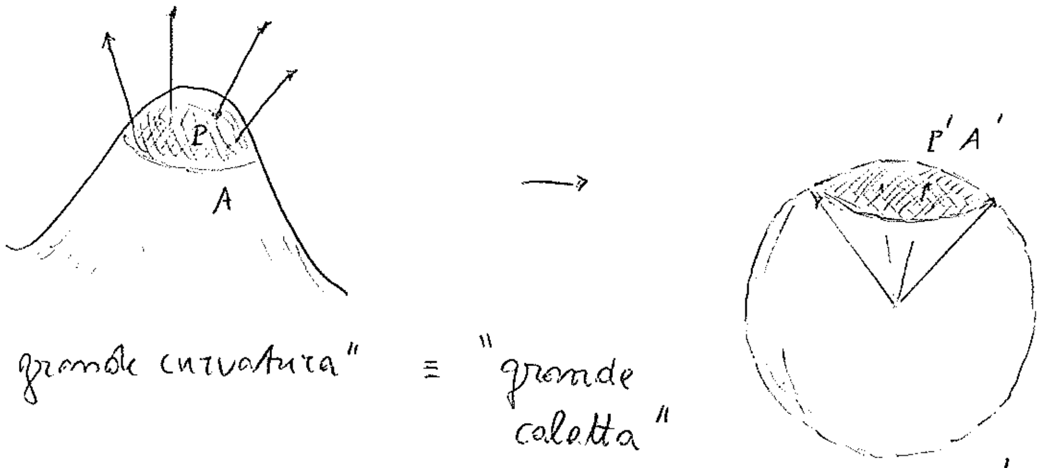
I Introduzione

Lo scopo principale del presente corso è lo studio della geometria differenziale (L. Bianchi) delle curve e superficie in $\mathbb{R}^3$ (vale a dire, delle proprietà geometriche accertabili mediante l'analisi).

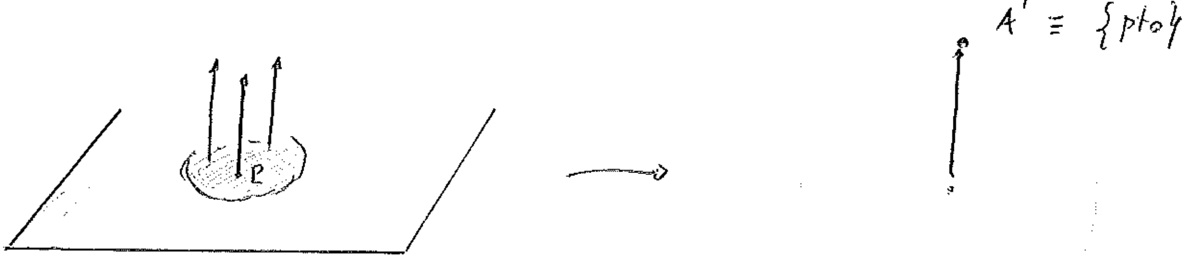
Il cuore del corso è costituito dalla nozione di curvatura di una superficie in $\mathbb{R}^3$ (K. F. Gauss)

L'idea di base è la seguente:

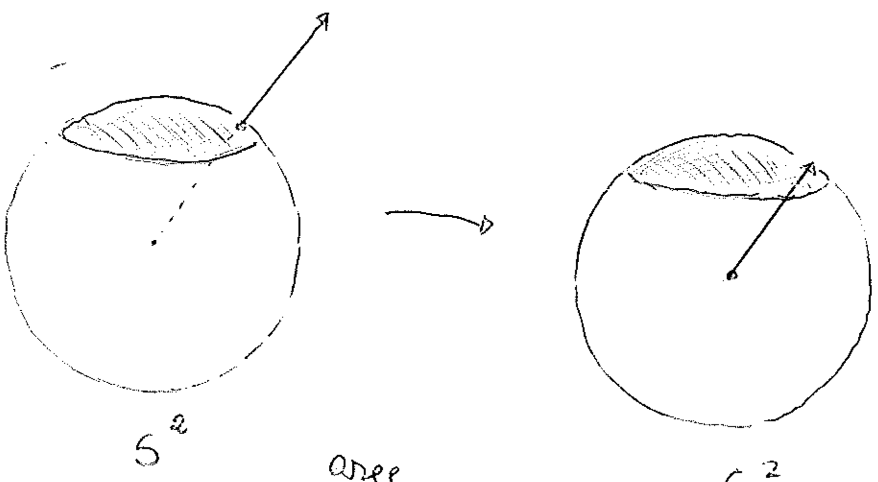




"grande curvatura" $\equiv$ "grande calotta"



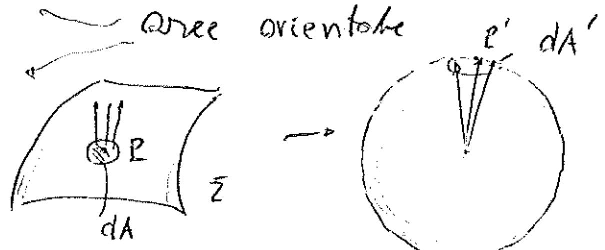
piano: "curvatura nulla"



aree inalterate...

Gauss: $K(P) := \lim_{A \to 0} \dfrac{A'}{A}$ — aree orientate

curvatura di Σ in P



per il piano $K = 0$, per una sfera unitaria $K = +1$

← per una superficie siffatta (paraboloide iperbolico...) a "sella" $K < 0$

Un'altra notevolissima conseguenza della teoria è il teorema di <u>Gauss - Bonnet</u> (globale):

per una superficie chiusa (compatta e senza bordo (v. oltre)

si ha

"curvatura integrale"

$$\boxed{\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma} K \, d\sigma}_{\text{☆ dato analitico}} = \chi(\Sigma) = 2 - 2g}$$

$\chi(\Sigma)$: caratteristica di <u>Eulero - Poincaré</u>

g: <u>genere</u> della superficie

(≡ "numero di buchi" o dei "manici")

☆ dato <u>topologico</u>, i.e. "invariante per "deformazioni continue" (v. anche oltre)

$g = 3$

Σ

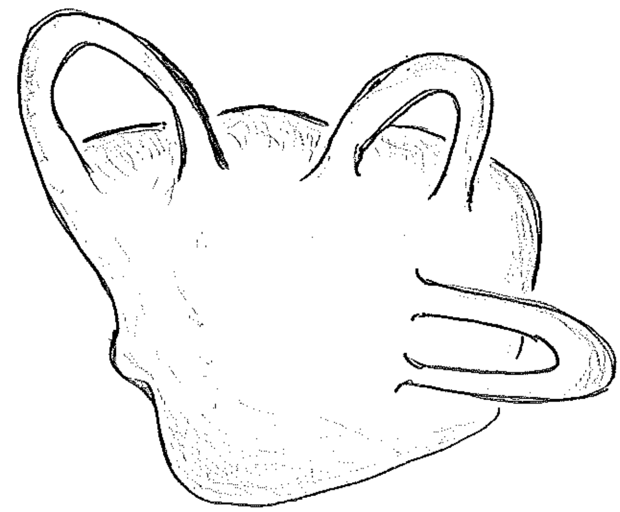
Esempio: S^2

$K = +1$ $\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{S^2} d\sigma =$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot 4\pi = 2\pi = 2 - 2g$$

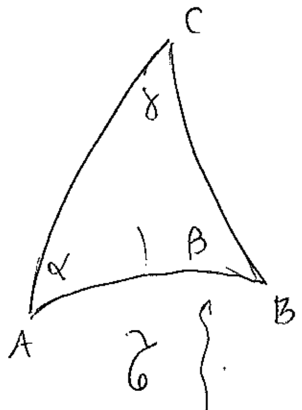
$$\Rightarrow \quad g = 0$$

(come è giusto che sia!)



Le conseguenze di questo teorema, in matematica, ma anche in fisica e in altri ambiti applicativi sono enormi.

La dimostrazione della formula precedente passerà per la seguente (Gauss)



triangolo geodetico

geodetica curva "più breve" su Σ congiungente i due punti

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi = \int_{T} K\, d\sigma$$

che ci dice quanto la somma degli angoli interni di un triangolo geodetico differisce dal valore "euclideo" π

In particolare, per la sfera (unitaria) si ha

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi = A(T) \quad (>0)$$

$\Rightarrow$ la somma degli angoli interni di un triangolo geodetico [i lati sono qui archi di cerchio massimo] $\Sigma > \pi$ [per un ottante di sfera si ha: $A = 3\frac{\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}$, come è giusto]

Per la pseudosfera ($K \equiv -1$) la somma precedente $\Sigma < \pi$ [triangolo "iperbolico"]

Per come è definita, K sembra dipendere sia dalla geometria "intrinseca" di Σ, che da quella "estrinseca" (cioè dal modo con cui Σ si dispone nello spazio).

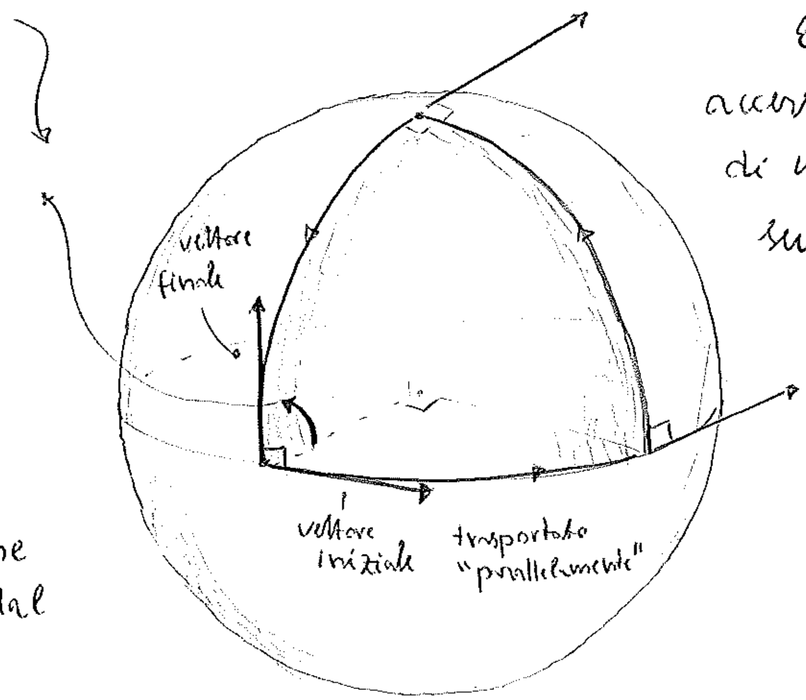
In realtà, essa dipende solo dalla prima (Theorema Egregium di Gauss), e precisamente dalla "metrica" (i.e. "distanza tra pti infinitamente vicini").

Detto altrimenti, superficie isometriche (cioè deformabili l'una nell'altra senza alterare le distanze tra i punti) hanno la stessa curvatura.

In particolare, il Theorema Egregium sancisce l'impossibilità di risolvere il problema geografico: non è possibile rappresentare "fedelmente" (ossia isometricamente) una porzione di superficie terrestre su una carta (la sfera, ma anche un ellissoide di rotazione, hanno curvatura positiva, un piano ha curvatura nulla).

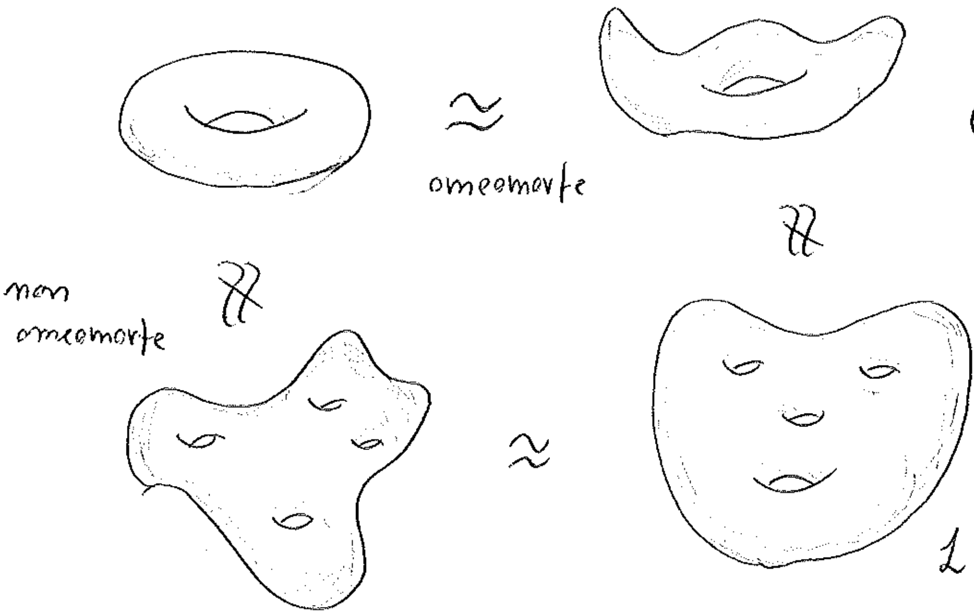
Strettamente collegata alla curvatura è la nozione di trasporto parallelo (Levi-Civita) di un vettore lungo un circuito chiuso

l'angolo di rotazione dipende dalla curvatura di Σ e dall'area della regione racchiusa dal circuito



È pertanto possibile accertarsi della curvatura di una superficie senza "uscire" da questa.

La topologia è quella branca della matematica che si occupa dello studio delle proprietà delle "figure" indipendenti dalla "forma" di queste, vale a dire "invarianti rispetto a trasformazioni biunivoche e bicontinue" (omeomorfismi) [dette appunto proprietà topologiche]. Queste dipendono, in definitiva, esclusivamente dal modo con cui i punti si "organizzano", dalle loro relazioni di "vicinanza". La topologia generale si particolarizza in vari ambiti (topologia algebrica, differenziale ecc).



Essa si rivela essenziale in tutti i rami della matematica. L'idea di base della topologia algebrica è quella di associare a "varietà" topologiche quantità numeriche o algebriche (gruppi ecc.) invarianti per omeomorfismi, in linea di principio più semplici da trattare, che permettono di distinguerle (cf. la caratteristica di Euler-Poincaré ...).

Cominceremo con ~~una~~ breve introduzione alla topologia generale, concentrandoci in particolare sulle nozioni di compattezza e connessione.

Spazi topologici

Sia X un insieme (non vuoto). Una <u>topologia</u> su X è una collezione $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi di X (un sottoinsieme dell'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$), detti <u>aperti</u>, che godono delle seguenti proprietà:

1. $X \in \mathcal{T}$, $\phi \in \mathcal{T}$ [X e ϕ sono <u>aperti</u>]

2. se U_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$ (insieme qualsiasi di indici), è <u>aperto</u> ($U_\alpha \in \mathcal{T}$), allora
$$\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} U_\alpha \in \mathcal{T}$$
[un'unione arbitraria di aperti è un aperto]

3. se U_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ sono aperti ($U_i \in \mathcal{T}$) allora $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ è aperto $\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}\right)$
[un'intersezione <u>finita</u> di aperti è un aperto]

La coppia $(X, \mathcal{T})$ è detta <u>spazio topologico</u>

[se non c'è pericolo di confusione, si omette il simbolo $\mathcal{T}$]

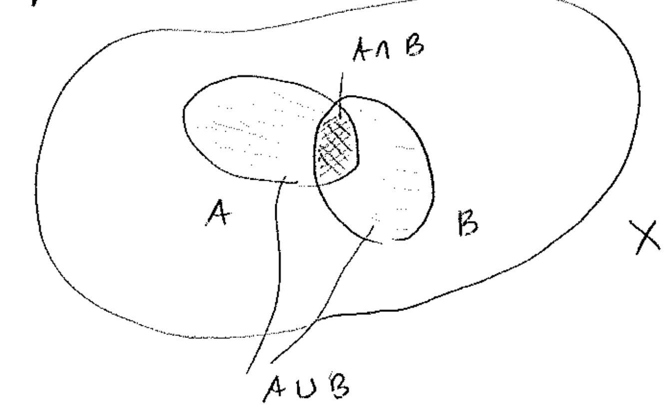
★ Gli elementi di uno spazio topologico sono detti <u>punti</u>.

<u>Esempi</u>: topologia <u>banale</u>: $\mathcal{T} = \{X, \phi\}$
topologia <u>discreta</u> $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$

Siano $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ spazi topologici.
una funzione $f : X \longrightarrow Y$ è detta <u>continua</u>
se $\forall\, V \in \mathcal{T}_Y$, $U := f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$
[vale a dire, se la <u>controimmagine</u> di un <u>aperto di Y</u> è un <u>aperto di X</u>]

Sia (X, τ) uno spazio topologico.
Un sottoinsieme $C \subset X$ è detto chiuso se $X \setminus C$ (complementare di C in X; si pone in generale $X \setminus B = B^c$) è aperto. Dalle leggi di de Morgan

(in generale:



$A^c = X \setminus A$ ecc.

$$(A^c)^c = A$$

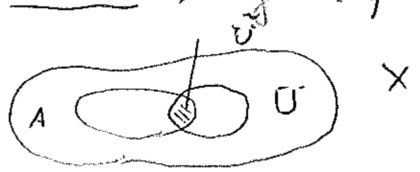
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$
)

Segue subito che 1'. X e $\emptyset$ sono chiusi.

2'. Un'unione finita di chiusi è un chiuso.

3'. Un'intersezione arbitraria di chiusi è un chiuso. Una struttura di spazio topologico può pertanto venire assegnata tramite gli insiemi chiusi, soddisfacenti gli assiomi 1', 2', 3'.



Dato $A \subset X$ qualsiasi (non vuoto), su A risulta definita in modo naturale la topologia relativa τ_A, per la quale $\tilde U \in \tau_A$ ($\tilde U$ è aperto) se $\tilde U = A \cap U$, con $U \in \tau$ (cioè gli aperti di questa topologia sono precisamente le intersezioni di A con gli aperti di X).
La coppia (A, τ_A) è detta sottospazio topologico di (X, τ).
L'inclusione $i_A : A \to X$, $x \mapsto x$ diviene automaticamente continua: $i_A^{-1}(U) = A \cap U$, che è aperto per definizione ($\forall U \in \tau$)

Def. 1. $f : X \to Y$ è un omeomorfismo se

f è biunivoca e bicontinua (cioè continua insieme alla sua inversa.

2. (X, τ_X) e (Y, τ_Y) (o, in breve, X e Y) si dicono omeomorfi (e si scrive $X \simeq Y$) se esiste un omeomorfismo $f : X \to Y$

È immediato verificare che $f : X \to Y$, biunivoca, è un omeomorfismo $\iff$ f è continua e aperta, ovvero $U \in \tau_X \Rightarrow f(U) \in \tau_Y$

Dim. Sia $f : X \to Y$ un omeomorfismo, $U \in \tau_X$. Allora $f(U) = (f^{-1})^{-1}(U) \in \tau_Y$ poiché f^{-1} è continua. Viceversa, se f è continua e aperta, si ha, $\forall\, U \in \tau_X$, $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U) \in \tau_Y$, e dunque f^{-1} è continua, sicché f è un omeomorfismo $\square$

Esempi: $i : (X, \tau) \longrightarrow (X, \tau)$ (identità).
$x \longmapsto x$

è banalmente un omeomorfismo, ma

τ_b : topologia banale

τ_{discr} topologia discreta

$i' : (X, \tau_{disc}) \longrightarrow (X, \tau_b)$
$x \longmapsto x$

non lo è (se X contiene almeno due punti): i' è continua, ma la sua inversa (insiemisticamente, è la stessa applicazione) non lo è.

In dettaglio, sia ad esempio

$$X = \{0, 1\}$$

$$\mathcal{P}(X) = \{\phi, \{0\}, \{1\}, \underbrace{\{0,1\}}_{X}\}$$

$i: \; x \longmapsto x$ $\qquad$ $0 \longmapsto 0$, $1 \longmapsto 1$

$$\underbrace{i^{-1}\{0\}}_{\substack{\text{aperto} \\ \text{per la topologia} \\ \text{discreta}}} = \underbrace{\{0\}}_{\substack{\text{non è aperto per} \\ \text{la topologia banale}}}$$

☆ Se $f : \underbrace{(X, \tau_{disc})}_{\substack{\text{sp. top. dotato} \\ \text{della top.} \\ \text{discreta}}} \longrightarrow \underbrace{(Y, \tau_Y)}_{\substack{\text{sp. topologico} \\ \text{arbitrario}}}$

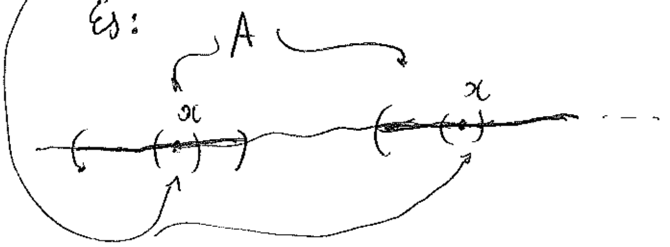
è una f. qualsiasi, f è continua

(infatti se $U \in \tau_Y$, $f^{-1}(U) \in \tau_{disc}$)

☆ La topologia usuale della retta reale

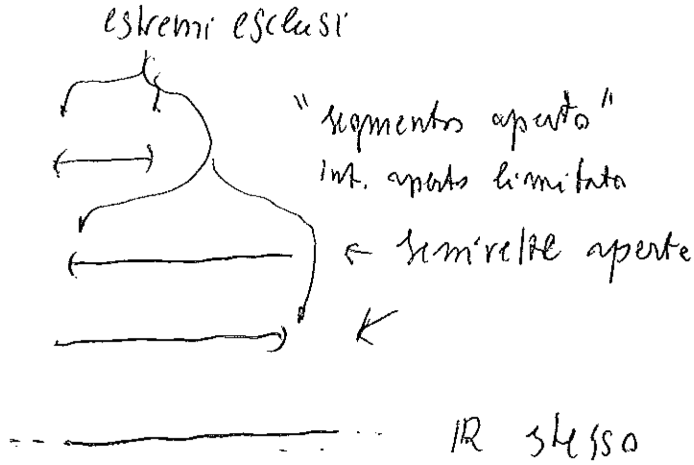
$A \subset \mathbb{R}$ è aperto se è unione di intervalli aperti (†) (eventualmente vuota). Ciò è equivalente alla proprietà seguente: $\forall x \in A$, $\exists\, I \ni x$, I intervallo aperto $\subset A$

Es:



Valgono ovviamente gli assiomi di spazio topologico...

(†) intervalli aperti:

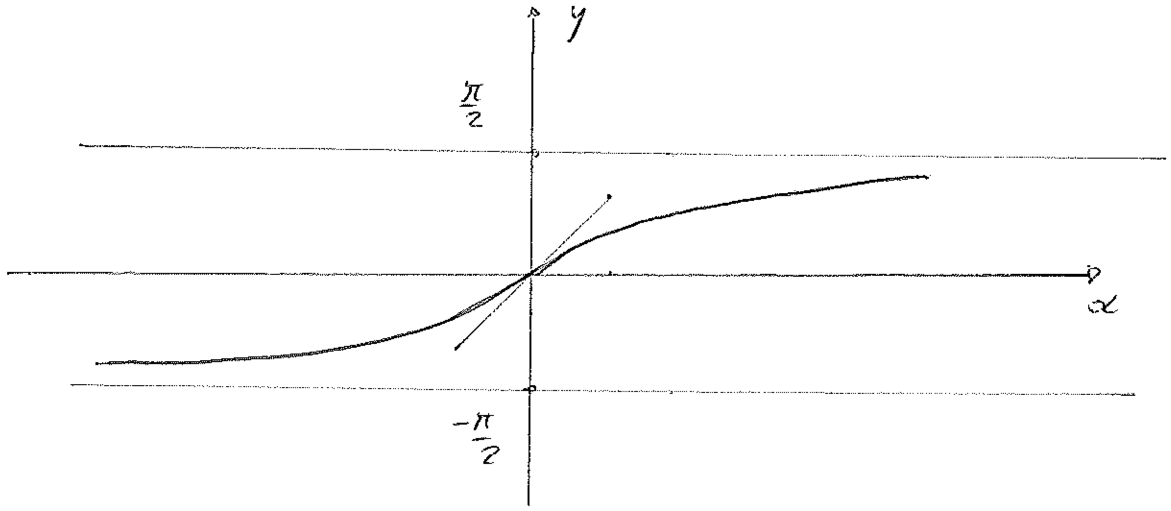


Notare che ogni aperto è unione di intervalli aperti limitati...

◇ $\mathbb{R} \simeq (-1, 1)$

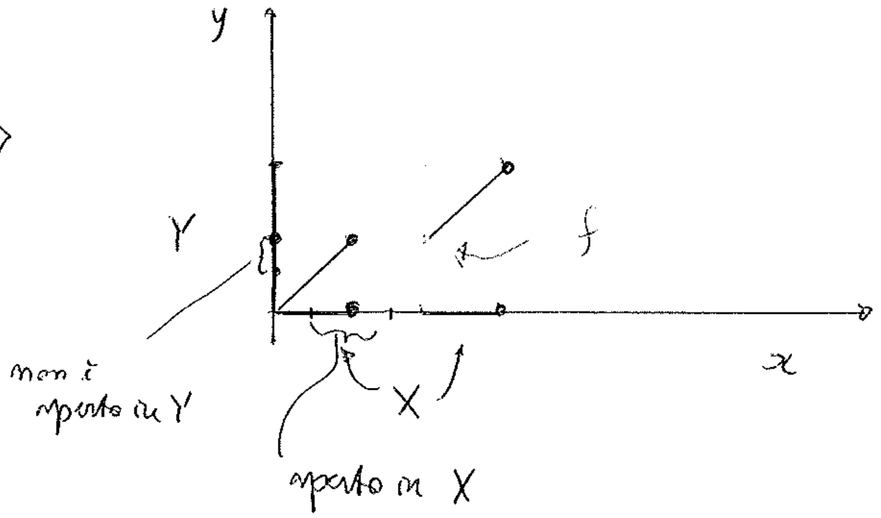
$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$

[la nozione astratta di continuità sussume quella usuale, v. anche oltre]



$$y = \frac{2}{\pi} \arctan x$$

◇



$X = [0,1] \cup (2,3]$

$Y = [0,2]$

$f : X \to Y$

$x \mapsto x \qquad x \in [0,1]$

$x \mapsto x-1 \qquad x \in (2,3]$

Siano X e Y dotati della topologia relativa (indotta da quella di $\mathbb{R}$.)

$f : X \to Y$ è biunivoca, f è continua, ma f^{-1} non lo è. ; ciò è evidente dall'analisi. Osserviamo che l'aperto $(+\frac{1}{2}, 1] = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \cap X$ (per ex.) è tale che $f((\frac{1}{2}, 1]) = (\frac{1}{2}, 1]$, che non è un aperto in Y. f non è dunque aperta, e non può essere un omeomorfismo.

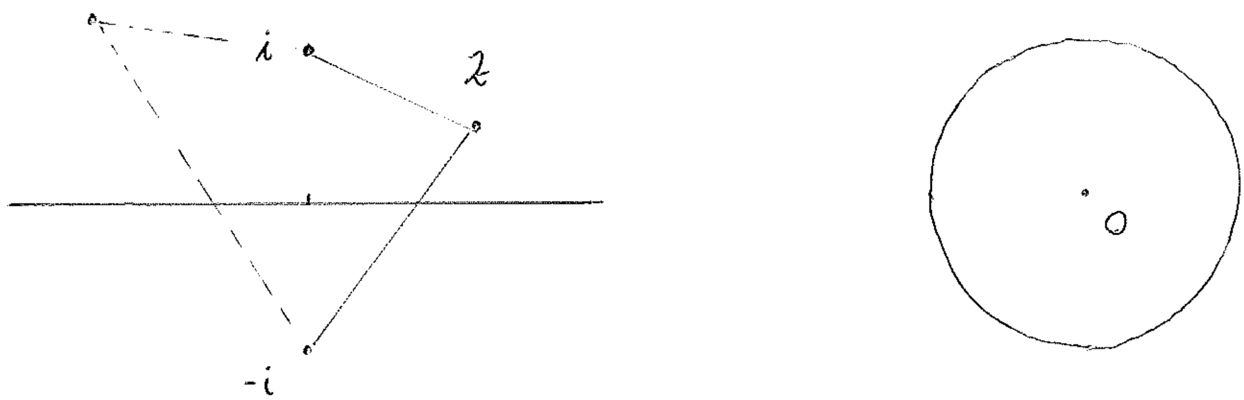
⚠ (ciò non dimostra che X e Y non sono omeomorfi (ovvero che non esiste nessun altro omeomorfismo $f: X \to Y$), anche se tale affermazione è vera (v. oltre .. Y è connesso, X no ; oppure Y è compatto, X no..)

◇ $\mathbb{H} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y > 0 \} \equiv \{ z \in \mathbb{C} \ / \ \operatorname{Im} z > 0 \}$

semipiano superiore (semipiano di Poincaré)

$D = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ |z| < 1 \}$ disco di Poincaré

Si ha $\mathbb{H} \approx D$ [esempio importantissimo in geometria iperbolica, v. oltre]



$z \in \mathbb{H} \iff |z - i| < |z - (-i)| = |z + i|$

distanza .. v. anche oltre

$\Rightarrow \ w := \dfrac{z - i}{z + i}$ soddisfa $|w| = \left| \dfrac{z-i}{z+i} \right| < 1$

(in particolare $i \longmapsto 0$) L'inversa è $z = i \dfrac{w+1}{1-w}$

$(|w| < 1)$. Le due applicazioni sono entrambe continue.

Spazi metrici

Sia $X \neq \emptyset$. Sia data una funzione

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{(distanza, o metrica)}$$
$$(x, y) \longmapsto d(x,y)$$

che goda delle seguenti proprietà:

1: $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$ (positività)
   e $=$ vale $\Leftrightarrow x = y$

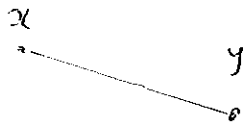
2. $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x, y \in X$ (simmetria)

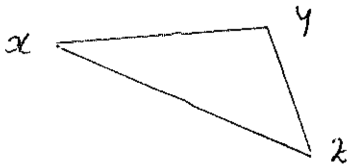
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x, y, z \in X$
   (disuguaglianza triangolare)

La coppia (X, d) è detta spazio metrico

Esempio: $(\mathbb{R}^n, d_E)$ $\qquad d_E(x,y) = \|x - y\| = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$

d_E: distanza euclidea $\qquad x = (x_1 \ldots x_n)$, $y = (y_1 \ldots y_n)$





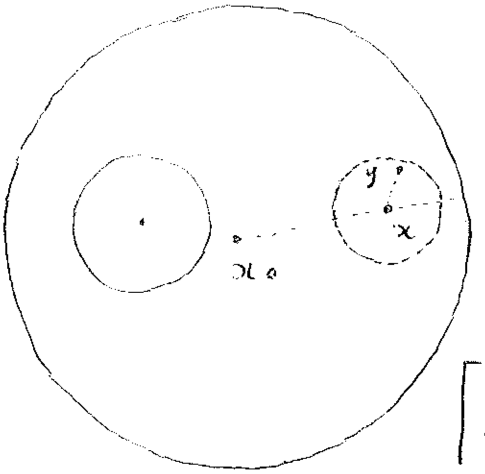
Sia $\delta > 0$, $x_0 \in X$

$$B_\delta(x_0) := \{ x \in X \ / \ d(x, x_0) < \delta \}$$

è detta sfera (o palla; in dim 1: intervallo; in dim 2: disco) aperta di centro x_0 e raggio δ.

Uno spazio metrico diviene uno spazio topologico (X, τ_d) [topologia indotta dalla distanza d] se si dichiarano aperti le unioni di sfere aperte, vale a dire U è aperto se è unione di sfere aperte, o, equivalentemente, $\forall x \in U$ esiste $B_\delta(x) \subset U$ $(\delta > 0)$ [ogni punto di U è centro di una palla tutta contenuta in U].

* ogni sfera aperta è un aperto. verifichiamo che ogni pto è centro di una sfera contenuta nella sfera data



[dim: sia $\delta' \leq \delta - d(x_0, x)$

sia $y \in B_{\delta'}(x)$. Si ha

$$d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + \underbrace{d(x, y)}_{< \delta'}$$

$$< d(x_0, x) + \delta - d(x_0, x) = \delta \quad]$$

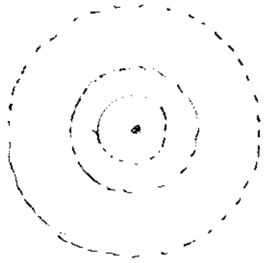
[Nota: le sfere aperte costituiscono un esempio di base per la topologia data]

Osservazione: ponendoci in $(\mathbb{R}^n, d_E)$, consideriamo

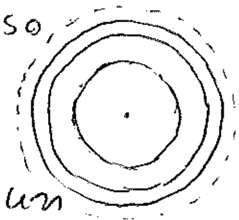
$$\overline{B}_\delta(x_0) = \{ x \in \mathbb{R}^n \,/\, d_E(x, x_0) \leq \delta \} \qquad \delta \geq 0,$$

la sfera chiusa di centro x_0 e raggio $\delta \geq 0$.

Osserviamo che $\overline{B}_\delta(x_0)$ è un insieme chiuso (il complementare è un aperto...). Inoltre, da



$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{B_{\frac{1}{n}}(x_0)}_{\text{sfere aperte}} = \{x_0\} \leftarrow \text{non è aperto}$$



e $$\bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\overline{B}_{1-\frac{1}{n}}(x_0)}_{\text{sfere chiuse}} = B_1(x_0) \leftarrow \text{non è chiuso,}$$

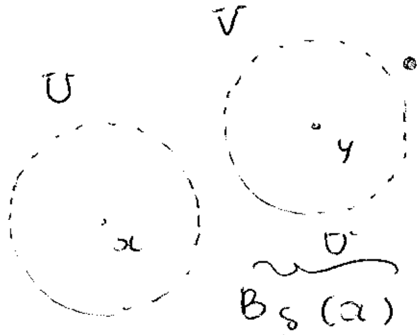
concludiamo che, in generale, l'intersezione di un insieme ~~arbitrario~~ infinito di aperti non è un aperto, e l'unione di un insieme arbitrario di chiusi non è necessariamente un chiuso.

◇ Proprietà di Hausdorff

Dato uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ e $x \in X$, definiamo intorno di x un aperto contenente x

[altri definiscono intorno un insieme contenente un aperto contenente x]

Uno spazio topologico è detto di Hausdorff se, dati due punti distinti qualsiasi, essi ammettono intorni disgiunti; in modo formale. Siano x, y, $x \neq y \in X$. $\exists\, U \ni x$, $U \in \mathcal{T}$, $V \ni y$, $V \in \mathcal{T}$, tali che $U \cap V = \emptyset$.

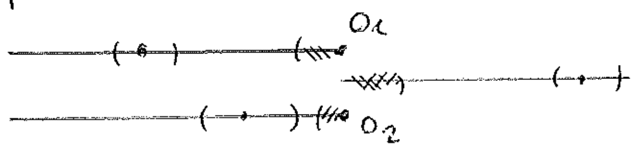


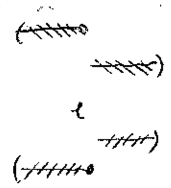
Oss. Ogni spazio metrico è di Hausdorff

[Dim: Siano $x, y \in X$, $x \neq y$. Si ponga $\delta = d(x,y)$. Le sfere aperte $\overbrace{B_{\frac{\delta}{2}}(x)}^{U}$ e $\overbrace{B_{\frac{\delta}{2}}(y)}^{V}$ sono disgiunte. Se così non fosse, sia $z \in U \cap V$; si avrebbe $d(x,z) < \frac{\delta}{2}$, $d(y,z) < \frac{\delta}{2} \Rightarrow d(x,z) + d(y,z) < \delta = d(x,y)$, che è assurda.]

Oss. Uno spazio topologico banale contenente almeno due punti non è di Hausdorff.

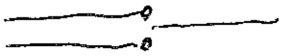
• Questo esempio è notevole: (è uno spazio localmente euclideo (ogni punto ammette un intorno omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$, qui $n=1$) ma non di Hausdorff





non sono mai disgiunti

Osservazione : lo spazio

$X =$ 

non ammette alcuna metrica che induca la sua topologia (ché allora sarebbe di Hausdorff).

Commento

In generale, un insieme qualsiasi X può formalmente dotarsi della struttura di spazio metrico, basta porre

$$(*) \quad d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

$$x \in X, \quad y \in X$$

d verifica banalmente le proprietà 1, 2, 3.

Qual è la topologia indotta da d ?

Osserviamo che $B_{\frac{1}{2}}(x) = \{x\} \quad \forall x \in X$

NOTARE !

$\Rightarrow \{x\}$ è aperto , sicché un qualsiasi sotto-insieme di X è aperto (un'unione arbitraria di aperti è un aperto)

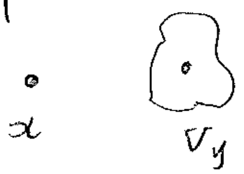
$\Rightarrow$ la risposta è : la topologia discreta.

[la d definita da $(*)$ è infatti chiamata metrica discreta]

Prop. Sia (X, τ) uno spazio topologico di Hausdorff. Allora ogni punto è chiuso (i.e. $\forall x \in X$, $\{x\}$ è un insieme chiuso)

Dim. Sia $x \in X$. Se $X = \{x\}$ avremmo già concluso. Se $y \in X$, $y \neq x$, esiste, per la proprietà di Hausdorff, un intorno $V_y \ni y$ tale che $x \notin V_y$.

$X \setminus \{x\}$

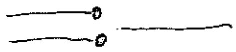


Pertanto $V_y \subset X \setminus \{x\}$

Ma allora $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \neq x} V_y$ che è aperto (è un'unione di aperti). In definitiva

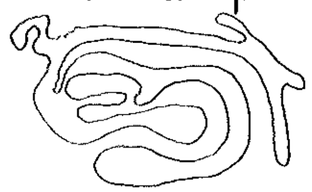
$$\{x\} = X \setminus (X \setminus \{x\}) \text{ è chiuso. } \square$$

Osservazioni. 1. In uno spazio topologico banale con almeno due punti, questi non danno insiemi chiusi, portanto (come già sappiamo) tale spazio non è di Hausdorff.

2. Il viceversa della proposizione è falso: nello spazio considerato precedentemente ($X =$ ) ogni punto è chiuso, ma lo spazio non è di Hausdorff.

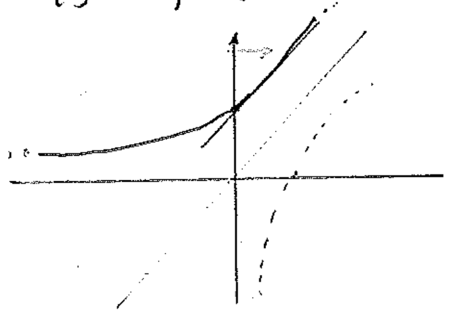
◇ Altri esempi di spazi topologici e omeomorfismi

- un sottospazio topologico di $\mathbb{R}^2$ omeomorfo a S^1 = circonferenza unitaria in $\mathbb{R}^2$ ≡ numeri complessi di modulo 1 è detto arco di Jordan



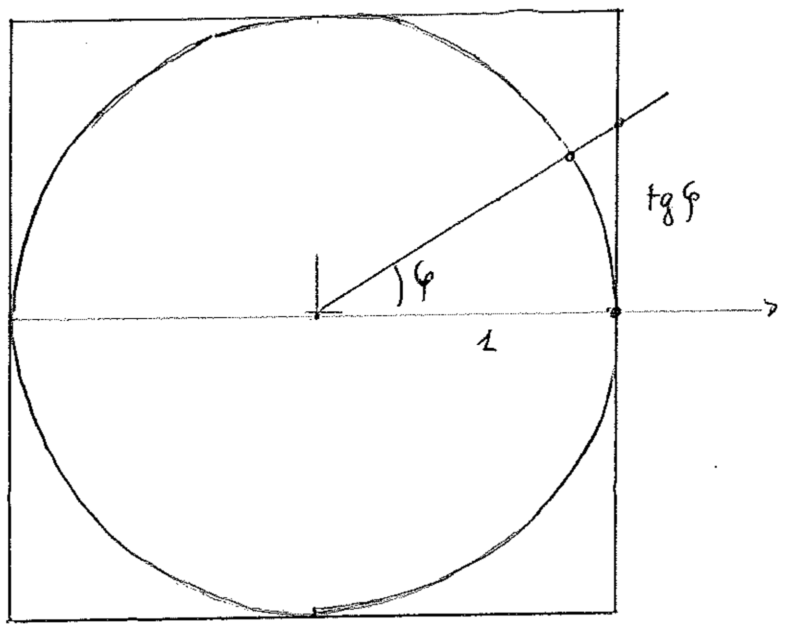
- $\{y > 0\} \approx \mathbb{R}$: sia $f: x \longmapsto e^x = y$

$f^{-1}: \underset{\vee\atop 0}{y} \longmapsto \log y$



◇ 1-cella : sp. top $\approx D^1 \equiv I = [0,1]$ int. chiuso e limitato

◇ 2-cella : sp. top $\approx D^2 \equiv$ disco chiuso



Un omeomorfismo tra il quadrato unitario chiuso e D^2 (in coordinate polari)

$$(\rho, \varphi) \longmapsto \Big(\underbrace{\overbrace{\sqrt{1+tg^2\varphi}}^{|\cos\varphi|^{-1}} \cdot \rho}_{\rho'} , \varphi \Big)$$

$$\overset{\rho'}{\equiv}(\rho, \varphi) \longmapsto \left(\frac{\rho}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} , \varphi \right) = (\rho\,|\cos\varphi| , \varphi)$$

$(0 \longmapsto 0)$

★ $X \sqcup Y$: unione disgiunta di X e Y

(il concetto è intuitivo... in modo formale, per es. $X \sqcup Y = X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$

(es. $X = \bigcirc$ $\quad X \sqcup X = \bigcirc \; \bigcirc$)

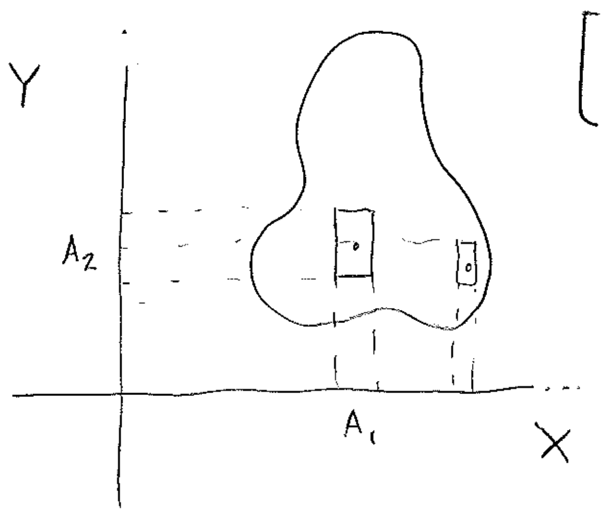
Se (X, τ_X) e (Y, τ_Y) sono spazi topologici,

$X \sqcup Y$ è dotato della topologia seguente (denotata con $\tau_X \sqcup \tau_Y$)

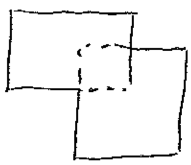
$A \subset X \sqcup Y$ è aperto se $A = A_1 \sqcup A_2$, $\quad A_1 \in \tau_X$, $A_2 \in \tau_Y$

★ Topologia prodotto. Se (X, τ_X) e (Y, τ_Y) sono spazi topologici, $X \times Y$ (prodotto cartesiano) è dotato della topologia prodotto $\tau_X \times \tau_Y$ così definita

$A \subset X \times Y$ è aperto se è unione di "rettangoli aperti" $A_1 \times A_2$, $A_1 \in \tau_X$, $A_2 \in \tau_Y$



[i.e. gli $A_1 \times A_2$ formano una base per la topologia in questione. ⚠


$\in \tau_X \times \tau_Y$

☆ Topologia quoziente

Sia (X, τ) uno spazio topologico, e

$\sim$ una relazione di equivalenza.

Sia $[x] \in X/_\sim$ la classe di equivalenza

individuata da $x \in X$, e

$$\pi : X \longrightarrow X/_\sim \quad , \quad x \longmapsto \pi(x) := [x]$$

la proiezione canonica.

Definiamo la topologia quoziente $\tau_\sim$ su

$X/_\sim$: $\quad U \subset X/_\sim$ è aperto $(U \in \tau_\sim)$

se $\quad \pi^{-1}(U) \in \tau \quad$ ($\pi^{-1}(U)$ è aperto in X)

[è la topologia più fine che rende continua

$$\pi : X \longrightarrow X/_\sim \text{]}$$

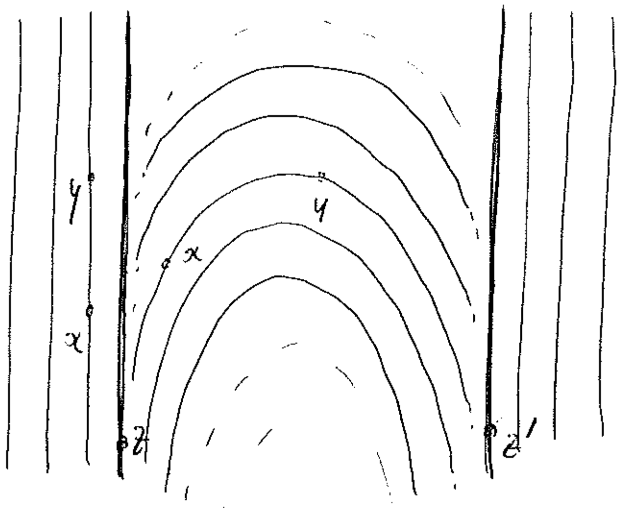
v. oltre! [Quozienti di spazi compatti, connessi

sono a loro volta compatti, connessi, risp.]

☆ Non è così per la condizione di Hausdorff, in generale

Esempio (cf. e.g. Jänich Topologia)

$X = \mathbb{R}^2$



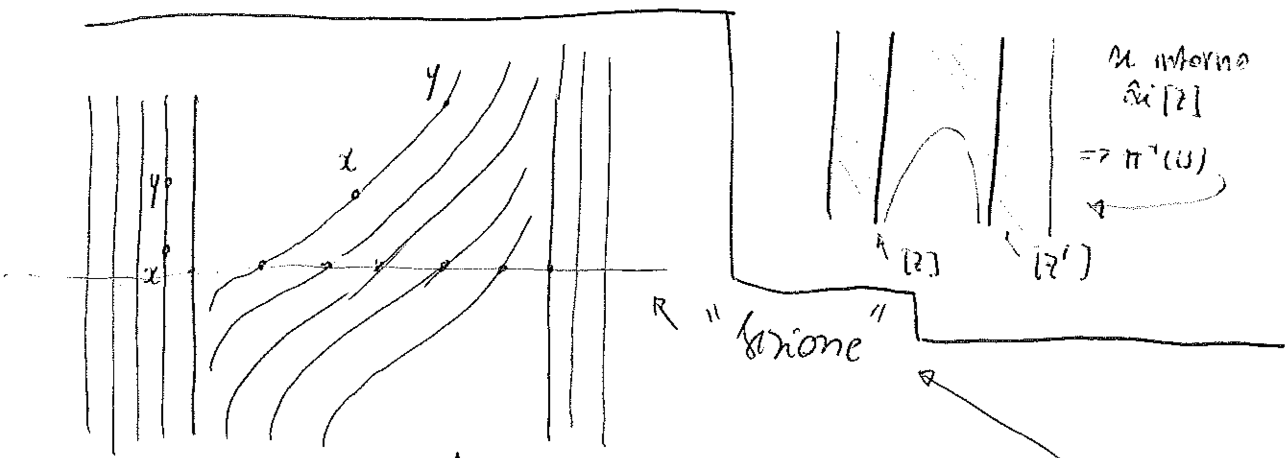
la figura è invariante per traslazioni "verticali"

$x \sim y \iff x$ e y appartengono alla stessa "foglia"

* $X/_\sim$, con la topologia quoziente, <u>non è</u> uno spazio di Hausdorff :

[le orbite sono chiuse, e questa è una cond. necessaria per H., ma non basta]

* <u>Non esistono intorni disgiunti di [z] e [z']</u>



invece $X/_\sim$ è di Hausdorff

Di fatto $X/_\sim \approx \mathbb{R}$, con la sua topologia

★ Sia (X, τ) uno spazio topologico, e $\alpha : X \to X$ un omeomorfismo.

Sia $\sim$ la relazione di eq. su $X \times [0,1]$ così definita: $(x, 0) \sim (\alpha(x), 1)$

[gli altri pti sono equiv. a se stessi]

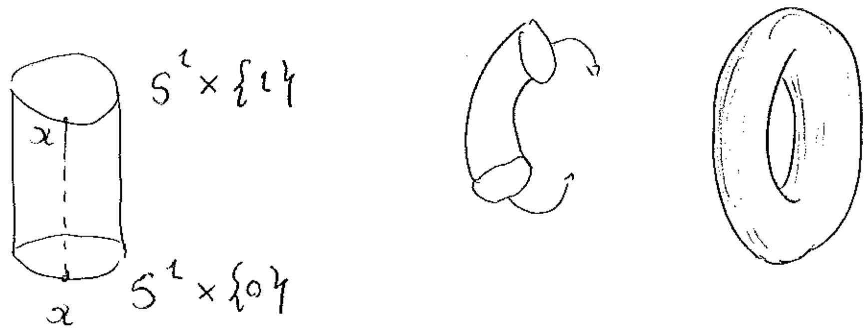
Sia $$\frac{X \times [0,1]}{\sim} \equiv X \times [0,1] / \alpha$$

[spazio di identificazione]

Esempi: ★ $X = S^1$, $(x, 0) \sim (x, 1)$

($i.e.$ $\alpha = id$)

$X \times [0,1] / \alpha$ è un <u>toro</u> ($\approx S^1 \times S^1$)



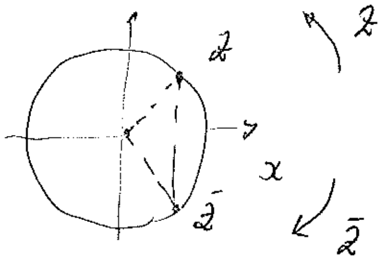
Nota: ovviamente $X \times [0,1]$ è dotato della topologia prodotto naturale...

$X = [-1,1] \qquad \alpha(x) = -x$

∗ Nastro di Möbius

∗ ∗ ∗

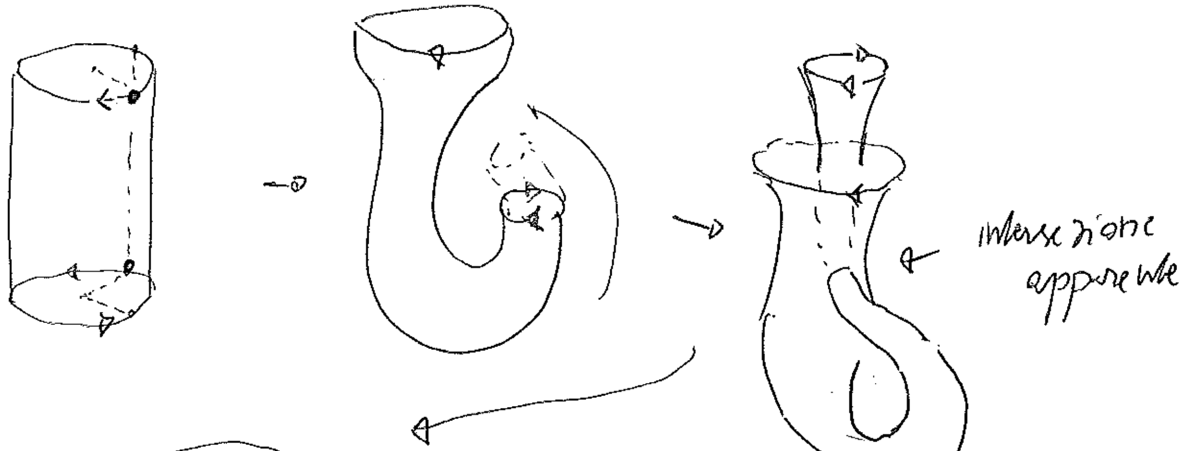
$X = S^1$

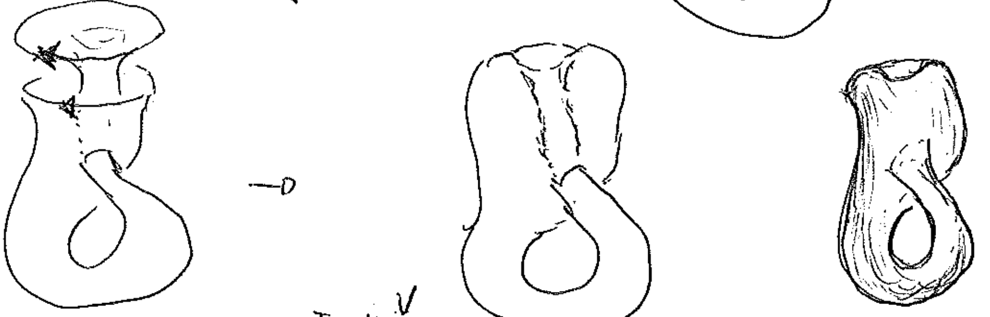


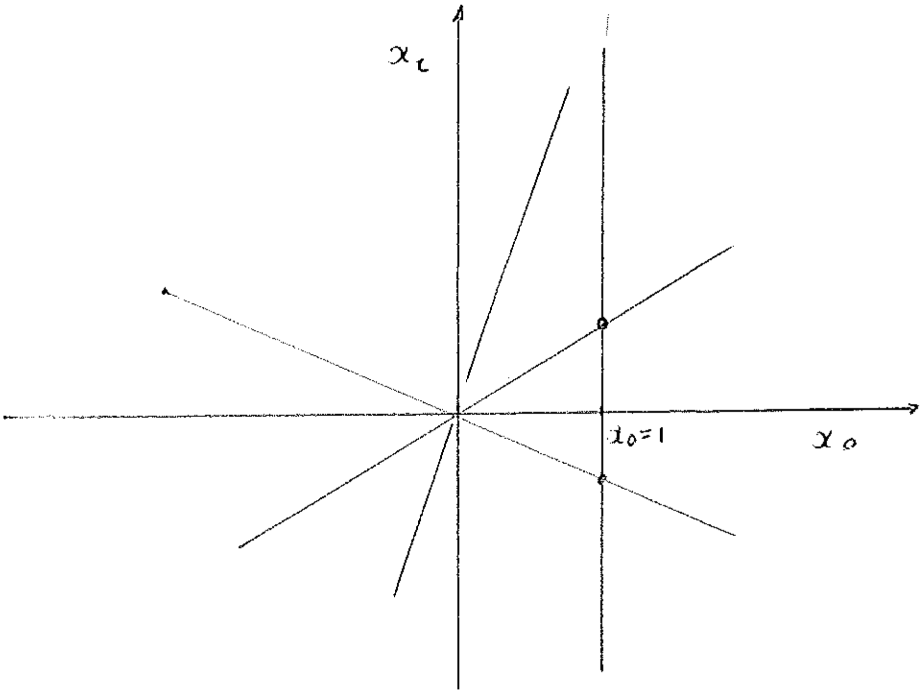
$\alpha : z \to \bar{z}$

(riflessione rispetto all'asse x) [si inverte l'orientamento]

$X \times [0,1] / \alpha$: ∗ Bottiglia di Klein
(otre, toro di Klein)







$\mathbb{RP}^1$

retta proiettiva reale

$\equiv$ rette per l'origine in $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{RP}^1 = \frac{\mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}}{\sim}$$

$[x_0, x_1]$ coordinate omogenee

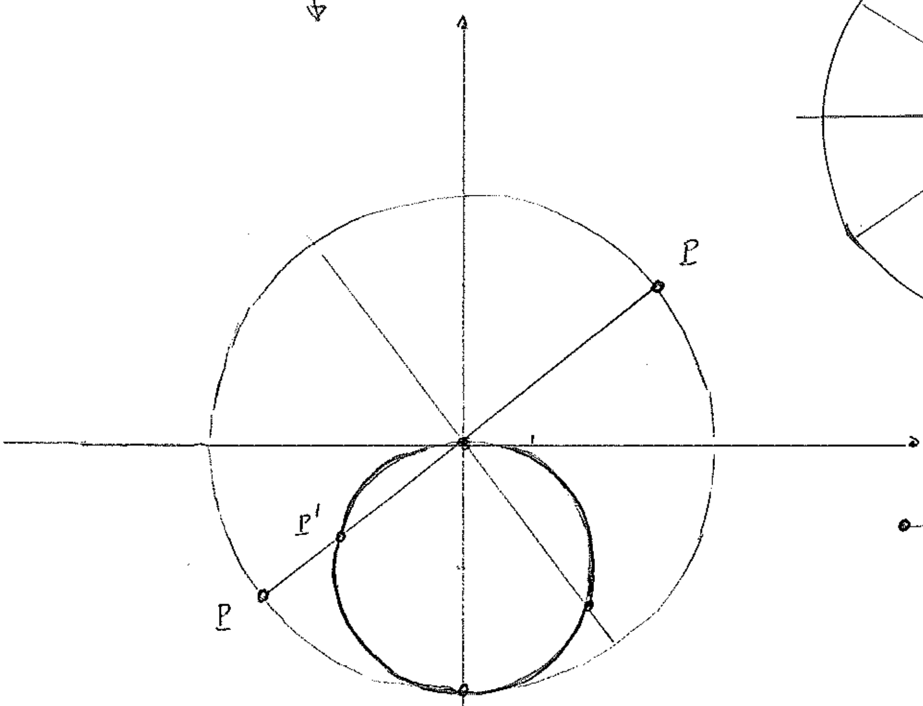
$(x_0, x_1) \sim (x_0', x_1') \iff x_j = \rho x_j'$, $\rho \neq 0$

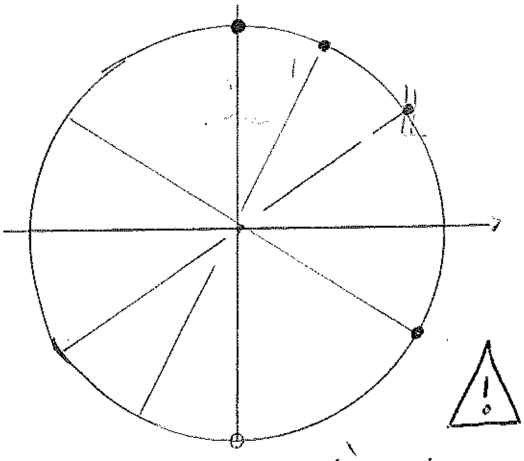
$$x = \frac{x_1}{x_0} \quad (\text{se } x_0 \neq 0)$$

coordinata affine

$[0, 1]$ pto all'∞ $\equiv$ l'asse x_1 $(x_0 = 0)$

$$\mathbb{RP}^1 \approx S^1$$



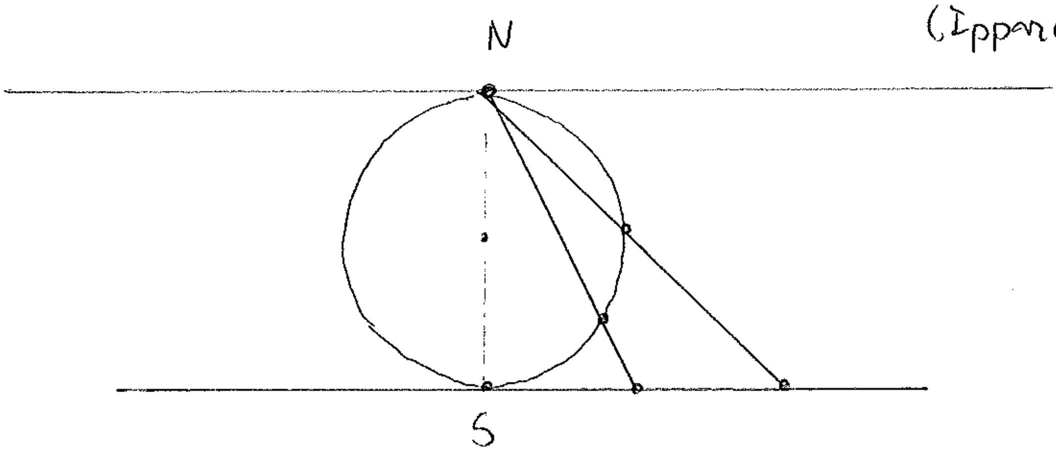


È certamente vero che $\mathbb{RP}^1 \leftrightarrow [0, 1)$ biunivoca

Perché non sono omeomorfi?

v. anche oltre

Proiezione stereografica
(Ipparco II° sec a.C.)



N corrisponde al pto all'∞ ...

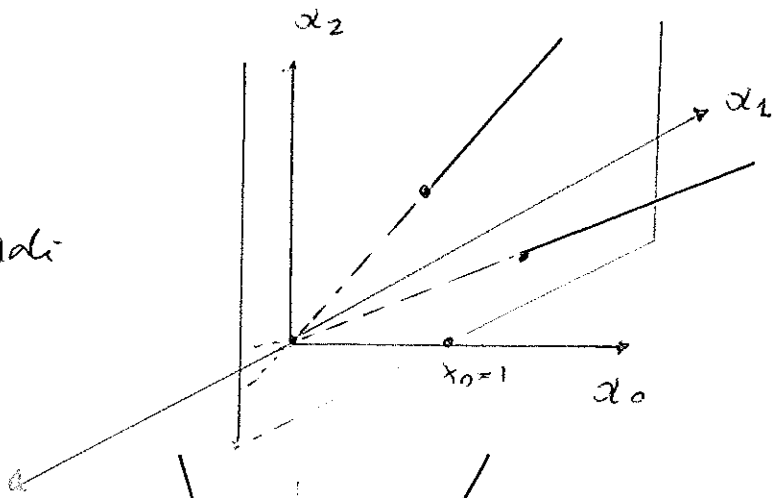
$\mathbb{RP}^2 \equiv$ stella delle rette per l'origine di $\mathbb{R}^3$
(vettore nullo)

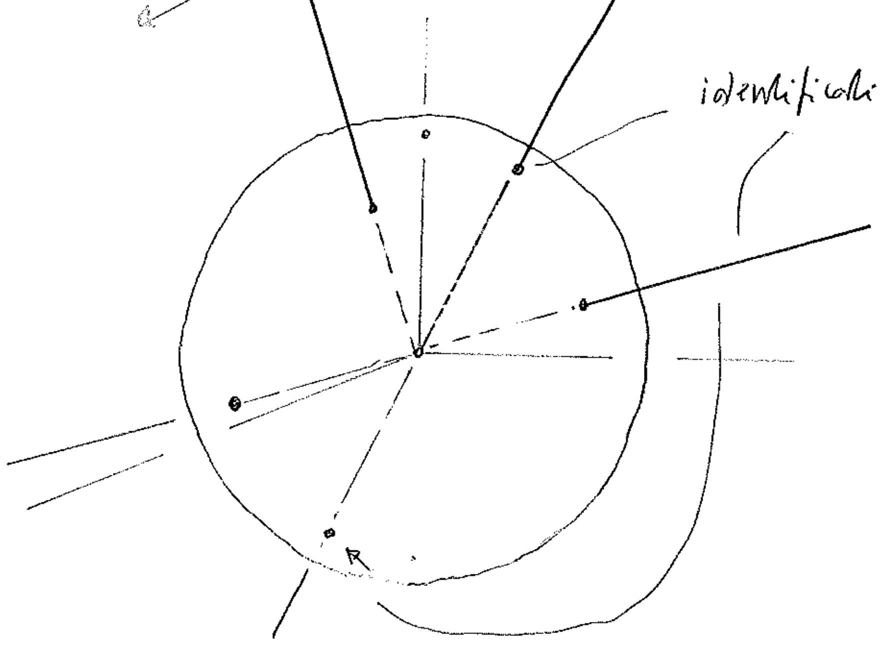
$\wr\wr$

$S^2/_{\sim}$

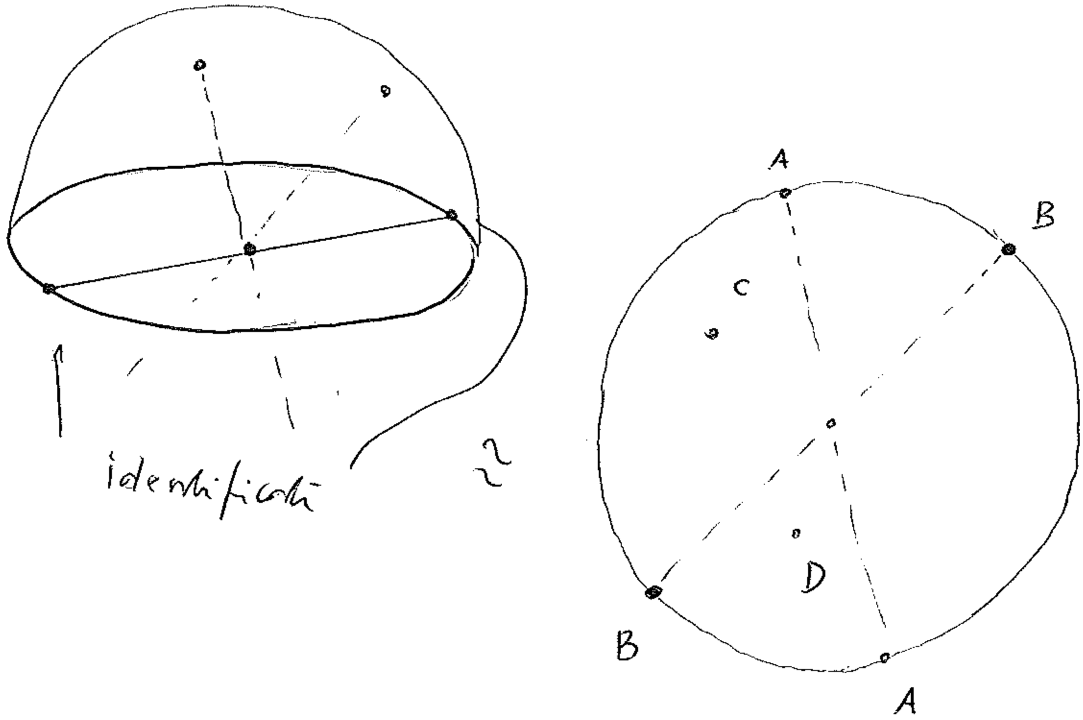
$\uparrow$

punti antipodali identificati





$\mathbb{R}\mathbb{P}^2 \approx$



disco con i punti diametralmente opposti del bordo identificati

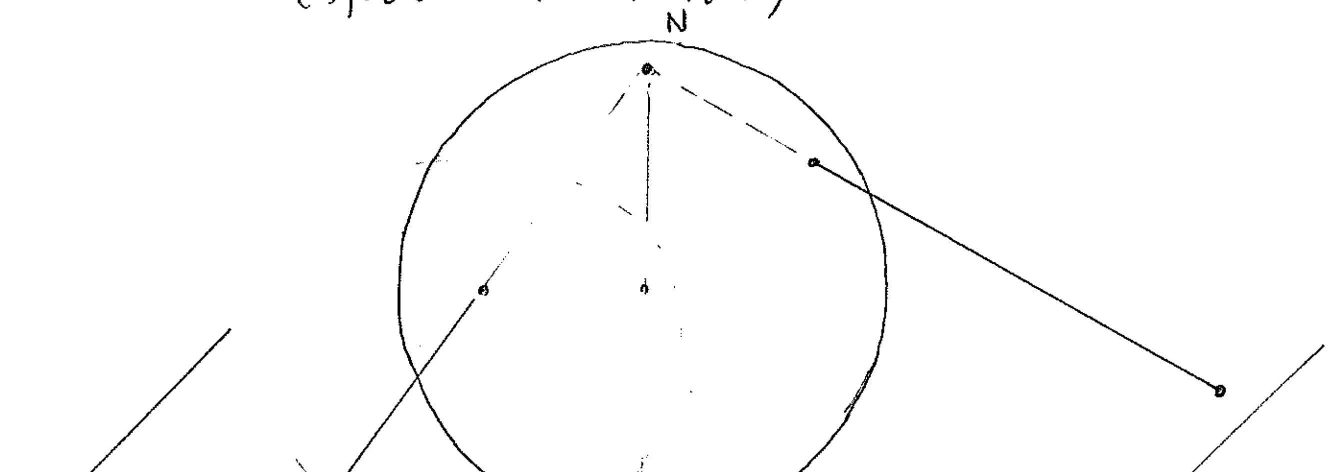
invece $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \approx \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$\approx$

S^2 (Sfera di Riemann)

proiezione stereografica

v. oltre...



| Richiami sugli spazi metrici (noti dall'Analisi)

Sia (X, d) uno spazio metrico.

a) Una successione $\{x_i\}_{i=1,2..}$ in X (insieme di punti etichettati da $\mathbb{N}^* = \{1, 2 \dots\}$ o, più esattamente, una funzione $\mathbb{N}^* \to X$) si dice di Cauchy se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \bar{\imath} = \bar{\imath}(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tale che $\forall i, j \in \mathbb{N}^*$, $i, j > \bar{\imath}$, risulta

$$d(x_i, x_j) < \varepsilon$$

b) Essa si dice convergente a $x_0 \in X$ (oppure: $\{x_i\}$ converge a x_0, notazione: $x_i \to x_0$, $i \to \infty$) se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ $\bar{\imath} = \bar{\imath}(\varepsilon, x_0)$ tale che $\forall i > \bar{\imath}$, $d(x_i, x_0) < \varepsilon$ (cioè $x_i \in B_\varepsilon(x_0)$ per $i > \bar{\imath}$).

x_0 è detto limite di $\{x_i\}$ e si scrive anche $x_0 = \lim_{x \to \infty} x_i$

Una successione convergente è di Cauchy

(ciò segue da $d(x_i, x_j) < d(x_i, x_0) + d(x_j, x_0)$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, se $i, j > \bar{\imath} = \bar{\imath}(\frac{\varepsilon}{2}, x_0) \dots$).

Il viceversa è falso [in $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, si consideri una successione convergente ad un numero irrazionale ...]

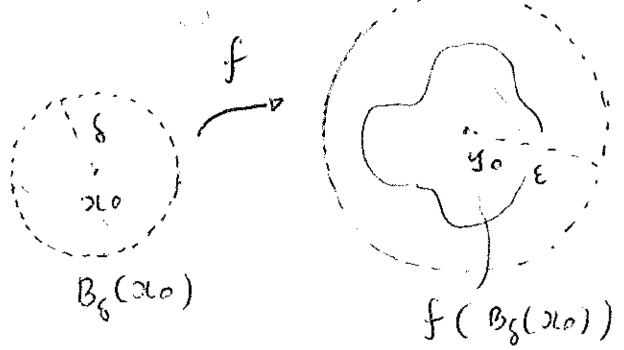
Uno spazio metrico in cui ogni successione di Cauchy converge si dice completo. Ex: $\mathbb{R}^n$

★ Continuità negli spazi metrici

Si ricordi che dati due spazi metrici (X, d_X), (Y, d_Y)

$f: X \to Y$ è continua in $x_0 \in X$ se $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists$ $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tale che $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(\underbrace{f(x_0)}_{= y_0})$



[Si pensi al caso più semplice $X = Y = \mathbb{R}$ ...]

f è continua se lo è in ogni punto

Prop. Sia $f: X \supset \mathcal{U} \longrightarrow Y$ (X, Y spazi metrici)
aperto

f è continua in x_0 $\iff$ data $x_i \to x_0$, è $f(x_i) \to f(x_0)$ $\left[x_0 = \lim_{i \to \infty} x_i \Rightarrow f(x_0) = \lim_{i\to\infty} f(x_i) \right]$

$\boxed{\Rightarrow}$ Sia f continua in x_0. Sia dato $\varepsilon > 0$. Esiste $\delta > 0$ tale che $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$. Dato che $x_i \to x_0$, $\exists$ i_0 tale che $i > i_0 \Rightarrow$ $x_i \in B_\delta(x_0)$. Per tali i, $f(x_i) \in B_\varepsilon(f(x_0))$, sicché $f(x_i) \to f(x_0)$

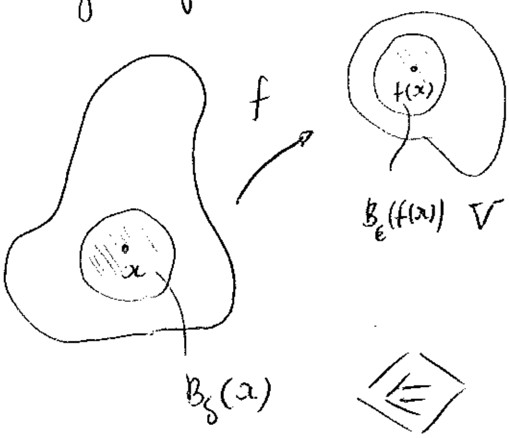
$\boxed{\Leftarrow}$ Sia $x_i \to x_0$, $f(x_i) \to f(x_0)$, ma f non sia continua in x_0: allora $\exists$ $\varepsilon_0 > 0$ tale che $\forall \delta > 0$, $\exists$ $x \in B_\delta(x_0)$ tale che $f(x) \notin B_{\varepsilon_0}(f(x_0))$. Ponendo successivamente, in corrispondenza di ε_0, $\delta = 1, \frac{1}{2}, \dots \frac{1}{i}$, otteniamo una successione $x_i \to x_0$ tale che $f(x_i) \not\to f(x_0)$ (poiché $f(x_i) \notin B_{\varepsilon_0}(f(x_0))$), contro l'ipotesi

☆ Facciamo ora vedere che la nozione di continuità negli spazi metrici è compatibile con la definizione generale data dianzi.

Teorema Sia $f: X \supset \mathcal{U} \longrightarrow Y$ (X, d_X) (Y, d_Y) spazi metrici
aperto

f è continua in $\mathcal{U}$. $\iff$ $\forall$ $V \subset Y$, aperto, $f^{-1}(V)$ è aperto

Dim. $\Longrightarrow$ Se $f^{-1}(V) = \emptyset$ non vi è nulla da dimostrare ($\emptyset$ si considera aperto per convenzione). Sia $x \in f^{-1}(V)$; allora $f(x) \in V$ e, poiché V è aperto, $\exists\ B_\varepsilon(f(x)) \subset V$, $\varepsilon > 0$. In virtù della continuità di f nel senso degli spazi metrici, $\exists\ B_\delta(x)$, $\delta > 0$, tale che



$f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$. Ma ciò implica che $B_\delta(x) \subset f^{-1}(V)$, sicché $f^{-1}(V)$ è aperto.

$\Longleftarrow$ Viceversa, V aperto $\Rightarrow f^{-1}(V)$ aperto. Dati allora $x \in U$, $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo l'insieme $A := f^{-1}(\underbrace{B_\varepsilon(f(x))}_{\subset V})$ è aperto, quindi $\exists\ \delta > 0$ tale che $B_\delta(x) \subset A$. Pertanto $f(B_\delta(x)) \subset f(A) \subset B_\varepsilon(f(x))$, ossia f è continua in x. Dunque f è continua in U.

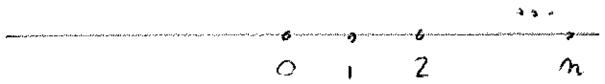
Tale risultato vale, in particolare, per le funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Poniamoci ora in $\mathbb{R}^n$

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme (non vuoto). $p \in \mathbb{R}^n$ è detto punto limite o di accumulazione se ogni intorno di p (usiamo la topologia indotta da d_E) contiene un punto di A diverso da p: è subito visto che ciò equivale a dire che ogni intorno di p contiene infiniti punti di A.

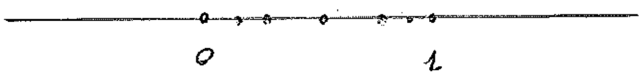
E' altresì immediato constatare che una successione in $\mathbb{R}^n$ converge se e solo se possiede un unico punto di accumulazione (che è il limite della successione)

Es. (in $\mathbb{R}$)



non converge [non vi sono pti di accumulazione]

$\{n\}_{n=1,2\ldots}$



$$\left\{0,\ 1,\ \underset{1-\frac{1}{2}}{\overset{\parallel}{\tfrac{1}{2}}},\ \underset{1-\frac{1}{4}}{\overset{\parallel}{\tfrac{3}{4}}},\ \tfrac{1}{4},\ \underset{1-\frac{1}{8}}{\overset{\parallel}{\tfrac{7}{8}}},\ \tfrac{1}{8}\ \ldots\right\}$$

non converge [due pti di accumulazione: 0 e 1] : si individuano facilmente sottosuccessioni convergenti ad essi

$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots\right\}$ converge ($\lim = 0$)

La nozione "usuale" di chiusura in $\mathbb{R}^n$ è la seguente:

$A \subset \mathbb{R}^n$ è detto chiuso se contiene i suoi pti di accumulazione (o se non ne ha). La chiusura di A è per definizione $\bar{A} := A \cup \{$pti di accumulazione di $A\}$

☆ Tale nozione è ovviamente compatibile con quella generale:

Prop. A è chiuso (nel senso indicato sopra) $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}^n \setminus A$ è aperto

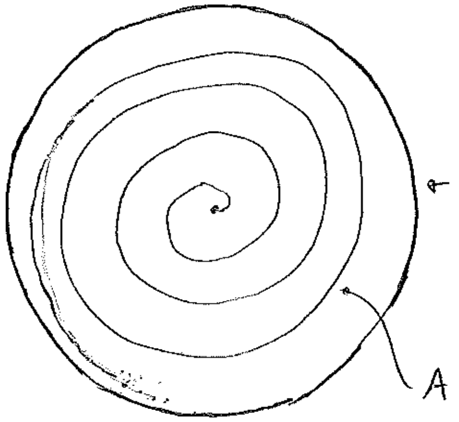
Dim. $\langle \Rightarrow \rangle$ Sia A chiuso. Consideriamo $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$.

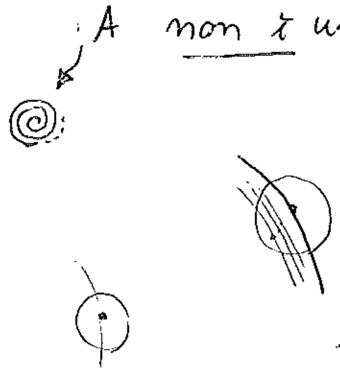
Per qualche $\varepsilon_0 > 0$, $B_{\varepsilon_0}(x) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$, altrimenti $\exists$ $\varepsilon_i \to 0^+$ tale che $B_{\varepsilon_i}(x)$ contiene $x_i \in A$, sicché x sarebbe un punto di accumulazione, e pertanto dovrebbe per ipotesi appartenere ad A, e ciò è assurdo. Pertanto $\mathbb{R}^n \setminus A$ è aperto.

(⇐) Viceversa, se $\mathbb{R}^n \setminus A$ è aperto, non può contenere punti di accumulazione di A, che pertanto (se ve ne sono) devono appartenere ad A. Vale a dire, A è chiuso.

La chiusura di A è anche il più piccolo chiuso contenente A.
[tale nozione è <u>generale</u>] (†)

Esempio:





A non è un insieme chiuso: i suoi pti di accumulazione, oltre ai pti di A stesso, sono i pti del "ciclo limite"

$$\bar{A} = A \cup \{\text{ciclo limite}\}$$

In uno spazio topologico, $B \subset A = \bar{A}$ è detto <u>denso</u> in A se $\bar{B} = A$. Es. $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.

(†) Equivalentemente, la chiusura di A è l'intersezione di tutti i chiusi contenenti A.