Algebra lineare con elementi di geometria - Modulo avanzato

Prof. M. Spera

Prova scritta del 9/9/2008

(1) Nel piano euclideo (ampliato proiettivamente), in cui sia stabilito un riferimento cartesiano, si determini la conica $\mathcal{C}$ con centro in $C: [1, 2, 1]$ passante per $A: [0, 1, 1]$, $B: [0, 1, 0]$, $O: [1, 0, 0]$. Si determinino gli assi di $\mathcal{C}$, identificando quello focale, nonché la sua forma canonica metrica, e se ne abbozzi il grafico.

(2) Nel piano affine reale (ampliato proiettivamente), si consideri la trasformazione la cui matrice (stabilito un rif. cartesiano) sia

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Di che tipo di trasformazione si tratta? Spiegare.
Dato il triangolo ABC, con $A: (0,0)$, $B: (\frac{3}{2}, 1)$, $C: (0, 2)$, si determini il suo baricentro e l'immagine $\mathcal{C}'$ tramite la trasf. data.
Si scriva l'eq. della circonferenza circoscritta ad ABC e si determini l'area A' racchiusa dalla curva $\mathcal{C}'$, trasformata di $\mathcal{C}$ [Di che tipo di curva si tratta?]

(3) Nello spazio euclideo reale si consideri il luogo

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 & \bar{\pi} \\ x+y+z=2 & \Sigma \end{cases}$$

verificare che si tratta di una circonferenza, e se ne determini il centro e il raggio.

Si determini il vertice V e l'apertura del cono tangente a Σ lungo $\mathcal{C}$

<u>Tempo a disposizione</u>: 1h 45m

Algebra lineare 9/9/2008

(1) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$

Determinare, al variare di λ, una base di $\operatorname{Ker} A$ (spazio nullo) e di $\operatorname{Im} A$

(2) Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dire se A è diagonalizzabile, e se lo è ortogonalmente. In caso affermativo determinarne una base ortonormale di autovettori.

Tempo a disposizione 45m

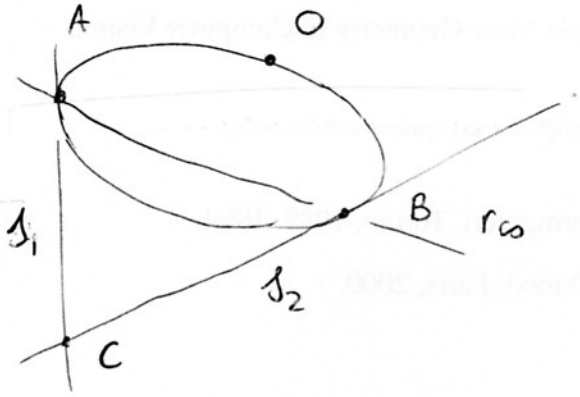
Tempo totale 2h 30m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

(1)

Conica per $A: [0,1,1]$, $B: [0,1,0]$

$O: [1,0,0]$, con centro in $C_1: [1,2,1]$

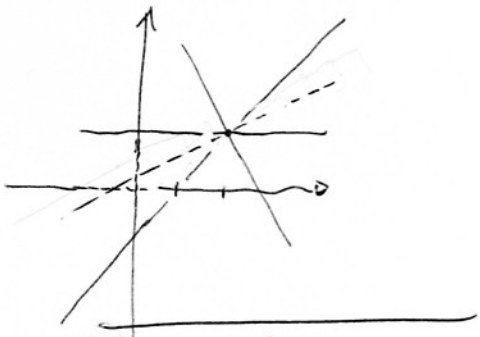


A e B sono le direzioni degli asintoti

$s_1: \quad y-1 = x-2 \qquad y = x-1 \qquad x-y-1=0$

$\boxed{x_1 - x_2 - x_0 = 0}$

$s_2: \quad y = 1 \qquad \boxed{x_2 - x_0 = 0}$



costruiamo il fascio di coniche bitangenti (non omogeneo)

$$s_1 s_2 + \lambda r_\infty^2 = 0$$

$$(x_2 - x_0)(x_1 - x_2 - x_0) + \lambda x_0^2 = 0$$

passaggio per O:

$$-(-1) + \lambda = 0 \qquad \lambda + 1 = 0 \qquad \lambda = -1$$

$$(x_2 - x_0)(x_1 - x_2 - x_0) - x_0^2 = 0$$

variante

$(y-1)(x-y-1) + \lambda = 0$

$xy - x - y^2 + \cancel{y} - \cancel{y} + 1 + \lambda = 0$

$xy - y^2 - x + 1 + \lambda = 0$

passa per O: $\lambda = -1$

$xy - y^2 - x = 0$

$$x_2x_1 - x_0x_1 - x_2^2 \underbrace{+x_0x_2 - x_0x_2}_{0} + \cancel{x_0^2} - \cancel{x_0^2} = 0$$

$$x_2^2 - x_1x_2 + x_0x_1 = 0$$

$$y^2 - xy + x = 0$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

A_{00}

---

controllo: passa per 0 ✓

asintoti (direzioni) $y^2 - xy = 0$ $\quad (y-x)y = 0$ ok.

<u>centro</u> | polare di $[0,1,0]$:

$$(x_0 \ x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{array}{l} x_0 - x_2 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{array}$$

polare di $[0,0,1]$ $\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{array}{l} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{array}$

$$\begin{cases} y - 1 = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} y = 1 \\ x = 2 \end{array} \qquad ✓$$

Assi
- autospazi di A_{00} 1
- diam. con. ortogonali 2
- bisettrici degli asintoti 3

vediamo 2

$$\begin{pmatrix} -m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m \\ -1+2m \end{pmatrix} = 0$$

$$m^2 + 2m - 1 = 0 \qquad m = -1 \pm \sqrt{1+1}$$

$$= -1 \pm \sqrt{2}$$

Controllo con 1

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad -\lambda(2-\lambda) - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{1+1}$$

$$= 1 \pm \sqrt{2}$$

prendiamo +

$$\begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & -1 \\ -1 & 2-1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ basta la prima

$$+(1+\sqrt{2})x + y = 0 \qquad y = -(1+\sqrt{2})x \quad .. \ \underline{ok}$$

già si comprende che l'asse focale è $y-1 = (\sqrt{2}-1)(x-2)$

Semiassi:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{a} = \det A = (-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{00} = \det A_{00} = -1$$ [iperbole, come già sappiamo!

$$\mathfrak{J} = \operatorname{tr} A_{00} = 2$$

$$t^2 + \frac{\mathfrak{a}_{00}\mathfrak{J}}{\mathfrak{a}} t + \frac{\mathfrak{a}_{00}^3}{\mathfrak{a}^2} = 0$$

$$t^2 + \frac{(-1)\,2}{(-2)} t + \frac{(-1)^3}{(-2)^2} = 0$$

$$t^2 + t - \frac{1}{4} = 0$$

$$4t^2 + 4t - 1 = 0$$

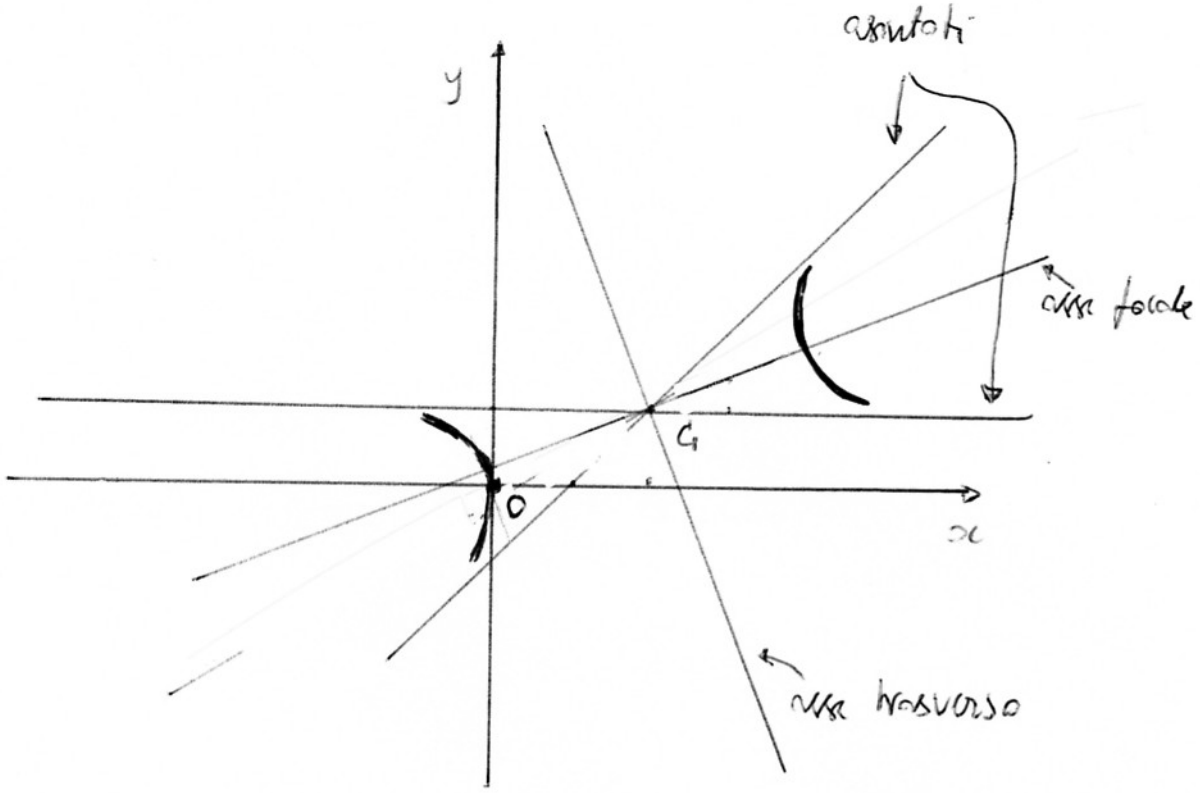
$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2} \qquad \frac{1}{\alpha} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} = \frac{1}{a^2}$$

$$\frac{1}{\beta} = -\frac{1+\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{b^2}$$

$$a = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{2}-1}} = \sqrt{2(\sqrt{2}+1)} \sim \sqrt{2 \cdot 2{,}4} \sim \sqrt{4{,}8} \sim 2{,}2$$

$$b = \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{2}}} = \sqrt{2(\sqrt{2}-1)} \sim \sqrt{2 \cdot 0{,}4} \sim \sqrt{0{,}8} \sim 0{,}3$$



INT. con l'asse y:

$$\begin{cases} y^2 - xy + x = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$y^2 = 0 \quad y = 0$$

$\mathcal{C}$ è tangente a $x = 0$ in O

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

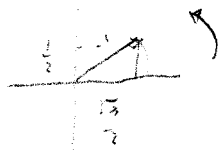
$\underline{b}$

A

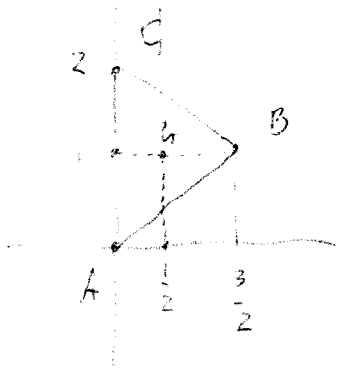
A : rotazione di

$$\underline{x}' = A\underline{x} + \underline{b}$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{6}$$



in senso antiorario



T: rotazione di $\frac{\pi}{6}$ (att. di origine) seguita da una traslazione di $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$G = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

[Usiamo anche elementarmente]

$$G' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} \\ 1 + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2+\sqrt{3}}{4} \\ \frac{3+2\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$$

$A: (0,0)$

$B: \left(\frac{3}{2}, 1\right)$

$C: (0, 2)$

$\mathcal{C}$: circunferencia por A, B, C

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$A \in \mathcal{C} \Rightarrow \boxed{c = 0}$

$B \in \mathcal{C}$ $\quad \frac{9}{4} + 1 + a \cdot \frac{3}{2} + b = 0$

$$9 + 4 + 6a + 4b = 0$$

$$\boxed{6a + 4b = -13}$$

$C \in \mathcal{C}$ $\quad 4 + 2b = 0 \quad b = -2$

$\Rightarrow \quad 6a + \underbrace{4(-2)}_{-8} = -13$

$6a = -5$

$a = -\frac{5}{6}$

$$\boxed{\begin{array}{l} a = -\frac{5}{6} \\ b = -2 \\ c = 0 \end{array}}$$

Chino a priori

$C_0 = \left(\frac{5}{3}, 1\right)$

centro

$R = d(C_0, 0) = \sqrt{\underbrace{\frac{25}{9} + 1}_{\frac{34}{9}}} = \frac{\sqrt{34}}{3}$

rad.

$A = \pi R^2 = \frac{34}{9}\pi$

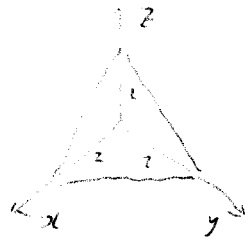
$t' = t = \frac{34}{9}\pi$ (movimento rigido)

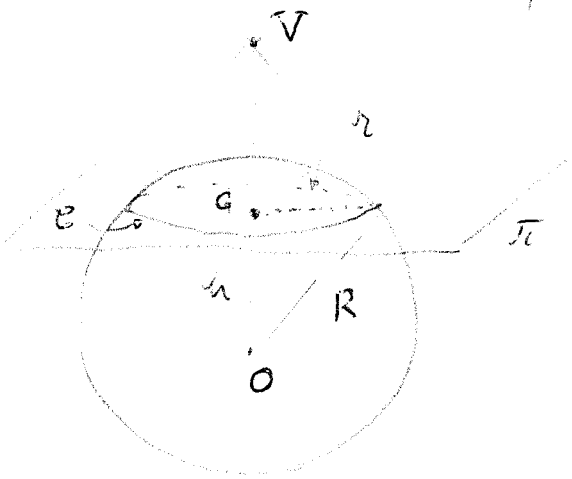
γ' è metà una circonferenza, stesso raggio

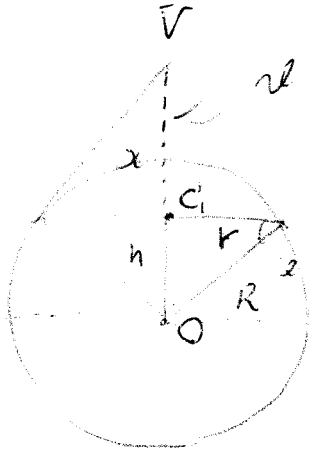
(3) $\mathcal{C}: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x+y+z=2 \quad \pi \end{cases}$

$x+y+z-2=0$

circonferenza nello spazio







$$h = d(O,\pi) = \frac{|-2|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$r = \sqrt{R^2-h^2} = \sqrt{4-\frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$C_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

direttamente oppure

$$\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$$

$$3t^2 = \frac{4}{3} \quad \left[\delta(O,C)^2 = h^2\right]$$

$$t^2 = \frac{4}{9}$$

$$t = \pm\frac{2}{3}$$

$C_1 \in \pi \Rightarrow t = +\frac{2}{3}$

$$\sin\vartheta = \frac{h}{r} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\vartheta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{4}$$

troviamo x $\qquad x \cdot h = r^2$

$$x = \frac{r^2}{h} = \frac{\cancel{8}^{\,4}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$x+h = \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$\vec{V} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \, 2\sqrt{3} \, , \, \frac{1}{\sqrt{3}} \, 2\sqrt{3} \, , \, \frac{1}{\sqrt{3}} \right.$$

$$= \left(\; 2 \; , \; 2 \; , \; 2 \right)$$

Algebra Lineare

① Sia

$$A = \begin{array}{cccc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} Ae_1 & Ae_2 & Ae_3 & Ae_4 \end{array} \end{array}$$

Determinare al variare di λ, una base di Ker A (spazio nullo) e di Im A

È subito visto direttamente che $r(A)$ (che è ≤ 3)

$= 3 \iff \lambda \neq 1$, e vale 2 se $\lambda = 1$

$A: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

se $\lambda \neq 1$, come base di Im A possiamo prendere la base canonica di $\mathbb{R}^3$, altrimenti, pari

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \right\rangle$ $(\lambda \neq 1)$

controllo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 1 \neq 0$$

$\iff \lambda \neq 1$

se $\lambda \neq 1$ $\quad \nu(A) = 4 - 3 = 1$

(N+R)

$\Rightarrow$ è <u>immediato</u> constatare che

$$\text{Ker } A = \langle e_2 - 2e_4 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

infatti:

$$A(e_2 - 2e_4) = Ae_2 - 2Ae_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se $\lambda = 1$ $\qquad \rho(A) = 2$

base per es. : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$$\nu(A) = 4 - \rho(A) = 4 - 2 = 2$$

Anche qui è immediato verificare che

$$\ker A = \langle e_1 - e_3 , e_2 - 2e_4 \rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

— · — · — · —

☆ metodo standard (meno brillante, ma comunque semplice)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 2y + t = 0 \\ x + \lambda z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ (1-\lambda) z = 0 \\ 2y + t = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ se $\lambda \neq 1$ $\quad z = 0$, $x = 0$, $t = -2y$ libero

$$\Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Se $\lambda = 1$

$$x = x$$
$$y = y$$
$$z = -x$$
$$t = -2y$$

$$\Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(2) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

è ortog. diag. [è un operatore simmetrico, risp. al prod scalare standard]

$$P_C^A(\lambda) = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(2-\lambda)-1\right]$$

$$= (1-\lambda)\left[\lambda^2 - 3\lambda + 2 - 1\right] = (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 1)$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \qquad \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \equiv \lambda_\pm$$

(entrambe positive)

$$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{(ovvio...)}$$

lavoriamo con

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$V_{\lambda_+}^{\tilde{A}} : \quad \begin{pmatrix} 1-\lambda_+ & -1 \\ -1 & 2-\lambda_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(1-\lambda_+)\, y - z = 0 \qquad \text{(ne basta una..)}$$

$$z = \left[1 - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right] y \qquad \text{è razione aurea}$$

$$z = \frac{2-3-\sqrt{5}}{2}\, y = -\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) y$$

1,6

$$V_{\lambda_-}^{\tilde{A}} = \left(V_{\lambda_+}^{\tilde{A}}\right)^{\perp} \qquad z = \frac{1}{\Phi}\, y$$

$$\frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(-1+\sqrt{5})}{5-1} = \frac{\cancel{2}(\sqrt{5}-1)}{\cancel{4}\,2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$\Rightarrow$ base di autov per A : notare!

orton

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1+\Phi^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\Phi \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1+\Phi^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$1+\Phi^2 = 1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$= 1 + \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{4+1+5+2\sqrt{5}}{4} = \frac{10+2\sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{5+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}\,\frac{(1+\sqrt{5})}{2}$$

$$= \sqrt{5}\cdot\Phi$$

$$\sqrt{1+\Phi^2} = 5^{\frac{1}{4}}\cdot\Phi^{\frac{1}{2}}$$

base

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\5^{-\frac{1}{4}}\Phi^{-\frac{1}{2}}\\-5^{-\frac{1}{4}}\Phi^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\\Phi^{\frac{1}{2}}5^{\frac{1}{4}}\\5^{-\frac{1}{4}}\Phi^{-\frac{1}{2}}\end{pmatrix}\right)$$