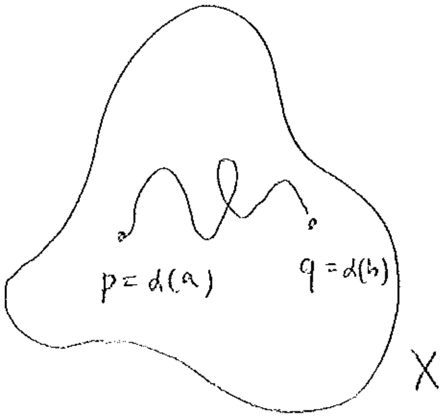
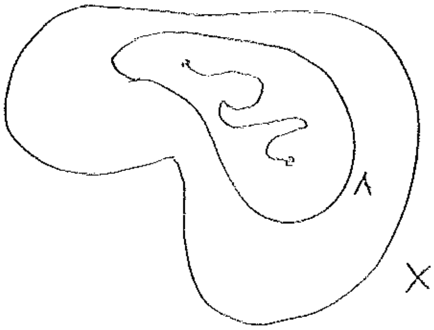
◇ Connessione

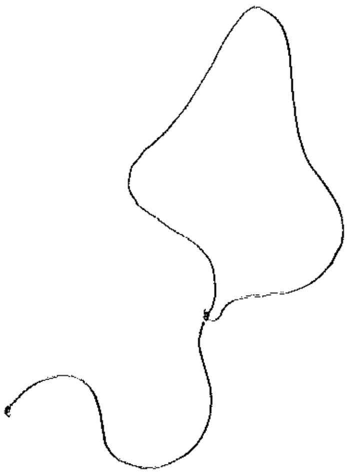
Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico.

Una curva continua $\alpha : [a,b] \longrightarrow X$ è detta arco in X congiungente $p = \alpha(a)$, $q := \alpha(b)$. Analoga def. per arco in $A \subset X$ (top. relativa)

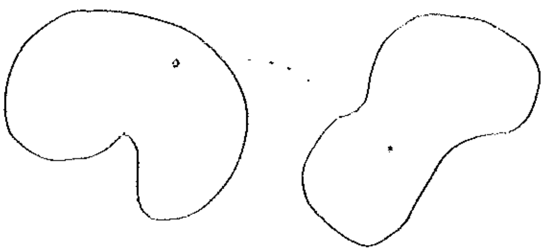




Def. $A \subset X$ è detto connesso per archi se, dati comunque $p, q \in A$, esiste un arco in A che li congiunge. In particolare, se $A = X$, si parla di spazio topologico connesso per archi



connesso per archi



non connesso per archi

Abbreviazione frequente: c.p.a.

È immediato constatare che se $f : X \to Y$ (X, Y spazi topologici) è continua, allora

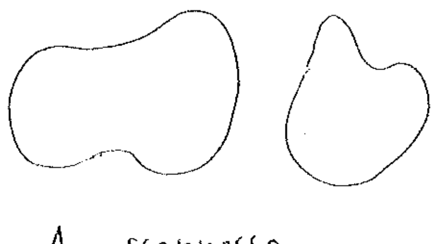
$A \subset X$ connesso per archi $\Rightarrow$ $f(A) \subset Y$ connesso per archi. In particolare, se f è un omeomorfismo, X è c.p.a $\Leftrightarrow$ Y è c.p.a.

Tale nozione è pertanto topologica.

Def. $(X, \mathcal{T})$ è detto connesso se non è unione di due s. insiemi aperti non vuoti e disgiunti, i.e.

$$X = V_1 \cup V_2 \quad , \quad V_i \in \mathcal{T} \; , \; i=1,2 \quad V_1 \cap V_2 = \phi$$
$$\Rightarrow \quad V_1 = \phi \quad \vee \quad V_2 = \phi .$$

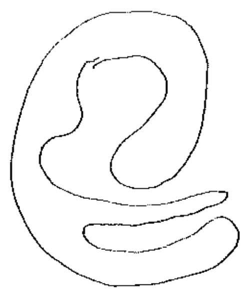
Analoga def. per $A \subset X$, munito della topologia relativa (A è connesso se $(A, \mathcal{T}_A)$ è connesso come sp. topologico...)



A sconnesso
($\equiv$ non connesso)

Prop. $(X, \mathcal{T})$ è connesso $\Leftrightarrow$ gli unici s. insiemi contemporaneamente aperti e chiusi di X sono ϕ e X stesso

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ Sia X connesso, e sia $A \subsetneq X$, $A \neq \phi$ aperto e chiuso. Ma allora $X \setminus A$ risulterebbe pure aperto e chiuso, e sarebbe non vuoto ($A \neq X$). Pertanto $X = A \cup (X \setminus A)$, con A e $X \setminus A$ aperti, non vuoti e disgiunti. Assurdo. □



A connesso

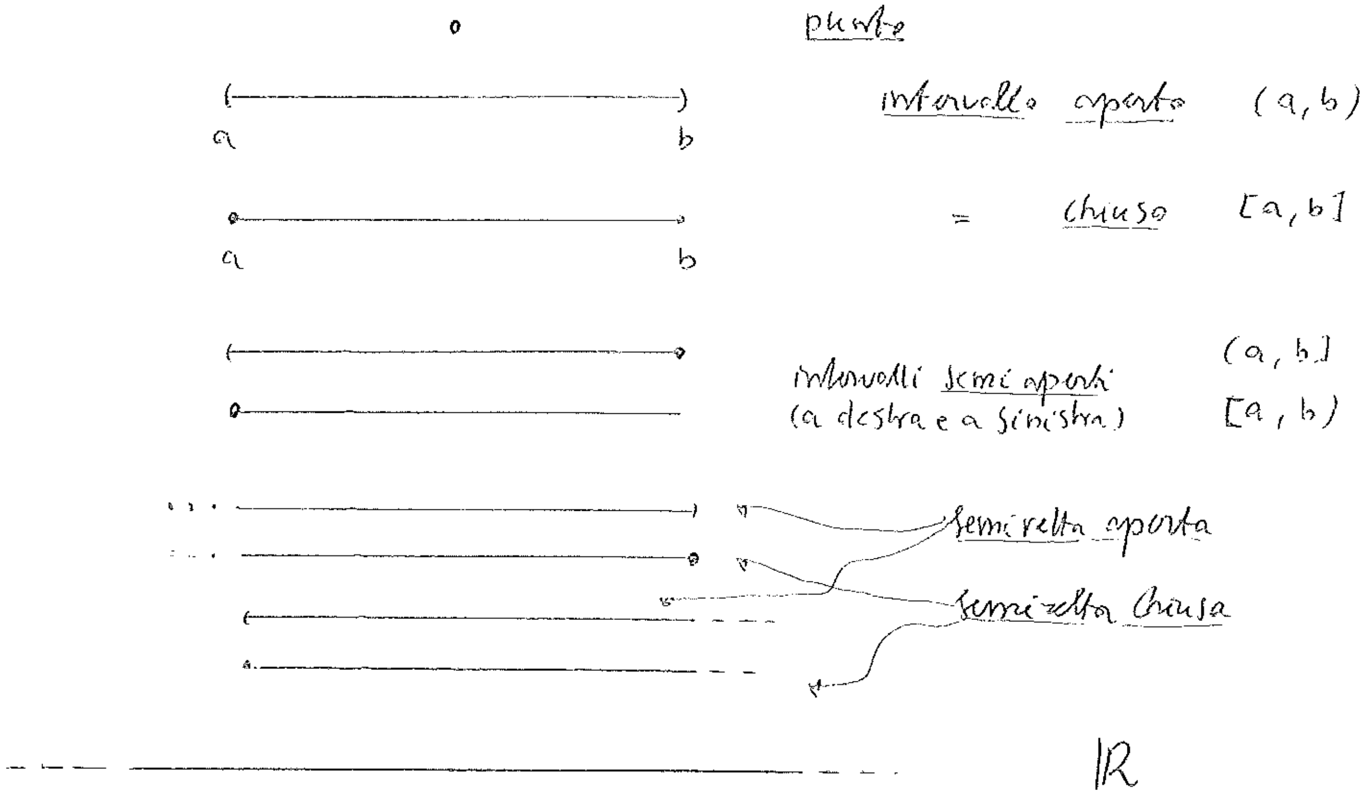
($\Leftarrow$) Viceversa, se gli unici s. insiemi aperti e chiusi di X sono ϕ e X stesso, e se $X = A \cup B$, $A, B \in \mathcal{T}$, $A \cap B = \phi$ (ossia $B = X \setminus A$), segue subito che A e B sono anche chiusi, sicchè $\{A, B\} = \{\phi, X\}$, e X è connesso.

☆ Prop.: Se $f : X \to Y$ (X, Y sp. topologici) è continua, allora X connesso $\Rightarrow$ $f(X)$ connesso. In particolare, se $X \approx Y$, X è connesso se e solo se lo è Y (la connessione è una proprietà topologica)

Dim. Per assurdo, sia $f(X)$ sconnessa. Allora $\exists\ U_1, U_2 \in \mathcal{T}_{f(X)}$ (topol. relativa), $U_i \neq \phi$, $U_1 \cap U_2 = \phi$ tali che $f(X) = U_1 \cup U_2$.
In virtù della continuità di f, $f^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}_X$; inoltre $f^{-1}(U_i) \neq \phi$, $f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) = \phi$ e

$f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2) = X$, contro l'ipotesi che X sia connesso. Dunque $f(X)$ è connessa.

◇ **Def.** In $\mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ è detto *intervallo* se è un insieme del tipo $\{a < x < b\}$, $\{a \le x \le b\}$, $\{a < x \le b\}$, $\{a \le x < b\}$. Non sono esclusi i casi $a = b$ (punto), $a = -\infty$, $b = +\infty$

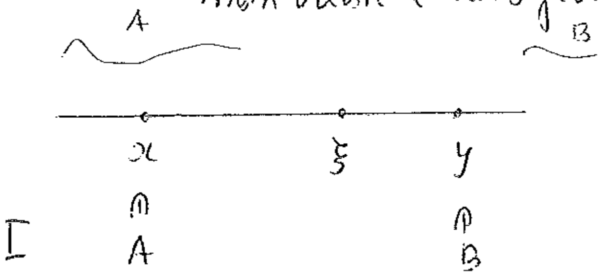


Il prossimo teorema caratterizza i sottoinsiemi connessi di $\mathbb{R}$.

☆ **Teorema** Un sottoinsieme $I \subset \mathbb{R}$ è *connesso* se e solo se è un *intervallo*.

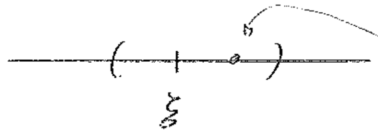
Dim. Sia I un intervallo. Mostriamo che è connesso.

Sia, per assurdo, $I = A \cup B$, A e B aperti, non vuoti e disgiunti. Siano $x \in A$, $y \in B$ e $x < y$ (per fissare le idee). Si ha: $[x, y] \subset I$

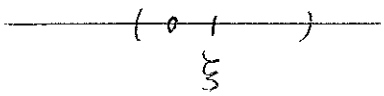


Sia $\xi := \sup(A \cap [x, y])$

Ora, $\xi \notin A$, poichè A è aperto, altrimenti esisterebbero pti di A a destra di ξ, contro la def. di ξ.



$\xi \notin B$ altrimenti, essendo B aperto, esisterebbe un intorno di ξ contenente solo pti di B, ancora in contraddizione con la def. di ξ.



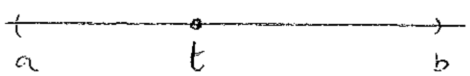
Ma allora $\xi \notin A \cup B = I$, il che è assurdo. $(\xi \in [x,y] \subset I)$. Quindi I è connesso.

Viceversa Sia $A \subset \mathbb{R}$ connesso, mostriamo che è un intervallo. Se $A = \{pto\}$, è un intervallo; ammettiamo che A contenga almeno due elementi.

Poniamo $a = \inf A$, $b = \sup A$ (in senso generalizzato)

Allora $A \subset [a,b]$.

Mostriamo che $(a,b) \subset A$: ciò implicherà che A è un intervallo. Per assurdo, sia $t \in (a,b)$ tale che $t \notin A$.

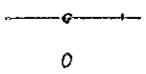


Allora $V_1 = A \cap (-\infty, t)$ e $V_2 = A \cap (t, +\infty)$ sono aperti (in A) e $A = V_1 \cup V_2$, e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Poiché A è connesso, uno dei due insiemi è vuoto, sia per es. $V_2 = \emptyset$. Ora $b \in (t, +\infty)$, e pertanto $b \notin A$ e b non è pto di accumulazione di A, assurdo poiché $b = \sup A$.

Ragionando in modo analogo su V_1 si giunge nuovamente ad una contraddizione. Dunque A è <u>un intervallo</u> $\square$

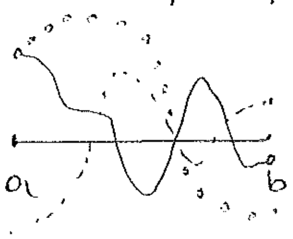
☆ <u>Teorema</u> Sia $f : X \to \mathbb{R}$ <u>continua</u>, X <u>connesso</u>. Sia $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in X$. Allora f ha <u>segno costante</u> (in X).

Dim: $f(X) \subset \mathbb{R}$ è connesso, dunque è un intervallo che, per ipotesi, non contiene 0, da cui l'asserto.



☆ Corollario: (Cf. Analisi I) $f : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$, $I = [a,b]$, f continua,
intervallo

se $f(a)f(b) < 0$, allora $\exists\ \xi \in I$ tale che $f(\xi) = 0$

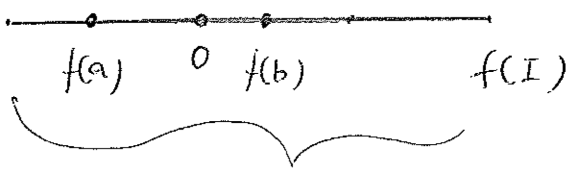


(<u>teorema di Bolzano</u>)

Dim. Per fissare le idee sia $f(a) < 0$, $f(b) > 0$

$f(I)$ è connesso, ed è un intervallo, e necessariamente

$$[f(a), f(b)] \subset f(I)$$



Ma $0 \in [f(a), f(b)]$, dunque $\exists\ \xi \in I$ tale che $f(\xi) = 0$.

☆ <u>Teorema</u> (Poniamoci <u>in $\mathbb{R}^n$</u>, anche se il risultato è generale)

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ <u>connesso</u>. Allora $\bar{A}$ è <u>connessa</u>

(più in generale A connesso $\Rightarrow$ C, $A \subset C \subset \bar{A}$, <u>connesso</u>)

OSS. Se $n = 1$ il risultato è stato già dimostrato...

Dim. Sia p.a. $\bar{A}$ <u>sconnesso</u>. Allora $\bar{A} = \bar{U}_1 \cup \bar{U}_2$, $\bar{U}_i$ aperti

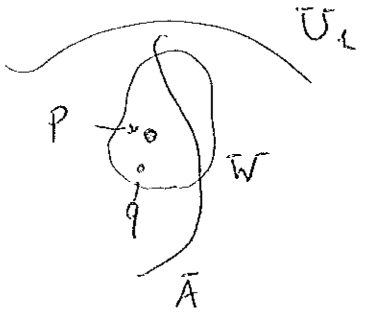
$U_i \neq \phi$, $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 = \phi$. Sia $p \in \bar{A} \setminus A$

(se un tale p non esistesse, sarebbe $\bar{A} = A$ e non ci sarebbe nulla da dimostrare). p è <u>pto di accumulazione di A</u>.

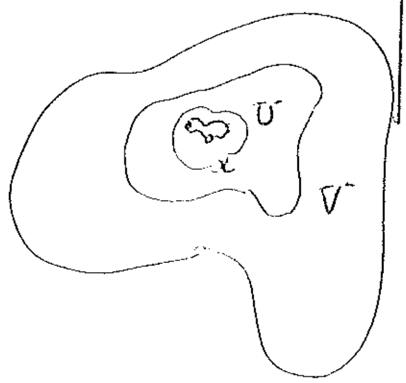
Sia poi $p \in \bar{U}_1$, <u>per fissare le idee</u>. $\bar{U}_1$ è aperto (in $\bar{A}$), dunque $\exists\ W \ni p$, aperto (in $\mathbb{R}^n$), tale che $W \cap \bar{A} \subset \bar{U}_1$.

Inoltre $\exists\ q \neq p \in W \cap A \subset W \cap \bar{A} \subset \bar{U}_1$, poichè p è pto di accumulazione di A. Ma allora $U_1 \neq \phi$, assurdo.

Allo stesso modo si prova che $U_2 \neq \phi$, e si conclude $\square$

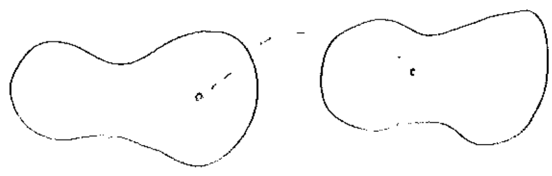


Def. Sia $(X, \mathcal{T})$ uno <u>spazio topologico</u>. Esso è detto <u>localmente connesso per archi</u> (l.c.p.a.) se $\forall\ x \in X$, $\forall$ intorno $V \ni x$ (aperto contenente x), $\exists\ U \subset V$, $U \ni x$, <u>intorno di x connesso per archi</u>. | Analoga def. per un sottoinsieme.



[esempio tipico, v. oltre: superficie regolare]

1. l.c.p.a $\not\Rightarrow$ c.p.a.



2. c.p.a $\not\Rightarrow$ l.c.p.a.

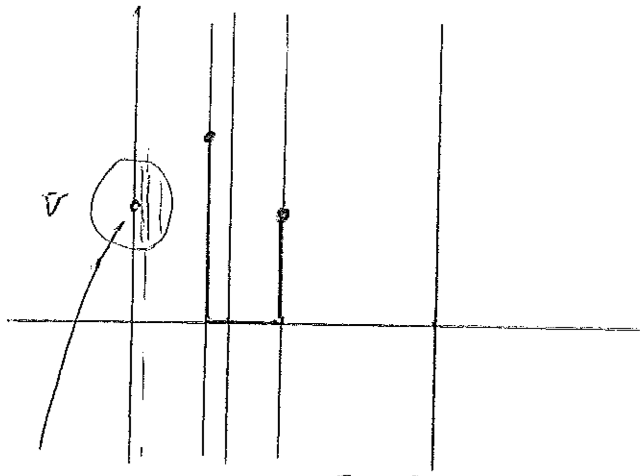
esempio: il <u>pettine</u>

$\longrightarrow$

☆ pettine

$X = \{y=0\} \cup \{x=0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x = \frac{1}{n}\}$

connesso per archi
ma
non localmente connesso per archi

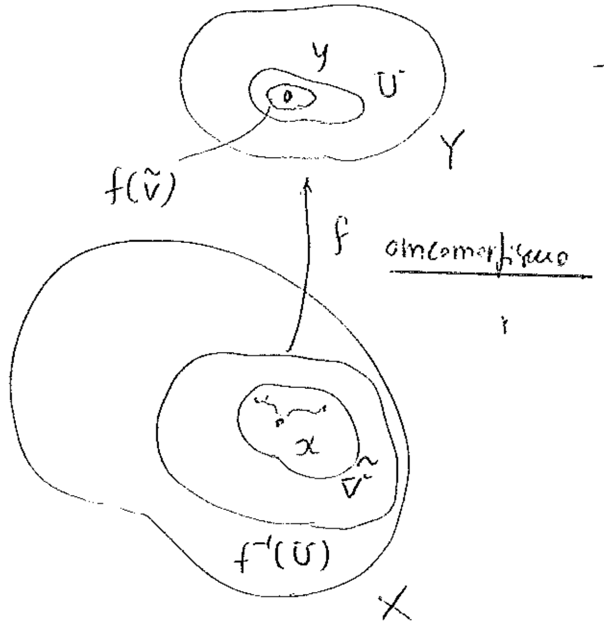


un tale V non possiede un $U \subset V$ connesso per archi

Siano X, Y spazi topologici, $f : X \to Y$ continua, X l.c.p.a $\Rightarrow$ Y l.c.p.a. In particolare, la locale connessione per archi è una proprietà topologica: cominciamo a dire. Sia f omeomorfismo.

Sia $y \in Y$, $U \ni y$, intorno.

Si consideri $f^{-1}(U) \subset X$. Sia $x \in X$ t.c. $f(x) = y$ $(x = f^{-1}(y))$.



$f^{-1}(U)$ è intorno di x, e contiene $\tilde{V} \ni x$ connesso per archi; ma allora $f(\tilde{V}) \subset U$ ed è un intorno di y connesso per archi (è aperto poiché f è aperta). □

Teorema Sia (X, τ) uno spazio topologico.

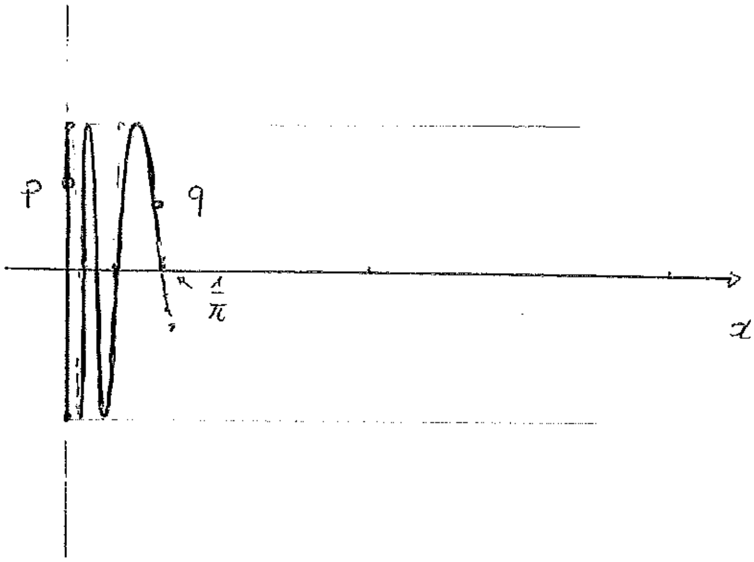
1. X c.p.a. $\Rightarrow$ X connesso.
2. Se X è l.c.p.a, allora

$$X \text{ c.p.a} \Leftrightarrow X \text{ connesso}.$$

⚠ Il viceversa di 1 è <u>falso</u>:

Esempio (il "<u>seno del topologo</u>")

Sia $A = \{0\} \times [-1,1] \cup \underbrace{\{(x, \sin\frac{1}{x})\}_{x>0}}_{B \text{ -- connesso}}$



A è <u>connesso</u> poiché $A = \overline{B}$, B connesso.

Ma <u>non è connesso per archi</u>...

per ex, non esiste nessun arco congiungente p e q..

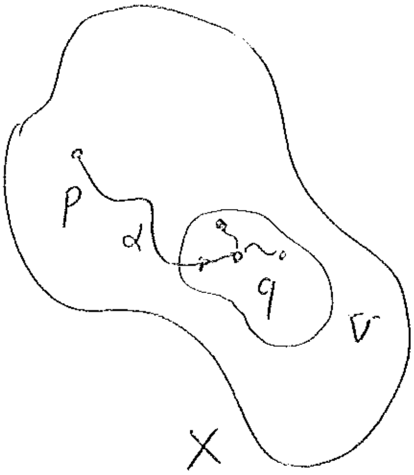
Dimostriamo 1. Se, p.a. X <u>fosse sconnesso</u>,
$X = U_1 \cup U_2$ (aperti non vuoti e disgiunti).
Siano $p \in U_1$, $q \in U_2$, e sia $\alpha : [a,b] \to X$ un arco congiungente p a q. In virtù della continuità di α, $B := \alpha([a,b])$ è <u>connesso</u>. Posto $V_i = B \cap U_i$, $i=1,2$, $B = V_1 \cup V_2$, V_i aperti non vuoti e disgiunti (in B), il che è assurdo. □

Dim. 2. È sufficiente provare "$\Leftarrow$".

Sia X connesso (non vuoto..). Sia $p \in X$ e sia

$X_1 = \{$ pti di X raggiungibili da un arco uscente da $p \}$

$\equiv \{ q \in X \ / \ \exists \ \alpha : [a,b] \to X$, continua, $\alpha(a) = p$, $\alpha(b) = q \}$



Dimostriamo che $X_1 = X$. (+)

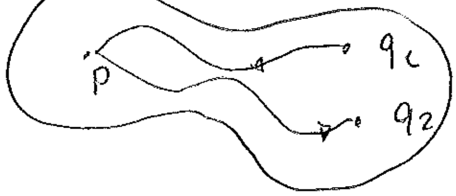
Ora, A_1 è aperto: Dato $q \in A_1$ e α, arco che lo congiunge a p, per la locale connessione per archi, esiste $V \ni q$ intorno di q, per i pti del quale si può condurre un arco che li congiunga a q, contenuto in V;

☆ è immediato allora costruire un arco congiungente p ad ognuno di questi punti.

Analogamente, $X \setminus X_1$ è pure aperto, sicché

X_1 è aperto e chiuso. Dalla connessione di X e dal fatto che $X_1 \neq \emptyset$ segue $X = X_1$, e concludiamo. □

(+) ciò basta per concludere: dati $q_1, q_2 \in X$, questi possono essere congiunti con p, e dunque fra loro.



Esempi ed esercizi

Sia $n \geq 1$ $\quad S^n$ è connessa.

Infatti $\mathbb{R}^{n+1}$ è connesso, e così lo è $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}$.

(se $n=0$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ non è connesso : non è un intervallo)

Si consideri l'applicazione

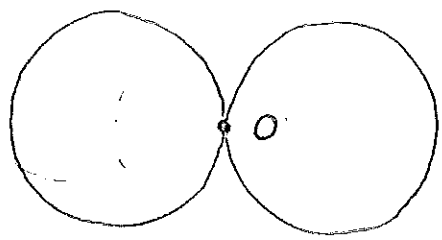
$$f: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\} \to S^n$$

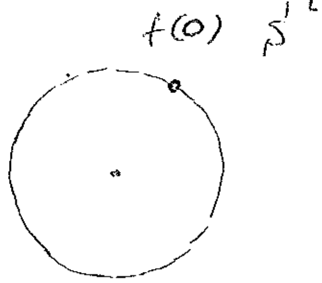
$$x = (x_1, \dots x_{n+1}) \longmapsto \left(\frac{x_1}{\|x\|}, \dots \frac{x_n}{\|x\|} \right) \equiv f(x)$$

$$\neq (0, \dots 0)$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2}$$

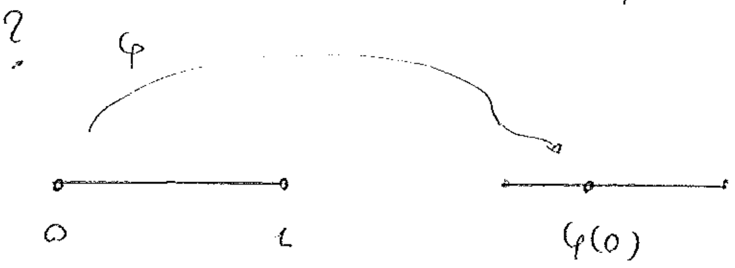
f è continua e suriettiva, e ciò basta per concludere

$X =$ 



$X \not\cong S^1$: Sia p. assurdo $f: X \to S^1$ un omeomorfismo; allora $S^1 \setminus \{f(0)\}$ e $X \setminus \{0\}$ sarebbero ancora omeomorfi (tramite f stessa, ristretta), ma $S^1 \setminus \{f(0)\}$ è connesso, mentre $X \setminus \{0\}$ non lo è.

◈ Non esiste nessun omeomorfismo di $I = [0,1]$ in sé che mandi, ad ex 0 in un punto interno :



$I \setminus \{0\}$ è connesso

$I \setminus \{\varphi(0)\}$ non è connesso

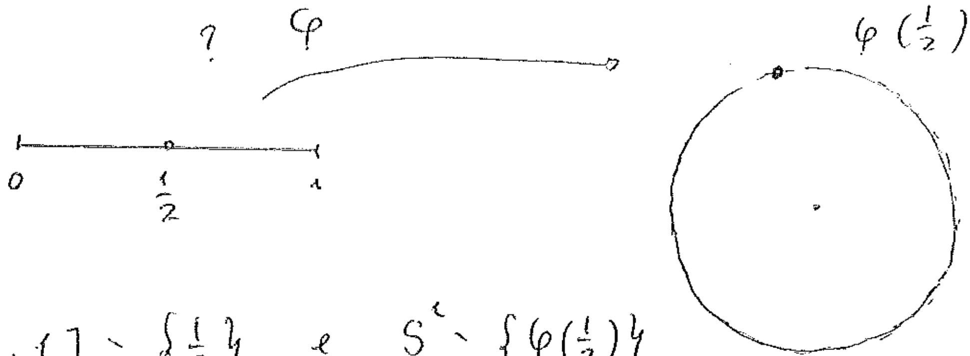
pertanto, ogni omeomorfismo manda 0 in 0 oppure in 1.

◈ $[0,1] \not\approx (0,1]$

compatto   non compatto

◈ $[0,1] \not\approx S^1$

Sia p.a. $\varphi : [0,1]$ omeomorfismo.



$[0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ e $S^1 \setminus \{\varphi(\frac{1}{2})\}$

risulterebbero omeomorfi, ma ciò è impossibile:

$[0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ non è connesso , $S^1 \setminus \{\varphi(\frac{1}{2})\}$ lo è .

◈ Nell'ambito degli spazi metrici , la limitatezza non è una proprietà topologica : $\mathbb{R}$ e $(-1,1)$ sono omeomorfi ma, visti come spazi metrici (con la loro metrica naturale) ; $(-1,1)$ è limitato , $\mathbb{R}$ no.

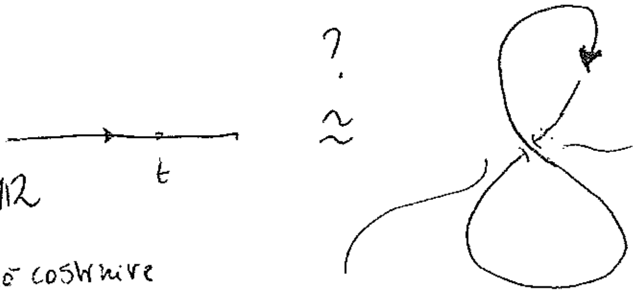
* <u>Altri esempi</u> [assumiamo che le curve date siano sufficientem. "regolari"! v. oltre]

comportamento simile al seno del topologo

IR ?≈

NO : 

non è localmente connesso per archi



IR t ?≈ $t \to +\infty$ $t \to -\infty$

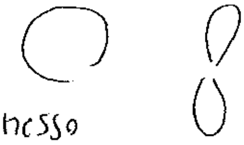
si può costruire un'applicazione continua e iniettiva...

NO :  è compatto

(sia come s. insieme di $\mathbb{R}^2$ che in sé, munito della topologia relativa

?≈

NO : già visto:



connesso sconnesso

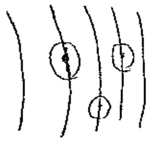
(anche se i due spazi sono entrambi compatti e connessi)

≈

(escluso)

Sì! se  è munito della topologia relativa

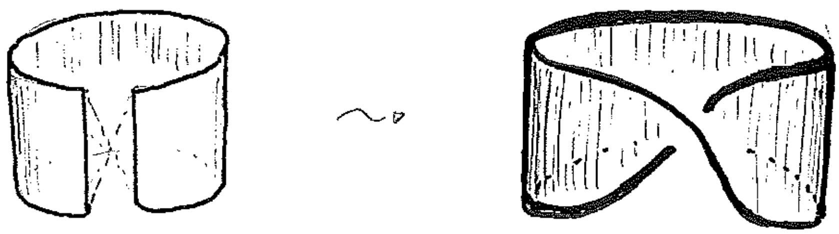
tra l'altro  è, in sé, chiuso (ma non lo è come s. insieme di $\mathbb{R}^2$);



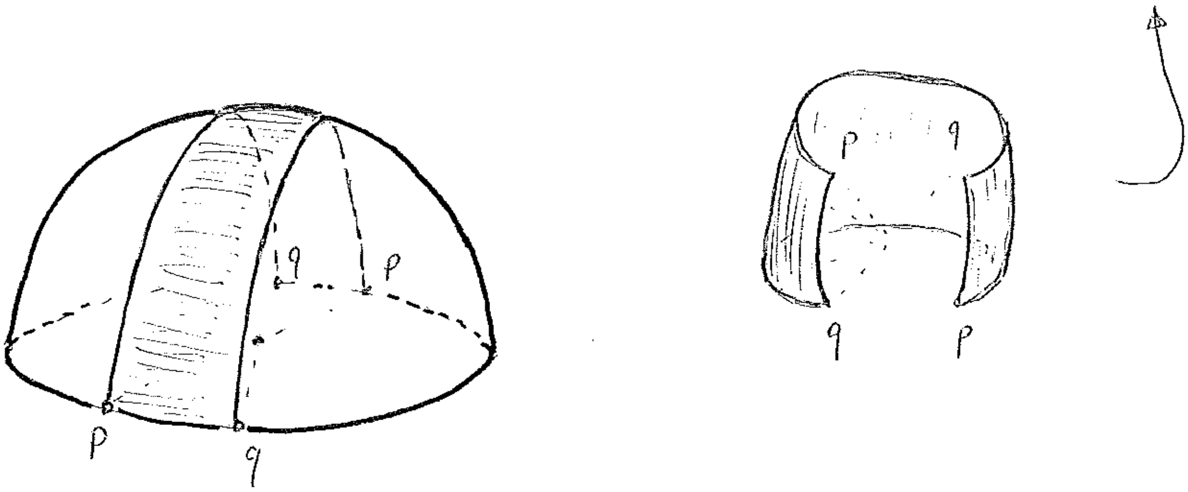
non è compatto [per esserlo, dovrebbe essere chiuso e limitato come s. insieme di $\mathbb{R}^2$, e solo la seconda condizione è soddisfatta]

★ La spirale, unita al ciclo limite, dà vita ad uno spazio connesso ma non localmente connesso per archi (da sola lo è...) [chiusura di un connesso]

★ Il <u>nastro di Möbius</u> è, storicamente, il primo esempio trovato di <u>superficie</u> <u>non</u> <u>orientabile</u> ("ad una sola faccia")



È subito visto che il <u>piano</u> <u>proiettivo</u> $\mathbb{RP}^2$ ha la stessa proprietà, contenendo un tale nastro:



☆ <u>Teorema</u> Sia $\varphi_{\vartheta} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}^2 = \square/\sim$

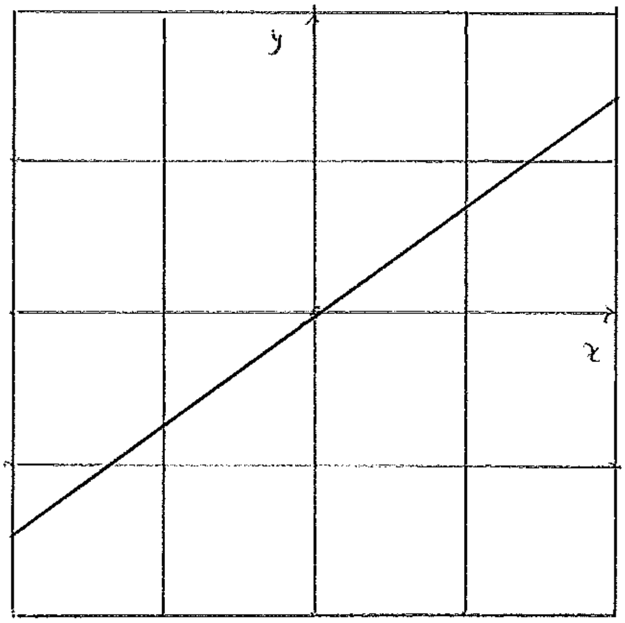
l'applicazione indotta da $\tilde{\varphi}_{\vartheta} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$t \longmapsto \tilde{\varphi}_{\vartheta}(t) := (t, \vartheta t)$ $\quad \vartheta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Allora $\overline{\varphi_{\vartheta}(\mathbb{R})} = \mathbb{T}^2$ (l'immagine di φ è <u>densa</u> in $\mathbb{T}^2$)

<u>Complemento: il flusso di Krönecker</u>

cf. corso di "Sistemi Dinamici"



$y = \vartheta x$

$\begin{cases} x = t \\ y = \vartheta t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

<u>Dim.</u> Utilizziamo il <u>teorema</u> <u>della</u> <u>media</u> (teorema ergodico) : se $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^2)$,

si può anche procedere per via elementare

è $\quad \bar{f} := \iint_{\mathbb{T}^2} f \quad$ <u>media spaziale</u>

$$\begin{array}{c} \| \\ \lim\limits_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi_{\vartheta}(t))\, dt \end{array}$$

<u>media temporale</u>

$\boxed{\square \; \infty}$

Precisamente: il secondo membro esiste ed eguaglia il primo.

Sia allora, per assurdo, $\mathcal{D}$ un dominio disgiunto da $\varphi(\mathbb{R})$. Si consideri una funzione continua f nulla al di fuori di $\mathcal{D}$ tale che $\iint_{\mathcal{D}} f = 1$.

Si ha allora
$$\int_0^T f(\varphi_\vartheta(t))\,dt = 0 \quad \forall\, T \in \mathbb{R}$$

Pertanto, il teorema della media fornisce $1 = 0$, il che è assurdo. Dunque $\overline{\varphi(\mathbb{R})} = \mathbb{T}^2$ $\square$

Corollario $\quad \varphi : \mathbb{R} \to \varphi(\mathbb{R})$ non è un omeomorfismo
[$\varphi(\mathbb{R})$ dotato della top. relativa]

∴ non è localmente connesso per archi

* Cenno di dim. del teorema della media.

Il teorema vale per i polinomi trigonometrici (in due variabili) (verifica diretta). Ma questi sono densi in $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^2)$ (rispetto alla topologia uniforme): teorema di Weierstraß.
[Tale proprietà garantisce il passaggio al limite sotto il segno di integrale: $\quad f_n \rightrightarrows f \implies \int_a^b f_n \to \int_a^b f$]

conv. uniforme

$a \quad b$
int. chiuso e limitato

Ciò conduce subito alla conclusione...

☆ <u>Digressione su SO(3)</u>   [è possibile una trattazione esaustiva tramite l'impiego dei quaternioni, ma per ora ci accontenteremo di alcune osservazioni preliminari]

$$SO(3) = \{ O \in M_3(\mathbb{R}) \;/\; \underbrace{O^T O = O^T O = I_3}_{O(3)} ,\ \det O = +1 \}$$

gruppo ortogonale <u>speciale</u>

$O \in O(3) \iff O$ conserva il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^3$ $\quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$:

infatti

$$\langle x, y \rangle = x^T y = x^T I_3 \, y \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\langle Ox, Oy \rangle = (Ox)^T O y = x^T O^T O \, y$$

$$\langle Ox, Oy \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \iff O^T O = I_3 \qquad (*)$$

si ha, necessariamente $\det O = \pm 1$: la $(*)$ infatti porge

$$1 = \det O^T O = \det O^T \cdot \det O \qquad (\text{Binet})$$
$$= (\det O)^2 .$$

Leggendo O come elemento di $U(3)$ (gruppo unitario di $\mathbb{C}^3$: $U(3) = \{ U \in M_3(\mathbb{C}) \;/\; U^T U = U U^T = I_3 \}$

è $\quad \det O = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad$ (autovalori)

da $\| O v \| = \| v \|$ ($v \in \mathbb{R}^3$ o $v \in \mathbb{C}^3$, con le norme rispettive) segue che se $O v = \lambda v$, $v \neq 0$ (v autovettore), è $|\lambda| = 1$.

Ora, P_C^O è <u>un polinomio reale di 3° grado</u>, dunque <u>ammette una radice reale</u> ($= \pm 1$) e due radici <u>complesse coniugate</u> $e^{\pm i\alpha}$, in generale

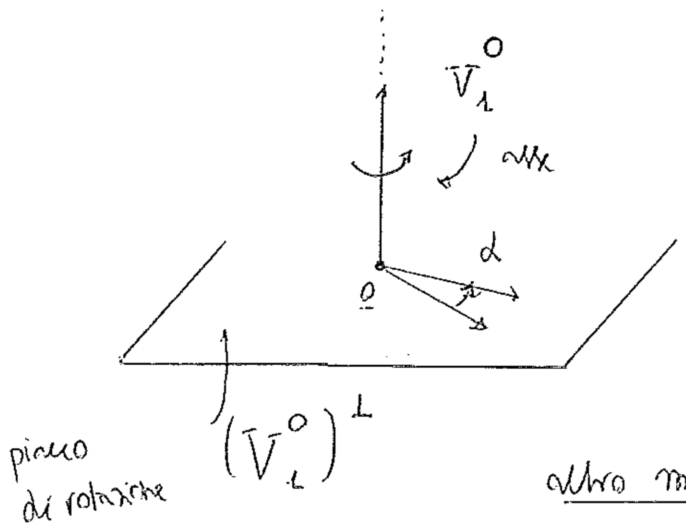
polinomio caratteristico di O

da $\det O = 1$ segue che una delle radici vale $+1$;

Escludendo il caso banale (ponendoci in forma diagonale; ciò è possibile in generale in $\mathbb{C}^3$) $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3 \text{ identità}}$ -, abbiamo un autospazio unidimensionale, in $\mathbb{R}^3$, corrispondente a $\lambda = 1$

Si giunge, per via algebrica, al teorema di Eulero:

ogni elemento di $SO(3)$ è una rotazione attorno ad un asse (l'autospazio). L'angolo di rotazione α (previa scelta di un'orientamento dell'asse) si ottiene calcolando gli autovalori (il pol. caratteristico ha sempre una radice $\lambda = 1$, le altre si ottengono dal polinomio di 2° grado ottenuto dividendo per $\lambda = 1$ ...)



altro metodo: preso $w \in (V_1^0)^\perp$,

si ha $\cos\alpha = \langle w, Ow \rangle$

Sia ora $\mathbb{R} \ni t \mapsto R(t) \in SO(3)$

una f. liscia tale che $R(t+s) = R(t)R(s) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$

(sottogruppo ad un parametro di $SO(3)$: si noti che $\mathcal{J}$ definisce un omomorfismo tra i gruppi $(\mathbb{R}, +)$ e $(SO(3), \cdot_{\text{R molt.}})$)

Si ha $R(0) = R(0)R(0) \Rightarrow R(0) = I$

Si fissi s. Calcoliamo

$$\frac{R(t+s)-R(s)}{t} = \frac{R(t)R(s)-R(s)}{t} =$$

$$= \frac{(R(t)-I_3)}{t}R(s) \xrightarrow[t\to 0]{} R'(0)R(s)$$

ossia
$\forall s \in \mathbb{R}$

$$\boxed{R'(s) = \underbrace{R'(0)}_{A} R(s) \qquad R(0)=I}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R(s) = \exp sA}$$

Si noti che $R'(0) = A$ è antisimmetrica:

$$\boxed{A^T + A = 0 \qquad (\star)}$$

infatti da $R^T R = I$ segue

$$(R^T)'R + R^T R' = 0$$

$$\Rightarrow \quad (R')^T R + R^T R' = 0$$

e, calcolando in $t=0$ (e dato che $R(0)=I_3$) si arriva a $(\star)$.

A è detto generatore infinitesimale del gruppo ad un parametro

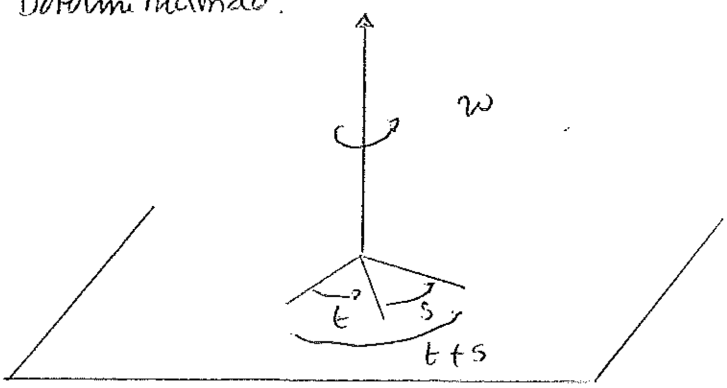
[Le matrici antisimmetriche costituiscono l' algebra di Lie di $SO(3)$..]

In forma equivalente: sia $\xi_0 \in \mathbb{R}^3$ un vettore generico. Posto $\xi(t) := R(t)\xi_0$ (sicché $\xi(0) = \xi_0$), si ha $\mathring{\xi}(t) = \dot{R}(t)\xi_0 = A\, R(t)\xi_0 = A\,\xi(t)$

$$(\diamond) \qquad \mathring{\xi} = A\,\xi \qquad\qquad \xi(0) = \xi_0$$

$$\Rightarrow \qquad \xi(t) = \exp(tA)\,\xi_0$$

Si noti che, geometricamente, le $R(t)$ (tra loro commutanti) sono rotazioni attorno ad un medesimo asse. Determiniamolo.



Poniamo $\qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A^T = -A$

$\det A = \det(-A^T) = (-1)^3 \det(A^T) = -\det A$

$\Downarrow$

$\det A = 0$

Sia $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} r(A) = 2 \\ \text{rango} \\ \text{chiaro...} \end{array} \right.$

$r(A) = 2 \Rightarrow \nu(A) = 3 - 2 = 1$

si trova subito $\quad \operatorname{Ker} A = \langle w \rangle \qquad A\,w = \underline{0}$

e w è l'asse di rotazione cercato: $(\exp tA)\,w =$

$$(1 + tA + \dots)\,w = w + t\underbrace{A\,w}_{=\underline{0}} + \underbrace{\dots}_{=0}$$

La ($\star$) può vedersi anche nel modo seguente:

posto $\quad \underline{\xi} = \xi_1 \underline{i} + \xi_2 \underline{j} + \xi_3 \underline{k}$

$\quad\quad\quad \underline{w} = w_1 \underline{i} + w_2 \underline{j} + w_3 \underline{k} \quad \ldots$ è

$$\dot{\underline{\xi}} = \underline{w} \times \underline{\xi} \qquad (\text{e} \quad \underline{\xi}(0) = \underline{\xi}_0)$$

$\times$: prodotto vettoriale : $\quad = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix} =$

$$= \underline{i} \begin{vmatrix} w_2 & w_3 \\ \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix} + \underline{j} \begin{vmatrix} w_3 & w_1 \\ \xi_3 & \xi_1 \end{vmatrix} + \underline{k} \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ \xi_1 & \xi_2 \end{vmatrix}$$

$$= \underline{i} \left[w_2 \xi_3 - w_3 \xi_2 \right] + \underline{j} \left[w_3 \xi_1 - w_1 \xi_3 \right] + \underline{k} \left[w_1 \xi_2 - w_2 \xi_1 \right]$$

D'altro canto $\quad A \xi = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} w_2 \xi_3 - w_3 \xi_2 \\ w_3 \xi_1 - w_1 \xi_3 \\ w_1 \xi_2 - w_2 \xi_1 \end{pmatrix}$$, da cui l'asserto.

|| Il vettore geometrico $\underline{w}$ è chiamato vettore <u>velocità angolare</u>.

Approfondimento

risolviamo, in generale, il seguente problema di Cauchy

$$\star \qquad \boxed{R'(t) = A(t)\,R(t) \qquad R(0) = R_0 = I}$$

(famiglia di rotazioni con asse variabile ...)

$\underline{\omega} = \underline{w}(t)$

$$\left(\underline{\xi}' = \underline{w} \times \underline{\xi} \ \dots \right)$$

⚠ non

Si può far vedere che

$$R(t) = I + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{0 \le t_1 \le t_2 \le \dots \le t_m \le t} A(t_m)\,A(t_{m-1}) \dots A(t_1)\, dt_1\, dt_2 \dots dt_m$$

spesso chiamato integrale iterato di Chen

$$\equiv \quad \exp\left(: \int_0^t A(x)\, dx : \right)$$

: notazione di Wick

la serie converge ...

$\star$ esponenziale a tempo ordinato

[cui si può dar senso anche come "integrale prodotto" alla Volterra

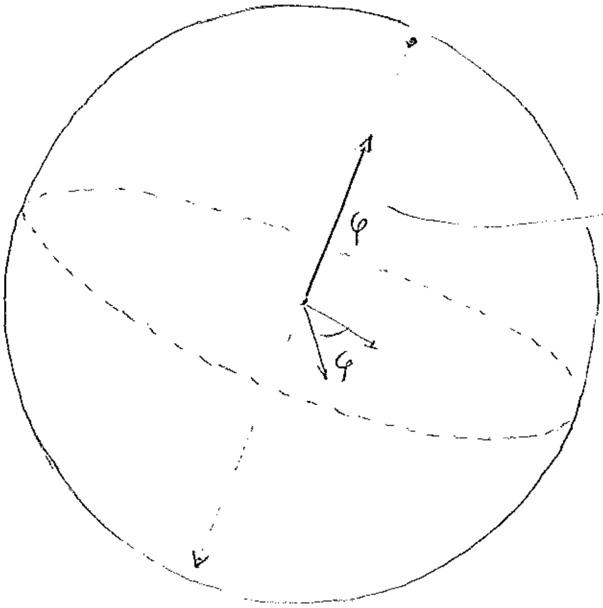
$$\prod_0^t e^{A(x)\,dx}$$

cf. l'identità di Eulero

$$\left[e^{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \right]$$

La $\star$, e la relativa soluzione, sussistono in contesti molto generali ...

Notiamo infine, che, come spazio topologico, SO(3) può vedersi come $\mathbb{RP}^3$ (spazio proiettivo reale)



Sfera (piena) di raggio $R = \pi$ con i p.ti antipodali del bordo identificati

asse di una rotazione generica, di angolo φ opportunamente orientato; se $\varphi = \pm\pi$, si ottiene la stessa rotazione