# ESERCIZI DI ALGEBRA LINEARE
# E
# COMPLEMENTI DI GEOMETRIA

Foglio 4*

**Esempio 1.** Sia $V = \mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ lo spazio dei polinomi di grado strettamente minore di 5. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $V$

$$V_s = \{f \in V |\, f(x) = f(-x)\}$$
$$V_a = \{f \in V |\, -f(x) = f(-x)\}$$

*(i)* Dimostrare che $V_s \leq V$ e $V_a \leq V$.

*(ii)* Determinare un insieme di generatori per $V_s$ e $V_a$.

**Sol.** *(i)* In primo luogo osserviamo che $V_s \neq \{\}$, infatti il polinomio nullo sta in $V_s$. Siano $f, g \in V_s$ e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Per mostrare che $V_s \leq V$ facciamo vedere che $\alpha f + \beta g \in V_s$ per ogni $f, g \in V_s$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dal momento che $f, g \in V$ sia ha che $(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$. Analogamente $(\alpha f + \beta g)(-x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = (\alpha f + \beta g)(x)$ in cui la penultima uguaglianza vale poiché $f, g \in V_s$.

*(ii)* Il generico vettore di $V$ è del tipo $f(x) = a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$. Ora $f(-x) = a_4x^4-a_3x^3+a_2x^2-a_1x+a_0$. Ricordando che due polinomi sono uguali quando hanno i coefficienti uguali, si ricava che $f(x) = f(-x)$ se e solo se $a_3 = 0 = a_1$. A questo punto, ricordando che $V =< 1, x, x^2, x^3, x^4 >$ si ricava facilmente che un insieme di generatori di $V_s$ è ad esempio $\{1, x^2, x^4\}$.

La parte per $V_a$ è analoga ed è lasciata per esercizio.

**Esempio 2.** Sia $V$ lo spazio vettoriale reale delle funzioni reali di variabile reale $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Sia $W = \{f \in V |\, f(1) = 0 \text{ opp. } f(4) = 0\}$. Si dica se $W \leq V$.

**Sol.** In primo luogo osserviamo che $W \neq \{\}$.Infatti la funzione nulla sta in $W$. Siano ora $f, g \in W$, ad esempio $f(x) = x - 1$ e $g(x) = x - 4$. È immediato osservare che $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \neq W$, infatti $f(x) + g(x) = x - 1 + x - 4 = 2x - 5 \neq W$. Quindi $W \nleq V$.

**Esempio 3.** Si consideri l'insieme $\mathbb{R}^*_+$ dei reali strettamente positivi dotato delle seguenti operazioni: la "*somma*" dei due numeri sia l'usuale prodotto, cioè se $r, s \in \mathbb{R}^*_+$ la *somma* tra i due è data dal prodotto $rs$; il *prodotto per scalari* sia l'usuale esponenziazione, cioè se $r \in \mathbb{R}^*_+$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ il prodotto per scalari è $\alpha(r) = r^\alpha$. Dimostrare che $\mathbb{R}^*_+$ dotato di queste operazioni è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Determinare l'elemento neutro e l'opposto di ogni elemento. Tale spazio vettoriale ha dimensione finita?

**Sol.** È semplice osservare che vale la proprietà associativa (A1), dal momento che essa vale per l'usuale prodotto. Dalle regole del prodotto usuale si ricava che l'elemento neutro è l'1 (A2) e che l'opposto di ogni numero $r \in \mathbb{R}^*_+$ è dato dal reciproco (A3). Verifichiamo i rimanenti assiomi uno per uno.
(M1) Siano $r \in \mathbb{R}^*_+$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $\alpha(\beta r) = \alpha(r^\beta) = (r^\beta)^\alpha = r^{\alpha\beta} = (\alpha\beta)r$.
(M2) Siano $r \in \mathbb{R}^*_+$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $(\alpha+\beta)r = r^{\alpha+\beta} = r\alpha\, r^\beta = \alpha r + \beta r$, in cui la "+" nel primo membro è l'usuale somma sui reali.
(M3) Siano $r, s \in \mathbb{R}^*_+$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. $\alpha(r + s) = \alpha(rs) = (rs)^\alpha = r^\alpha s^\alpha = \alpha r + \alpha s$, in cui la "+" aprimo membro è la "*somma*" definita su $\mathbb{R}^*_+$.
(M4) Sia $r \in \mathbb{R}^*_+$. $1r = r^1 = r$.

*Sono a grato a quanti mi indicheranno i molti errori presenti in questi fogli, al fine di fornire uno strumento migliore a quanti lo riterranno utile, e-mail: sansonetto@sci.univr.it

**Esercizio 4.** Dimostrare che l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2+y^2=1\}$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

**Esercizio 5.** $\mathbb{C}$ può essere pensato sia come a $\mathbb{R}$ che come $\mathbb{C}$-spazio vettoriale. Qual' è la dimensione di $\mathbb{C}$ come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale? E come $\mathbb{C}$-spazio vettoriale? Determinare due diverse basi in entrambi i casi.

**Esercizio 6.** Dimostrare che gli spazi delle funzioni continue sui reali $C^0(\mathbb{R})$ e lo spazio delle funzioni continue con derivata continua sui reali $C^1(\mathbb{R})$ sono $\mathbb{R}$-spazi vettoriali. Che dimensione hanno? Dimostrare che lo spazio delle funzioni complesse è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale.

**Esempio 7.** Verificare che il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ formato dai vettori $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$ tale che

$$\Sigma = \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Determinare un insieme di generatori, una base e la dimensione di $\Sigma$.

**Sol.** In primo luogo osserviamo che $\mathbf{0}=(0,0,0) \in \Sigma$. Siano, ora, $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \Sigma$, e $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, mostriamo allora che $(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) \in \Sigma$. Infatti

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta y_1 - (\alpha x_3 + \beta y_3) = \alpha(x_1 - x_3) + \beta(y_1 - y_3) = 0 \\ \alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2 = \alpha(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2) = 0 \end{cases}$$

e quindi $\Sigma \in \mathbb{R}^3$. Per determinare un insieme di generatori di $\Sigma$ cerchiamo il numero di soluzioni di $\Sigma$. La matrice associata a $\Sigma$ è

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

È semplice osservare che una forma ridotta di tale matrice è

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e quindi il sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da un parametro. In particolare lo spazio delle soluzioni è generato dal vettore $(1,-1,1)^T$ e quindi $\dim\Sigma = 1$.

**Esercizio 8.** Verificare che il sottoinsieme

$$r = \left\{ (x_1,x_2,x_3)^T \in \mathbb{R}^3 | \begin{cases} 2x_1 - 32x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \right\}$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e che $r = <(1,1,1)^T>$.

**Esercizio 9.** Dimostrare che il sottoinsieme delle funzioni di classe $C^1$ di $\mathbb{R}$ in sè tali che $f'+f=0$[1] è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

**Esercizio 10.** Verificare che il sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$ formato dai vettori $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$ tale che

$$\Sigma = \begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$. Determinare un insieme di generatori, una base e la dimensione di $\Sigma$.

**Esercizio 11.** Verificare che il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ formato dai vettori $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$ tale che

$$\Sigma = \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. Determinare un insieme di generatori, una base e la dimensione di $\Sigma$.

**Esercizio 12.** Si considerino i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ $U$ e $V$ rispettivamente formati dai vettori $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$ tali che

$$\Sigma_U = \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \Sigma_V = \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

1. Verificare che sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$.

[1] Indichiamo con ' la derivata prima d $f$.

2. Determinarne la dimensione e una base di $U$ e $V$.
3. Determinare la dimensione e una base dell'intersezione $U \cap V$.
4. $U$ e $V$ sono in somma diretta?

**Esempio 13.** Verificare se l'insieme

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori per $\mathbb{C}^4$. Estrarre da $S$ una base di $\mathbb{C}^4$.

**Sol.** Per verificare che $S$ è un insieme di generratori per $\mathbb{C}^4$ è sufficiente mostrare che la matrice $A_S$ che ha per colonne i vettori di $\mathbb{C}^4$ abbia rango quattro, cioè che in $S$ ci sono quattro vettori linearmente indipendenti. Si osservi che ciò equivale a dimostrare che ogni vettore $\mathbf{v}$ di $\mathbb{C}^4$ si può scrivere come combinazione lineare degli elementi di $S$, cioè che il sistema

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i s_i$$

in cui $\alpha_i \in \mathbb{C}$ $i = 1, \ldots, 5$ e gli $s_i$ $i = 1, \ldots, 5$ denotano gli elementi di $S$, ammette soluzione (è compatibile). Dalla teoria dei sistemi lineare si ricava facilmente che tale sistema ammette soluzione se la colonna dei termini noti non è mai dominante, cioè se la matrice delle incognite ha rango quattro. Ora

$$A_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Applichiamo l'eliminazione di Gauss alla matrice $A_S$ (moltiplicandola per le matrici elementari $E_{44}(-1)E_{43}(2)E_{42}(2)E_{41}(-2)$) ottenendo la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha rango quattro avendo 4 colonne dominanti. Di conseguenza l'insieme $S$ genera $\mathbb{C}^4$. Inoltre una base di $\mathbb{C}^4$ estratta da $S$ è data da

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

**Esempio 14.** Sia $V = M_2(\mathbb{C})$ il $\mathbb{C}$-spazio vettoriale delle matrici complesse $2 \times 2$ e sia $W$ il sottoinsieme delle matrici complesse simmetriche $2 \times 2$.

1. Verificare che $W$ è sottospazio di $M_2(\mathbb{C})$.
2. Si consideri l'insieme
$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$
Provare che $< S >= W$ ed estrarre da $S$ una base di $W$.

**Sol.** 1. È semplice verificare che $W$ è $\mathbb{C}$-sottospazio di $M_2(\mathbb{C})$. Basta mostrare che per ogni $\mathbf{w}, \mathbf{z}$ in $W$ e ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ si ha che $\alpha\mathbf{w} + \beta\mathbf{z} \in W$. Ciò si verifica semplicemente effettuando il calcolo e scrivendo espressamente il tipico elemento di $W$.

2. Sia $\mathbf{w}$ il generico elemento di $W$,
$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$
Vogliamo verificare che ogni $\mathbf{w}$ di $W$ si scrive come combinazione lineare a coefficienti complessi degli elementi di $S$, ossia che
$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i s_i$$
in cui $\alpha_i \in \mathbb{C}$ e $s_i$ $i = 1, \ldots, 5$ denotano gli elementi di $S$. Ciò equivale a richiedere che il seguente sistema lineare ammetta soluzione per ogni $\mathbf{w}$ in $W$
$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = a \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5 = b \\ \alpha_4 + \alpha_5 = c \end{cases}$$
Tale sistema ammette soluzione se e solo se la matrice dei termini noti non è dominante cioè se e solo se la matrice delle incognite (la matrice non-aumentata del sistema) ha rango massimo, cioè 4. Per mostrare ciò applichiamo l'eliminazione di Gauss alla matrice $A_S$ delle incognite,
$$A_S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
ottenendo
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
Tale matrice ha rango massimo, infatti a tre colonne dominanti e quindi $W =< S >$. Inoltre si ha che $\dim W = 3$. Infine una base di $W$ estratta dai vettori di $S$ è data dai vettori corrispondenti alle colonne dominanti della forma ridotta di $A_S$, ad esempio dalla prima, seconda e quarta colonna, ricostruite come matrici, cioè dalle matrici $s_1, s_2, s_4$ di $S$.

**Esercizio 15.** Provare che il sottoinsieme $W$ di $\mathbb{C}^4$ definito dai vettori $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ tali che
$$\Sigma_W = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$
è $\mathbb{C}$-sottospazio di $\mathbb{C}^4$. Determinare un insieme di generatori, la dimensione e una base di $W$. Sia, inoltre, $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^4 |\ x_1 + x_2 = 0\}$; determinare la dimensione e una base di $V$. Infine determinare la dimensione e una base di di $W \cap V$. $W$ e $V$ sono in somma diretta?

**Esercizio 16.** Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{C}^4$
$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \right\}$$
Determinare $\dim < W >$ e una base per $< W >$. Quindi completare tale base ad una base di $\mathbb{C}^4$.

**Esercizio 17.** Si consideri lo spazio vettoriale reale delle funzioni continue di $\mathbb{R}$ in sè.

1. Dimostrare che l'insime $\{1, \sin^2, \cos^2\}$ è linearmente dipendente.
2. Dimostrare che l'insieme $\{\sin nx,\ n \in \mathbb{N}^*\} \cap \{\cos nx,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ è linearmente indipendente.
3. Cosa si può dire a riguardo dell'insieme $\{\sin(\alpha + nx),\ n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$?

**Esercizio 18.** Si consideri il sottospazio $W$ di $\mathbb{R}^3$ determinato dalle soluzioni dell'equazione $x_1 + x_3 = 0$.

1. Determinare un sottospazio $T$ di $\mathbb{R}$ tale che $\mathbb{R}^3 = W \oplus T$.
2. È possibile determinare un altro sotospazio $T'$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = W \oplus T'$ e $T \cap T' = \mathbf{0}$. In caso affermativo effettuarne un esempio.

**Esercizio 19.** Si consideri i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ $S_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 |\ x_1 = x_3\}$ $S_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_2 = -x_4\}$. Determinare la dimensione dei sottospazi $S_1$, $S_2$, $S_1 \cap S_2$ e $S_1 + S_2$, quindi esibire una base di ciascuno di essi.

**Esercizio 20.** Sia $V =< (1, 2, 0)^T,\ (1, 0, 2)^T >$ sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Sia $S_\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\Sigma_\alpha = \begin{cases} \alpha x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ \alpha x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - (\alpha - 1)x_3 = 0 \end{cases}$$

1. Determinare le soluzioni $S_\alpha$ di $\Sigma_\alpha$.
2. $S_\alpha$ è sottospazio di $\mathbb{R}^3$? (Giustificare la risposta) Determinane una base.
3. Determinare la dimensione di $V$.
4. Dire per quali valori di $\alpha$ $S_\alpha$ e $V$ sono in somma diretta.
5. Dire per quali valori di $\alpha$ $S_\alpha \cap V = \mathbf{0}$.