Geometria — Prova scritta del 5/9/2007

(Prof. M. Spera)

Svolgere l'esercizio ① o l'es. ② (vel) e altri due esercizi a scelta. Tempo a disposizione: 2 h. Le risposte vanno adeguatamente giustificate

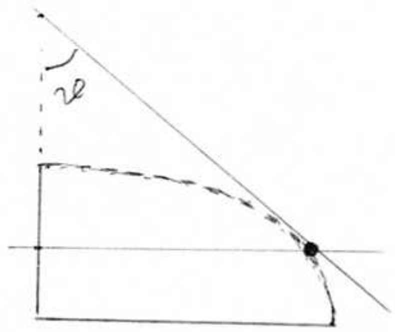
① Nel piano cartesiano, sia data l'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 1$. Dopo averne fornito una parametrizzazione naturale in termini di funzioni circolari, se ne determini l'evoluta; in seguito si calcoli la lunghezza di quest'ultima.

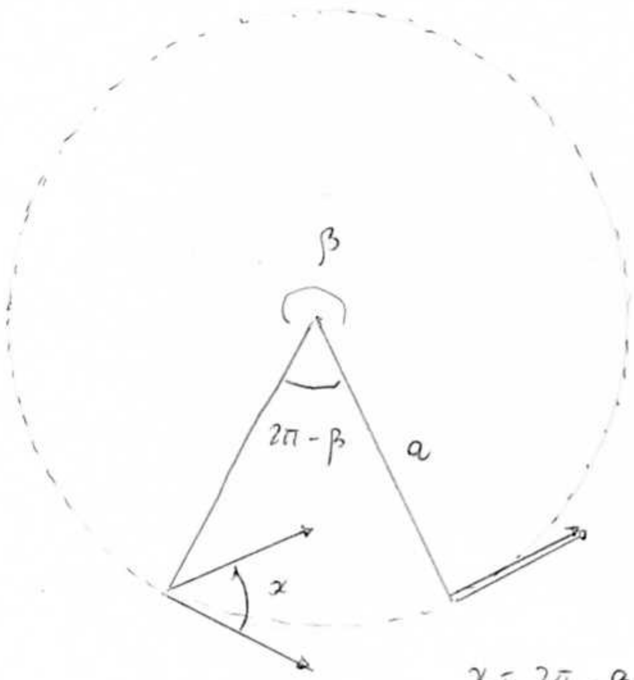
② Si consideri l'ellissoide di rivoluzione ottenuto facendo ruotare l'ellisse $x^2 + 4z^2 = 1$ attorno all'asse z. Se ne calcolino le curvature principali e la curvatura gaussiana [conviene usare la parametrizzazione dell'es ①]

③ Si calcoli la curvatura geodetica della circonferenza $\mathcal{C}$ ottenuta segando l'ellissoide di ② col piano $z = \frac{1}{4}$. Si calcoli poi l'angolo tra la tangente a $\mathcal{C}$ in un suo punto generico e il trasporto parallelo del vettore tangente lungo la circonferenza stessa [v. figura; si sottintende un orientamento...]

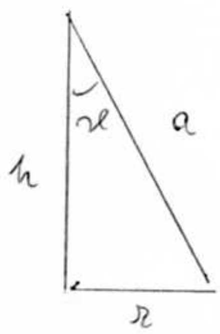
④ Nel piano, si considerino gli spazi topologici $\mathcal{E}: x^2 + 4y^2 = 1$, $\mathcal{I}: x^2 - 4y^2 = 1$ (topologia indotta). Risultano omeomorfi? Giustificare la risposta in più modi.

Figure relative all'es. (3)





$x = 2\pi - \beta$



$\beta = 2\pi \sin \vartheta$

(1) Diamo una sol. generale

$$\underline{P}: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi) \qquad \dot{\underline{P}} \neq \quad \ddot{\underline{P}} \neq$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

formalismo "mesi"

Si ricordi

$$\underline{n} = \frac{i\dot{\underline{P}}}{\|\dot{\underline{P}}\|}$$

$$Q = \underline{P} + \rho\, \underline{n}$$

$\cap$ $\quad$ $\parallel$

$\mathcal{E}$ $\quad$ $\frac{1}{k}$

$$\boxed{k = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}} = \frac{\langle i\dot{\underline{P}}, \ddot{\underline{P}}\rangle}{\|\dot{\underline{P}}\|^3}$$

$$= \underline{P} + \frac{\|\dot{\underline{P}}\|^3}{\langle i\dot{\underline{P}}, \ddot{\underline{P}}\rangle} \cdot \frac{i\dot{\underline{P}}}{\|\dot{\underline{P}}\|} =$$

$$= \underline{P} + \frac{\|\dot{\underline{P}}\|^2}{\langle i\dot{\underline{P}}, \ddot{\underline{P}}\rangle}\, i\dot{\underline{P}}$$

Calcoliamo: $\quad \underline{P}: (a\cos t,\ b\sin t)$

$\dot{\underline{P}}: (-a\sin t,\ b\cos t) \qquad i\dot{\underline{P}} = (-b\cos t, -$

$\ddot{\underline{P}}\ (-a\cos t,\ -b\sin t)$

$$\|\dot{\underline{P}}\|^2 = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t$$

$$\langle i\dot{\underline{P}}, \ddot{\underline{P}}\rangle = ab\cos^2 t + ab\sin^2 t = ab$$

$$Q = \begin{pmatrix} a\cos t \\ \\ b\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\dots}{ab}\,(-b\cos t) \\ \\ \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab}\,(a\sin t) \end{pmatrix}$$

omp:

$$a\cos t \;-\; a\sin^2 t\cos t - \frac{b^2}{a}\cos^3 t =$$

$$= a\cos t - a\,(1-\cos^2 t)\cos t - \frac{b^2}{a}\cos^3 t =$$

$$= \cancel{a\cos t} - \cancel{a\cos t} + a\cos^3 t - \frac{b^2}{a}\cos^3 t = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t$$

comp: $\quad \dots \quad = \dfrac{-a^2+b^2}{b}\sin^3 t$

$$\Rightarrow \quad Q: \begin{cases} x = \dfrac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t = \dfrac{c^2}{a}\cos^3 t \\ \\ y = -\dfrac{c^2}{b}\sin^3 t \end{cases}$$

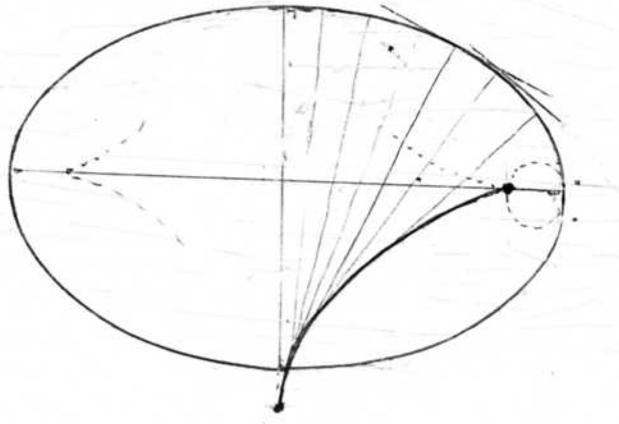
$c = ae$

$\dfrac{a^2e^2}{a} = ae^2$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{ax}{c^2}\right)^{2/3} + \left(\frac{by}{c^2}\right)^{2/3} = 1$$

asteroide

(o astroide)



sol. tramite la teoria ...

ante

$$\mathcal{E}: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

miglia delle tangenti:

$$b^2 x_0 (x - x_0) + a^2 y_0 (y - y_0) = 0 \qquad (x_0, y_0) \in \mathcal{E}$$

fam. delle normali

$$a^2 y_0 (x - x_0) - b^2 x_0 (y - y_0) = 0$$

$$a^{\cancel{2}} \cancel{b} \sin t \, (x - a\cos t) - b^{\cancel{2}} \cancel{a} \cos t \, (y - b\sin t) = 0$$

$$a \sin t \; x \quad - a^2 \cos t \sin t \quad - b\cos t \; y \quad + b^2 \sin t \cos t$$

$$a \sin t \; x - b\cos t \; y - (a^2 - b^2) \sin t \cos t = 0$$

$(x, y, t) = 0$

inviluppo

$$\begin{cases} f(x, y, t) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial t}(x, y, t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \sin t \; x - b\cos t \; y = \underbrace{(a^2 - b^2) \sin t \cos t}_{= (a^2-b^2)\frac{1}{2}\sin 2t} \\ a\cos t \; x + b \sin t \; y = (a^2 - b^2) \cos 2t \end{cases}$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$$

$\Rightarrow$ (Cramer)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} (a^2-b^2)\sin t\cos t & -b\cos t \\ (a^2-b^2)\cos 2t & b\sin t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a\sin t & -b\cos t \\ a\cos t & +b\sin t \end{vmatrix}} = \frac{(a^2-b^2)\left[b\sin^2 t\cos t + b\cos t(\cos^2 t - \sin^2 t)\right]}{ab}$$

$$\begin{vmatrix} a\sin t & -b\cos t \\ a\cos t & +b\sin t \end{vmatrix} = ab(\sin^2 t + \cos^2 t) = ab$$

$$x = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a\sin t & (a^2-b^2)\sin t\cos t \\ a\cos t & (a^2-b^2)\cos 2t \end{vmatrix}}{ab} = \frac{\cancel{a}(a^2-b^2)}{\cancel{a}b}\left(\sin t(\cos^2 t - \sin^2 t) - \sin t\cos^2 t\right)$$

$$= -\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t$$

dunque:

2. $$\begin{cases} x = \dfrac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t \\ y = -\dfrac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t \end{cases}$$

in conformità al calcolo precedente (come è giusto che sia) lunghezza dell'arco di evoluta in figura

$t = 0 \qquad k = \frac{ab}{b^3} = \frac{a}{b^2} \qquad \rho_0 = \frac{b^2}{a}$

$$k = \frac{\langle i\dot{P}, \ddot{P} \rangle}{\|\dot{P}\|^3}$$

$\langle i\dot{P}, \ddot{P} \rangle = ab$

$\|\dot{P}\|^3 = (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}$

$t = \frac{\pi}{2} \qquad k = \frac{ab}{a^3} = \frac{b}{a^2}$

$\Rightarrow \rho_{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{b}$

$\star$ lunghezza $= \rho_{\frac{\pi}{2}} - \rho_0 = \frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} = \frac{a^3 - b^3}{ab}$

Nel caso in questione $\left(a = 1 \quad b = \frac{1}{2} \right)$

si ha: $c^2 = a^2 - b^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} \cos^3 t \\ y = -\frac{3}{4} \cdot 2 \sin^3 t = -\frac{3}{2} \sin^3 t \end{cases}$$

$$l = \frac{1 - \frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{8} \cdot 2 = \frac{7}{4}$$

Lunghezza totale $= 4l = 4 \cdot \frac{7}{4} = 7$

(2) La curvatura del meridiano vale, in un pto generico (cf. es. 2) [caso generale]

$$k = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}$$

questa è una delle curv. principali $\equiv k_1$

troviamo la lunghezza della normale [gran normale], l'inverso di questa darà k_2.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \qquad b^2 x^2 + a^2 z^2 - a^2 b^2 = 0$$

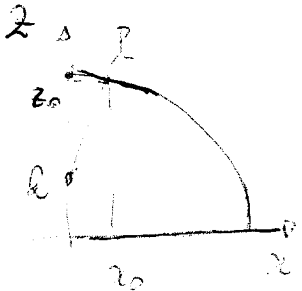
tangente in un pto: $b^2 x_0 (x - x_0) + a^2 z_0 (z - z_0) = 0$

normale: $a^2 z_0 (x - x_0) - b^2 x_0 (z - z_0) = 0$

int. con l'asse z: $(x = 0)$ $\qquad x_0 \neq 0$

$$+ a^2 x_0 z_0 - b^2 x_0 (z - z_0) = 0$$

$$z - z_0 = -\frac{a^2}{b^2} z_0 \qquad z = z_0\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)$$



$$\overline{PQ}^2 = x_0^2 + \frac{a^4}{b^4} z_0^2 = \frac{b^4 x_0^2 + a^4 z_0^2}{b^4}$$

$$k_2 = \frac{1}{\overline{PQ}} = \frac{b^2}{\sqrt{b^4 x_0^2 + a^4 z_0^2}}$$

in termini del parametro t

$$k_2 = \frac{b^2}{\sqrt{b^4 a^2\cos^2 t + a^4 b^2 \sin^2 t}} = \frac{b^{\cancel{2}}}{a\cancel{b}\sqrt{b^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}}$$

$$= \frac{b}{a}\ \frac{1}{\sqrt{b^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}}$$

$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2}$

$$K = k_1 k_2 = \cancel{a}b \cdot \frac{b}{\cancel{a}}\ \frac{1}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^2}$$

$$= \frac{b^2}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^2}$$

check:
$a = b$
$\frac{b^2}{b^4} = \frac{1}{b^2}$

ok

$$b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - a^2e^2 = a^2(1-e^2)$$

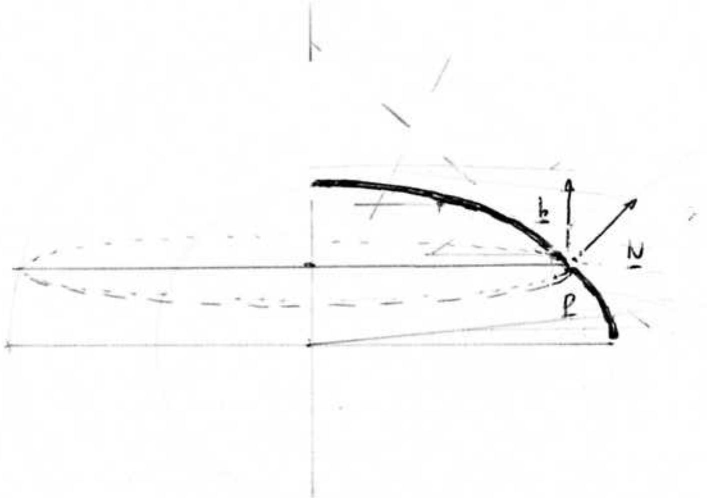
$$\frac{b^2}{(a^2\sin^2 t + b^2(1-\sin^2 t))^2} = \frac{b^2}{((a^2-b^2)\sin^2 t + b^2)^2} = \frac{a^2(1-e^2)}{(a^2e^2\sin^2 t + a^2(1-e^2))^2}$$

$$= \frac{1-e^2}{a^2\left[e^2\sin^2 t + 1 - e^2\right]^2} = \frac{1-e^2}{a^2(1-e^2\cos^2 t)^2}$$

$t = 0 \quad K = \frac{1}{a^2}$ ok.

$t = \frac{\pi}{2} \ : \quad K = \frac{1-e^2}{a^2}$

③ Curvatura geodetica di $\mathscr{C}$: $\begin{cases} \underbrace{x^2+y^2}_{\rho^2} + 4z^2 = 1 \\ z = \frac{1}{4} \end{cases}$



Si tratta ovviamente di una circonferenza, per cui avremo

$$\underset{(\text{costante})}{k_g} = \underset{\substack{\| \\ \frac{1}{r} \\ (\text{raggio})}}{k} \cdot \langle \underline{b}, \underline{N} \rangle$$

ora $r^2 + 4\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad r^2 + \underbrace{4\frac{1}{16}}_{\frac{1}{4}} = 1$

$\Rightarrow \quad r^2 = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2}{\sqrt{3}}$

inoltre $\underline{b} = (0, 0, 1)$

calcoliamo $\underline{N}$ in $P: \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{4}\right)$

piano tangente all'ellissoide in $\underline{P}$:

$$\overset{\sqrt{3}/2}{\overset{\shortparallel}{2x_0}}(x-x_0) + 2y_0(y-y_0) + 4\cdot 2\underset{\underset{\frac{1}{4}}{\shortparallel}}{z_0}(z-z_0) = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + z - \frac{1}{4} = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + z - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + z - 1 = 0 \qquad \sqrt{3}x + 2z - 2 =$$

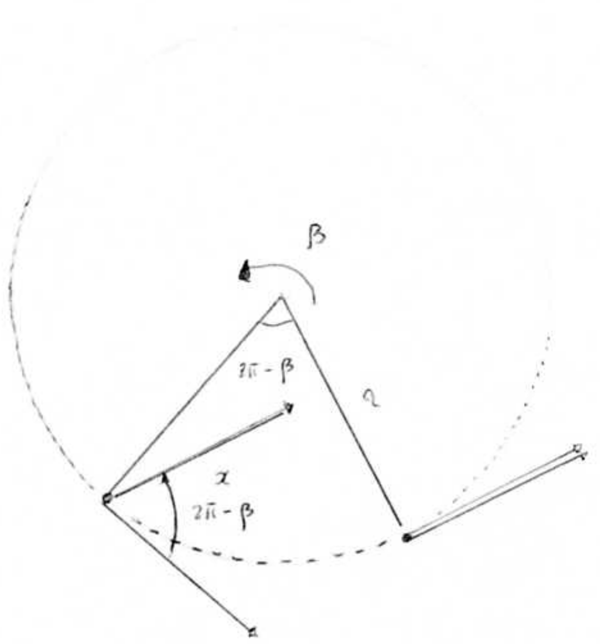
$$\underline{N} = \frac{(\sqrt{3}, 0, 2)}{\sqrt{7}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}}(\sqrt{3}, 0, 2) \qquad \underline{b} = (0, 0, 1)$$

$$\Rightarrow \langle \underline{b}, \underline{N} \rangle = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

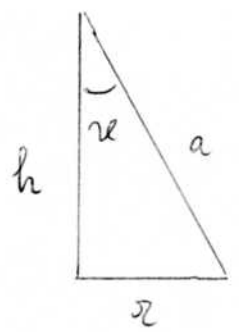
$$\Rightarrow k_g = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{4}{\sqrt{21}}$$

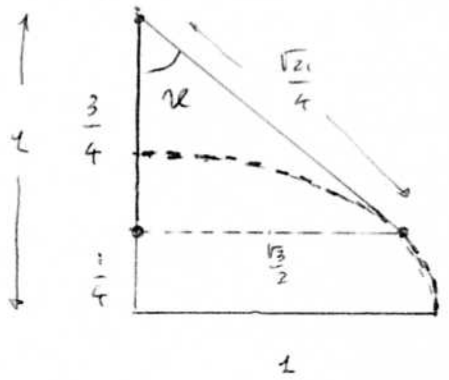
③ Usando il suggerimento:



$x = 2\pi - \beta$

$\beta = 2\pi \sin\vartheta$





retta tangente a

$x^2 + 4z^2 = 1$

in $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}\right)$

$\cancel{2}\, x_0(x - x_0) + 4 \cdot \cancel{2} z_0 (z - z_0) =$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \underbrace{4 \cdot \frac{1}{4}}_{1}\left(z - \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{4} + z - \frac{1}{4} = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + z - 1 = 0 \qquad \sqrt{3}x + 2z - 2 =$$

int. con l'asse z $(x = 0)$ $\Rightarrow$ $z = 1$

$$a = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{12+9}{16}} = \frac{\sqrt{21}}{4} \Rightarrow \sin\vartheta = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{21}}$$

$\sqrt{3}\sqrt{}$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\operatorname{sen} \vartheta = \frac{2}{\sqrt{7}} \qquad x = 2\pi \left(1 - \frac{2}{\sqrt{7}}\right) =$$

$$= 2\pi \left(1 - \frac{2\sqrt{7}}{7}\right) = \frac{2\pi}{7}\left(7 - 2\sqrt{7}\right)$$

v. oltre per una sol. di tipo analitico

(4) $\mathcal{E}$ è un'ellisse, $\mathcal{I}$ un'iperbole

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{E} \text{ è } \underline{\text{compatta}},\ \mathcal{I}\ \underline{\text{no}} \\ \mathcal{E} \text{ è } \underline{\text{connessa}},\ \mathcal{I}\ \underline{\text{no}} \ (\text{due rami} \ldots \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{E} \not\cong \mathcal{I}$$

(per ex, è omeomorfa ad una circonferenza)

non è connessa per archi, è loc. connessa per archi)

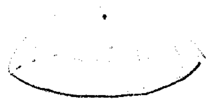
★ Variante analitica (2ª parte es. 3)

– calcoliamo $\alpha = -\frac{1}{2} \int \left(-\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\, du + \frac{G_u}{\sqrt{EG}}\, dv \right)$

lungo $\mathcal{C}$ (ρ = cost)

$u = \rho$ $\qquad E = 1+\Phi'^2$ $\qquad \Phi = \Phi(\rho)$ $\qquad F = 0$

$v = \varphi$ $\qquad G = \rho^2$



$$\alpha = -\frac{1}{2} \int \frac{\overbrace{\frac{\partial \rho^2}{\partial \rho}}^{2\rho}}{\sqrt{1+\Phi'^2}\cdot \rho}\, d\varphi$$

$\rho = \rho_0$

$$= -\int \frac{\rho_0}{\sqrt{1+\Phi'^2}\,\rho_0}\, d\varphi = -2\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\Phi'^2}}$$

$\rho^2 + 4\Phi^2 = 1$ $\qquad \cancel{2}\rho + 4\cdot \cancel{2}\overset{z}{\Phi}\,\Phi' = 0$

$\frac{\sqrt{3}}{2} + \cancel{4}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}\Phi' = 0$ $\qquad \Phi' = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Phi'^2 = \frac{3}{4}$ $\qquad 1+\Phi'^2 = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\Phi'^2}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$

$\Rightarrow \alpha = -2\pi \cdot \frac{2}{\sqrt{7}}$ $\qquad \Rightarrow \chi = 2\pi - 2\pi\frac{2}{\sqrt{7}}$

va aggiunto ⚠ $\qquad 2\pi\left(1 - \frac{2}{\sqrt{7}}\right)$

fatti: I_n "rotazione di 2π"