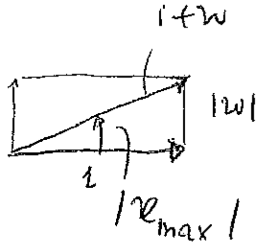
TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE
prof. M. Spera a.a. 2009/10 Lezione X

Ancora sull'indice

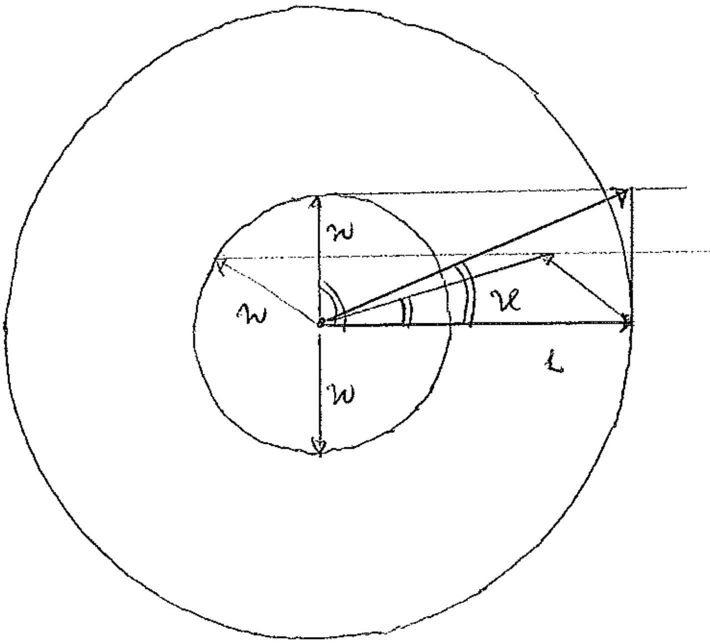
☆ **Lemma** Sia $w \in \mathbb{C}$ $|w|<1$

$$\arg 1 := 0$$

$$|\alpha| \equiv |\arg(1+w)| \leq \arctan|w| < \frac{\pi}{4}$$

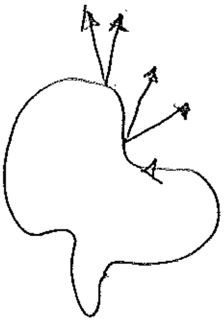


Dim. ovvia...



☆ conseguenza (teorema di Rouché generalizzato)

Se $v_2 = v_1 + w$ $\qquad \dfrac{\|v_2 - v_1\|}{\|v_1\|} = \dfrac{\|w\|}{\|v_1\|} < 1$



$$\mathrm{ind}_\Gamma v_2 = \mathrm{ind}_\Gamma v_1$$

Applicazione:

Teorema fondamentale dell'algebra

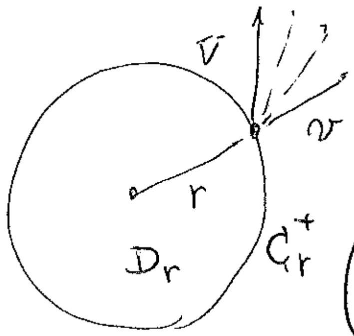
(Dim. topologica)

Sia $n \geq 1$

$$V(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots a_n$$
$$v(z) = z^n$$

(leggiamolo come campo vettoriale...)

Sia r suff. grande $(+)$



$$\mathrm{ind}_{C_r}(v) = n$$
$$\|$$
$$\mathrm{ind}_{C_r}(V)$$

V ↯ (V non contiene pti singolari (radici))

$$\left(v_t(z) = z^n + t(a_1 z^{n-1} + \dots a_n) \quad \text{omotopia} \quad v_0 = v \quad v_1 = V \right)$$

Dunque $\mathrm{ind}_{C_r^+}(V) = n \neq 0$

$\Rightarrow$ V ha dentro un pto singolare

$\Rightarrow$ ne ha n (Rouché)

Oppure: $\mathrm{ind}_{C_r}(V) =$ # radici in D_r
(in virtù della formula dell'indicatore logaritmico)

$(+)$ Si applichi il lemma precedente a $\frac{V}{v}$
preceding lemma

$$= 1 + \underbrace{\left\{ a_1 \frac{1}{z} + \dots \frac{a_n}{z^n} \right\}}_{w}$$

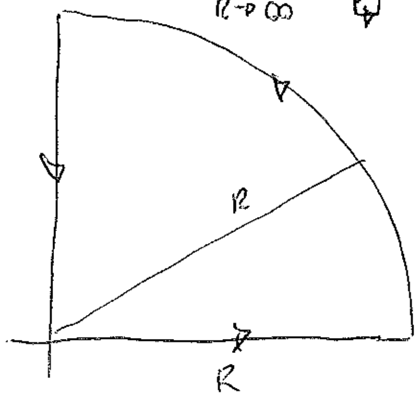
[serve a provare la continuità di ind]

Esercizio : determinare # zeri di

$$P(z) = z^{20} + 400 z^{19} + 1$$

nel primo quadrante

idea: si calcola $\lim_{R\to\infty} \Delta$ (Δ è costante per $R > R_0$ opp...)



$P(x) = x^{20} + 400 x^{19} + 1$

per $x > 0$, $P(x) \neq 0$

variazione di P lungo ——— ...

$= 0$

$$P(iy) = (iy)^{20} + 400(iy)^{19} + 1 =$$

$$= y^{20} + 1 - i\,400\, y^{19}$$

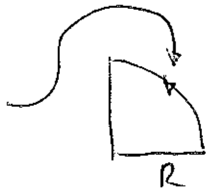
$P(0) = 1$ $\qquad \arg P(0) = 0$

$$\arg P(iy) = \arctan \frac{-400 y^{19}}{y^{20}+1} \to 0$$

se $y \to +\infty$

variazione angolare totale lungo ↓

$= 0$

Invece, lungo un arco  per $R \to +\infty$

$P(z) = z^{20} + g(z)$ $\Rightarrow$ la var. angolare uguaglia quella di z^{20}, cioè

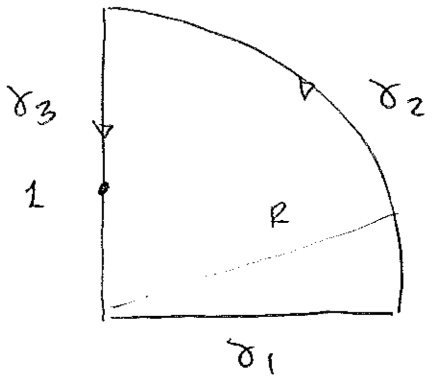
$$\frac{P(z)}{z^{20}} = 1 + \frac{g(z)}{z^{20}} \to 0 \qquad 20 \cdot \frac{\pi}{2} = 10\pi$$

sicché $Z = \dfrac{10\pi}{2\pi} = 5$

$X - 3$

Esercizio: zeri di $P(z) = z^3 + z + 1$

nel primo quadrante



$\Delta_{\gamma_1} = 0$

$\Delta_{\gamma_2} \to 3 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi$

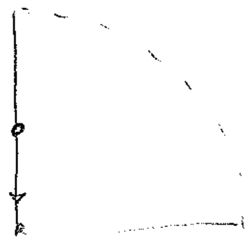
$$P(iy) = i^3 y^3 + iy + 1$$
$$= 1 + i(y - y^3) = 1 + i\underbrace{y(1-y^2)}_{=0}$$

per $y = 0, \pm 1$

$P(iR) = 1 + iR(1-R^2)$

$\arctan R(1-R^2) \to -\frac{\pi}{2}$

$P(0) = 1$



variazione totale lungo $\downarrow$ $= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = +\frac{\pi}{2}$

variazione totale $= \frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{2} = 2\pi$

$$\Rightarrow \quad Z = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$